Fichiers Applications-Lineaires a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y+z, x+y+z, x) \end{array}$.

1. Donner les images par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer des bases de $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.
3. Soit $u=(0,-1,1)$, $v=(1,0,-1)$ et $w=(2,3,1)$. Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$, et déterminer les formules analytiques de f dans cette base.

Exercice 2 : Déterminer une base du noyau et de l'image de :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (2x+y+z, x+y+t, x+z-t) \end{array}$$

Exercice 3 : Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Montrer que $\ker(u) = \ker(u^2) \iff \operatorname{Im}(u) \cap \ker(u) = \{0\}$.

Correction :

$\Rightarrow$ Supposons que $\ker u = \ker u^2$ et montrons que $\operatorname{Im} u \cap \ker u = \{0\}$.

- $\supset$ immédiat.
- $\subset$ Considérons $x \in \operatorname{Im} u \cap \ker u$.

  Comme $x \in \operatorname{Im} u$, il existe $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $x = u(x_0)$.

  Comme $x \in \ker u$, on peut en déduire que $u(x) = u(u(x_0)) = 0$. Donc $x_0 \in \ker u^2$.

  Or par hypothèse, $\ker u = \ker u^2$. On a donc $x_0 \in \ker u$, i.e. $x = u(x_0) = 0$.

  $\operatorname{Im} u \cap \ker u \subset \{0\}$.

$\Leftarrow$ Supposons que $\operatorname{Im} u \cap \ker u = \{0\}$ et montrons que $\ker u = \ker u^2$.

- $\subset$ toujours vrai.
- $\supset$ Considérons $x \in \ker u^2$. On a donc $u(u(x)) = 0$.

  On déduit de cette écriture que $u(x) \in \operatorname{Im} u \cap \ker u$. Par hypothèse, $u(x) = 0$ donc $x \in \ker u$.

  On a prouvé $\ker u \supset \ker u^2$.

Exercice 4 : Montrer que $\phi : (a,b,c) \mapsto (2a, b+c) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

Correction : $\forall (a,b,c),(a',b',c') \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \phi(\lambda(a,b,c) + (a',b',c')) = \lambda\phi((a,b,c)) + \phi((a',b',c'))$

Exercice 5 : $\phi : (a,b,c) \mapsto (2a+b, b+c, c+1)$ est-elle linéaire ?

Correction : $\phi((0,0,0)) = (0,0,1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ donc ϕ n'est pas linéaire.

Exercice 6 : Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, x+y, y) \end{array}$.

Montrer que f est linéaire.

Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

Correction :

- $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ AOC.
- $(x, y) \in \ker \phi \iff \phi((x, y)) = (x, x+y, y) = (0, 0, 0) \iff x = y = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$.

  $\boxed{\ker \phi = \{(0, 0)\}}$
- $(a, b, c) \in \operatorname{Im} \phi \iff \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, \phi((x, y)) = (a, b, c) \iff \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, x+y, y) = (a, b, c) \iff b = a+c$

  $\boxed{\ker \phi = \{(a, a+c, c), a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}(1, 1, 0) + \mathbb{R}(0, 1, 1)}$

Exercice 7 : Déterminer une base du noyau et de l'image de :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & (2x + y + z, x + y + t, x + z - t) \end{array}$$

Exercice 8 : Déterminer une base du noyau et de l'image de

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (y - z, z - x, x - y) \end{array}$$

Exercice 9 : On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + i\bar{z} \end{array}$.

Déterminer une base du noyau et de l'image de f.

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Soit $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \mathrm{P} & \longmapsto & (\mathrm{P}(1), \mathrm{P}'(1)) \end{array}$

Montrer que ϕ est linéaire.

Déterminer $\ker \phi$ et $\operatorname{Im} \phi$.

Exercice 2 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^3 = f^2 + f$.

Montrer que $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = \mathrm{E}$.

Correction : $x = [x + f(x) - f^2(x)] + [f^2(x) - f(x)]$.

Exercice 3 : On considère $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2$ quatre $\mathbb{K}-$espaces vectoriels, $f_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{E}_1, \mathrm{F}_1)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(\mathrm{E}_2, \mathrm{F}_2)$.

On définit $f_1 \times f_2 : \begin{array}{ccc} \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 & \longrightarrow & \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & (f_1(x_1), f_2(x_2)) \end{array}$.

1. Montrer que $f_1 \times f_2$ est linéaire.
2. Montrer que $f_1 \times f_2$ est injective si, et seulement si f_1 et f_2 sont injectives.
3. Étudier la surjectivité de $f_1 \times f_2$.

Correction :

1. Soient $(x_1, x_2), (x_1', x_2') \in \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} f_1 \times f_2(\lambda(x_1, x_2) + (x_1', x_2')) &= f_1 \times f_2((\lambda x_1 + x_1', \lambda x_2 + x_2')) \\ &= (f_1(\lambda x_1 + x_1'), f_2(\lambda x_2 + x_2')) \\ &= (\lambda f_1(x_1) + f_1(x_1'), \lambda f_2(x_2) + f_2(x_2')) \text{ car } f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont linéaires} \\ &= (\lambda f_1(x_1), \lambda f_2(x_2)) + (f_1(x_1'), f_2(x_2')) \\ &= \lambda(f_1(x_1), f_2(x_2)) + (f_1(x_1'), f_2(x_2')) \\ &= \lambda f_1 \times f_2(x_1, x_2) + f_1 \times f_2(x_1', x_2') \end{aligned}$$

donc $f_1 \times f_2$ est linéaire.

2 $(x_1, x_2) \in \ker(f_1 \times f_2) \iff f_1 \times f_2((x_1, x_2)) = (0_{F_1}, 0_{F_2}) \iff \begin{cases} f_1(x_1) = 0_{F_1} \\ f_2(x_2) = 0_{F_2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 \in \ker f_1 \\ x_2 \in \ker f_2 \end{cases}$.

Par conséquent, $\ker(f_1 \times f_2) = (\ker f_1) \times (\ker f_2)$.

Et donc : $f_1 \times f_2$ est injective $\iff \ker(f_1 \times f_2) = \left\{(0_{F_1}, 0_{F_2})\right\} \iff \begin{cases} \ker f_1 = \left\{0_{F_1}\right\} \\ \ker f_2 = \left\{0_{F_2}\right\} \end{cases} \iff f_1$ et f_2 sont injectives.

3 On a également $f_1 \times f_2$ surjective $\iff f_1$ et f_2 sont surjectives.

Exercice 4 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (y + z, x + y + z, x) \end{array}$.

1 Donner les images par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2 Déterminer des bases de $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

3 Soit $u = (0, -1, 1)$, $v = (1, 0, -1)$ et $w = (2, 3, 1)$. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$, et déterminer les formules analytiques de f dans cette base.

Exercice 5 : On considère E_1, E_2, F_1, F_2 quatre $\mathbb{K}$−espaces vectoriels, $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F_1)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F_2)$.

On définit $f_1 \times f_2 : \begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \longrightarrow & F_1 \times F_2 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & (f_1(x_1), f_2(x_2)) \end{array}$.

1 Montrer que $f_1 \times f_2$ est linéaire.

2 Montrer que $f_1 \times f_2$ est injective si, et seulement si f_1 et f_2 sont injectives.

3 Étudier la surjectivité de $f_1 \times f_2$.

Correction :

1 Soient $(x_1, x_2), (x_1', x_2') \in E_1 \times E_2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} f_1 \times f_2(\lambda(x_1, x_2) + (x_1', x_2')) &= f_1 \times f_2((\lambda x_1 + x_1', \lambda x_2 + x_2')) \\ &= (f_1(\lambda x_1 + x_1'), f_2(\lambda x_2 + x_2')) \\ &= (\lambda f_1(x_1) + f_1(x_1'), \lambda f_2(x_2) + f_2(x_2')) \text{ car } f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont linéaires} \\ &= (\lambda f_1(x_1), \lambda f_2(x_2)) + (f_1(x_1'), f_2(x_2')) \\ &= \lambda (f_1(x_1), f_2(x_2)) + (f_1(x_1'), f_2(x_2')) \\ &= \lambda f_1 \times f_2(x_1, x_2) + f_1 \times f_2(x_1', x_2') \end{aligned}$$

donc $f_1 \times f_2$ est linéaire.

2 $(x_1, x_2) \in \ker(f_1 \times f_2) \iff f_1 \times f_2((x_1, x_2)) = (0_{F_1}, 0_{F_2}) \iff \begin{cases} f_1(x_1) = 0_{F_1} \\ f_2(x_2) = 0_{F_2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 \in \ker f_1 \\ x_2 \in \ker f_2 \end{cases}$.

Par conséquent, $\ker(f_1 \times f_2) = (\ker f_1) \times (\ker f_2)$.

Et donc : $f_1 \times f_2$ est injective $\iff \ker(f_1 \times f_2) = \left\{(0_{F_1}, 0_{F_2})\right\} \iff \begin{cases} \ker f_1 = \left\{0_{F_1}\right\} \\ \ker f_2 = \left\{0_{F_2}\right\} \end{cases} \iff f_1$ et f_2 sont injectives.

3 On a également $f_1 \times f_2$ surjective $\iff f_1$ et f_2 sont surjectives.

Exercice 6 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 P \end{array}$.

1. Montrer que f est une forme linéaire.
2. Déterminer $\operatorname{Im} f$.
3. En déduire $\dim \ker f$.
4. Déterminer une base de $\ker f$.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que $\ker u = \ker u^2 \iff \operatorname{Im} u \cap \ker u = \{0\}$.

Correction :

$\Rightarrow$ Supposons que $\ker u = \ker u^2$ et montrons que $\operatorname{Im} u \cap \ker u = \{0\}$.

- $\supset$ immédiat.
- $\subset$ Considérons $x \in \operatorname{Im} u \cap \ker u$.

  Comme $x \in \operatorname{Im} u$, il existe $x_0 \in E$ tel que $x = u(x_0)$.

  Comme $x \in \ker u$, on peut en déduire que $u(x) = u(u(x_0)) = 0$. Donc $x_0 \in \ker u^2$.

  Or par hypothèse, $\ker u = \ker u^2$. On a donc $x_0 \in \ker u$, i.e. $x = u(x_0) = 0$.

  $\operatorname{Im} u \cap \ker u \subset \{0\}$.

$\Leftarrow$ Supposons que $\operatorname{Im} u \cap \ker u = \{0\}$ et montrons que $\ker u = \ker u^2$.

- $\subset$ toujours vrai.
- $\supset$ Considérons $x \in \ker u^2$. On a donc $u(u(x)) = 0$.

  On déduit de cette écriture que $u(x) \in \operatorname{Im} u \cap \ker u$. Par hypothèse, $u(x) = 0$ donc $x \in \ker u$.

  On a prouvé $\ker u \supset \ker u^2$.

Exercice 2 : Soit $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & Q, \text{ reste dans la division euclidienne de } P \text{ par } X-1 \end{array}$

Montrer que ϕ est linéaire.

Déterminer $\ker \phi$ et $\operatorname{Im} \phi$.

Correction :

– Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Écrivons les divisions euclidiennes de P_1 et P_2 par $X-1$:

$P_1 = (X-1)Q_1 + R_1$ et $P_2 = (X-1)Q_2 + R_2$ avec $\deg(R_1) < 1$ et $\deg(R_2) < 1$ (i.e. R_1 et R_2 sont constants).

On a $\lambda P_1 + P_2 = (X-1)(\lambda Q_1 + Q_2) + (\lambda R_1 + R_2)$.

Or $\lambda R_1 + R_2$ est également constant, donc l'écriture précédente est la division euclidienne de $\lambda P_1 + P_2$ par $X-1$.

On en déduit $\phi(\lambda P_1 + P_2) = \lambda R_1 + R_2 = \lambda\phi(P_1) + \phi(P_2)$: ϕ est linéaire.

$P \in \ker \phi \iff \phi(P) = 0 \iff X - 1 | P \iff P \in (X-1)\mathbb{R}_2[X]$

$\boxed{\ker \phi = (X-1)\mathbb{R}_2[X].}$

$\boxed{\text{Im}\,\phi \text{ est l'ensemble des polynômes constants.}}$

En effet, si $P \in \text{Im}\,\phi$ alors $\deg(P) < 1$ et P est constant.

Réciproquement, si P est constant, $P = 0(X-1) + P$ donc $P = \phi(P)$: $P \in \text{Im}\,\phi$.

Exercice 3 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et f un endomorphisme nilpotent non nul de E.

Soit p le plus petit entier tel que $f^p = 0$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ soit libre.
2. En déduire que $f^n = 0$.