Fichiers AlgLin-Famille a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $f_1 : t \mapsto e^t$ et $f_2 : t \mapsto e^{-t}$.

Montrer que $\mathrm{vect}\,(f_1, f_2) = \mathrm{vect}\,(\mathrm{ch}\,, \mathrm{sh}\,)$.

Exercice 2 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$.

On considère $u = (2, 3, -1)$, $v = (1, -1, -2)$, $w = (3, 7, 0)$, $x = (5, 0, -7)$.

Montrer que $\mathrm{vect}\,(u, v) = \mathrm{vect}\,(w, x)$.

Exercice 3 : Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (2, 3, -1)$ et $v_2 = (1, -1, -2)$ et F celui engendré par $w_1 = (3, 7, 0)$ et $w_2 = (5, 0, -7)$.

Montrer que E et F sont égaux.

Correction : Montrons d'abord que $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$. On va d'abord montrer que $v_1 \in \mathrm{F}$ et $v_2 \in \mathrm{F}$.

Tout d'abord $v_1 \in \mathrm{F} \iff v_1 \in \mathrm{Vect}\{w_1, w_2\} \iff \exists \lambda, \mu \quad v_1 = \lambda w_1 + \mu w_2$.

Il s'agit donc de trouver ces λ, μ. Cela se fait en résolvant un système (ici on peut même le faire de tête) on trouve la relation $7(2, 3, -1) = 3(3, 7, 0) - (5, 0, -7)$ ce qui donne la relation $v_1 = \frac{3}{7} w_1 - \frac{1}{7} w_2$ et donc $v_1 \in \mathrm{F}$.

De même $7v_2 = -w_1 + 2w_2$ donc $v_2 \in \mathrm{F}$.

Maintenant v_1 et v_2 sont dans l'espace vectoriel F, donc toute combinaison linéaire de v_1 et v_2 aussi, c'est-à-dire : pour tout λ, μ, on a $\lambda v_1 + \mu v_2 \in \mathrm{F}$. Ce qui implique $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$.

Il reste à montrer $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$. Il s'agit donc d'écrire w_1 (puis w_2) en fonction de v_1 et v_2. On trouve $w_1 = 2v_1 - v_2$ et $w_2 = v_1 + 3v_2$. Encore une fois cela entraîne $w_1 \in \mathrm{E}$ et $w_2 \in \mathrm{E}$ donc $\mathrm{Vect}\{w_1, w_2\} \subset \mathrm{E}$ d'où $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$.

Par double inclusion on a montré $\mathrm{E} = \mathrm{F}$.

Exercice 4 : Peut-on déterminer des réels x, y pour que le vecteur $v = (-2, x, y, 3)$ appartienne au s.e.v. engendré dans $\mathbb{R}^4$ par le système (e_1, e_2) où $e_1 = (1, -1, 1, 2)$ et $e_2 = (-1, 2, 3, 1)$?

Correction : $v \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ est équivalent à l'existence de deux réels λ, μ tels que $v = \lambda e_1 + \mu e_2$.

Alors $(-2, x, y, 3) = \lambda(1, -1, 1, 2) + \mu(-1, 2, 3, 1)$ est équivalent à

$$\begin{cases} -2 &= \lambda - \mu \\ x &= -\lambda + 2\mu \\ y &= \lambda + 3\mu \\ 3 &= 2\lambda + \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= 1/3 \\ \mu &= 7/3 \\ x &= 13/3 \\ y &= 22/3 \end{cases}.$$

Le couple qui convient est donc $(x, y) = (13/3, 22/3)$.

Exercice 5 : Montrer que toute suite de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.

Montrer que toute suite de polynômes non nuls de valuations deux à deux distinctes est libre.

Correction : Soient n un entier naturel non nul puis $P_1,..., P_n$ n polynômes non nuls de degrés respectifs $d_1 < ... < d_n$.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_1 P_1 + ... + \lambda_n P_n = 0$. Supposons par l'absurde que les λ_i ne soient pas tous nuls et posons $k = \mathcal{M}ax\{i \in [\![1\,;n]\!] \,/\, \lambda_i \neq 0\}$. On ne peut avoir $k = 1$ car $P_1 \neq 0$ puis

$$\lambda_1 P_1 + ... + \lambda_n P_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 P_1 + ... + \lambda_k P_k = 0 \Rightarrow \lambda_k P_k = -\sum_{i<k} \lambda_i P_i.$$

Cette dernière égalité est impossible car $\lambda_k P_k$ est un polynôme de degré d_k (car $\lambda_k \neq 0$) et $-\sum_{i<k} \lambda_i P_i$ est un polynôme de degré au plus $d_{k-1} < d_k$. Donc tous les λ_k sont nuls.

La même démarche tient en remplaçant degré par valuation et en s'intéressant à la plus petite valuation au lieu du plus grand degré.

Exercice 6 : On considère les vecteurs de K^3 : $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (1, 3, 2)$, $\vec{c} = (1, 1, 0)$, $\vec{d} = (3, 8, 5)$.

Soient $F = \mathrm{vect}(\vec{a}, \vec{b}\,)$ et $G = \mathrm{vect}(\vec{c}, \vec{d}\,)$.

Comparer F et G.

Correction : $F = G$.

Exercice 7 : Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles (muni des opérations usuelles).

On considère les trois éléments de E suivants : $u = (\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (\cos(n\theta + a))_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (\cos(n\theta + b))_{n\in\mathbb{N}}$ où θ, a et b sont des réels donnés.

Montrer que (u, v, w) est une famille liée.

Correction : Soit $u' = (\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$. On a : $u = 1.u + 0.u'$, puis $v = \cos a.u - \sin a.u'$, puis $w = \cos b.u - \sin b.u'$. Les trois vecteurs u, v et w sont donc combinaisons linéaires des deux vecteurs u et u' et constituent par suite une famille liée ($p + 1$ combinaisons linéaires de p vecteurs constituent une famille liée).

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $u = (1, 2, -1)$, $v = (-6, 0, 2)$.

Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{vect}\,(u, v) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, ax + by + cz = 0\}$.

Exercice 2 : Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $v_2 = (1, -2, 3, -4)$.

Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$?

Correction :

$$\begin{aligned}
(x, 1, y, 1) \in \mathcal{V}ect\{v_1, v_2\} &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad (x, 1, y, 1) = \lambda(1, 2, 3, 4) + \mu(1, -2, 3, -4)\\
&\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad (x, 1, y, 1) = (\lambda, 2\lambda, 3\lambda, 4\lambda) + (\mu, -2\mu, 3\mu, -4\mu)\\
&\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad (x, 1, y, 1) = (\lambda + \mu, 2\lambda - 2\mu, 3\lambda + 3\mu, 4\lambda - 4\mu)\\
&\Longrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad 1 = 2(\lambda - \mu) \text{ et } 1 = 4(\lambda - \mu)\\
&\Longrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad \lambda - \mu = \frac{1}{2} \text{ et } \lambda - \mu = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Ce qui est impossible (quelque soient x, y). Donc on ne peut pas trouver de tels x, y.

Exercice 3 : Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $v_2 = (1, -2, 3, -4)$.
Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, 1, y) \in \text{Vect}\{v_1, v_2\}$?

Correction :

$$\begin{aligned}
(x,1,1,y) \in \mathcal{V}\text{ect}\{v_1,v_2\} &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad (x,1,1,y) = (\lambda+\mu, 2\lambda-2\mu, 3\lambda+3\mu, 4\lambda-4\mu) \\
&\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x &= \lambda+\mu \\ 1 &= 2\lambda-2\mu \\ 1 &= 3\lambda+3\mu \\ y &= 4\lambda-4\mu \end{cases} \\
&\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} \lambda &= \dfrac{5}{12} \\ \mu &= -\dfrac{1}{12} \\ x &= \dfrac{1}{3} \\ y &= 2 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Donc le seul vecteur $(x, 1, 1, y)$ qui convienne est $(\frac{1}{3}, 1, 1, 2)$.

Exercice 4 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{cases} f_\alpha(x) = 1 & \text{si } x = \alpha \\ f_\alpha(x) = 0 & \text{si } x \neq \alpha \end{cases}.$$

Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre.

Correction : À partir de la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ nous considérons une combinaison linéaire (qui ne correspond qu'à un nombre fini de termes).

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels distincts, considérons la famille (finie) : $(f_{\alpha_i})_{i=1,\ldots,n}$. Supposons qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{\alpha_i} = 0$. Cela signifie que, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{\alpha_i}(x) = 0$; en particulier pour $x = \alpha_j$ l'égalité devient $\lambda_j = 0$ car $f_{\alpha_i}(\alpha_j)$ vaut 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$. En appliquant le raisonnement ci-dessus pour $j = 1$ jusqu'à $j = n$ on obtient : $\lambda_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Donc la famille $(f_\alpha)_\alpha$ est une famille libre.

Exercice 5 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{\alpha x}$.
Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre.

Correction : À partir de la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ nous considérons une combinaison linéaire (qui ne correspond qu'à un nombre fini de termes).

Soient $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n$ des réels distincts que nous avons ordonnés, considérons la famille (finie) : $(f_{\alpha_i})_{i=1,\ldots,n}$. Supposons qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{\alpha_i} = 0$. Cela signifie que, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{\alpha_i}(x) = 0$, autrement dit pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots + \lambda_n e^{\alpha_n x} = 0.$$

Le terme qui domine est $e^{\alpha_1 x}$ (car $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots$). Factorisons par $e^{\alpha_1 x}$:

$$e^{\alpha_1 x}\left(\lambda_1 + \lambda_2 e^{(\alpha_2-\alpha_1)x} + \cdots + \lambda_n e^{(\alpha_n-\alpha_1)x}\right) = 0.$$

Mais $e^{\alpha_1 x} \neq 0$ donc :

$$\lambda_1 + \lambda_2 e^{(\alpha_2-\alpha_1)x} + \cdots + \lambda_n e^{(\alpha_n-\alpha_1)x} = 0.$$

Lorsque $x \to +\infty$ alors $e^{(\alpha_i-\alpha_1)x} \to 0$ (pour tout $i \geqslant 2$, car $\alpha_i - \alpha_1 < 0$). Donc pour $i \geqslant 2$, $\lambda_i e^{(\alpha_i-\alpha_1)x} \to 0$ et en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus on trouve :

$$\lambda_1 = 0.$$

Le premier coefficients est donc nul. On repart de la combinaison linéaire qui est maintenant $\lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$ et en appliquant le raisonnement ci-dessus on prouve par récurrence $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Donc la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est une famille libre.

Exercice 6 : Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Correction : Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$.

$$a + b\sqrt{2} + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow (a + b\sqrt{2})^2 = (-c\sqrt{3})^2 \Rightarrow a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2} = 3c^2 \Rightarrow 2ab\sqrt{2} \in \mathbb{Q}.$$

Mais $\sqrt{2}$ est irrationnel donc $ab = 0$.
Si $b = 0$, puisque $a + c = 0$ et que $\sqrt{3}$ est irrationnel, on en déduit que $c = 0$ (sinon $\sqrt{3}$ serait rationnel) puis $a = 0$ et finalement $a = b = c = 0$.

Si $a = 0$, il reste $2b^2 = 3c^2$. Mais $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ est irrationnel (dans le cas contraire, il existe deux entiers p et q non nuls tels que $3q^2 = 2p^2$ et par exemple l'exposant du nombre premier 2 n'a pas la même parité dans les deux membres de l'égalité ce qui est impossible) et donc $b = c = 0$ puis encore une fois $a = b = c = 0$.

On a montré que $\forall (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$, $(a + b\sqrt{2} + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow a = b = c = 0)$. Donc la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une famille de réels $\mathbb{Q}$-libre.

Exercice 7 : Soit $f(x) = \ln(1 + x)$ pour x réel positif. Soient $f_1 = f$, $f_2 = f \circ f$ et $f_3 = f \circ f \circ f$. Étudier la liberté de (f_1, f_2, f_3) dans $[0, +\infty[^{[0,+\infty[}$.

Correction : Les fonctions f_1, f_2 et f_3 sont bien définies sur $\mathbb{R}^+$.

Soient a, b et c trois réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$.

Première solution. Si a est non nul, la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ est équivalente au voisinage de $+\infty$ à $a \ln x$ et ne peut donc être égale à la fonction nulle. Donc $a = 0$. Puis si b est non nul, la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3 = bf_2 + cf_3$ est équivalente à $b \ln(\ln x)$ et ne peut être égale à la fonction nulle. Donc $b = 0$. Puis $c = 0$.

Deuxième solution. On effectue un développement limité à un ordre suffisant de la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ quand x tend vers 0 :

$f_1(x) = \ln(1 + x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ puis

$$\begin{aligned} f_2(x) = \ln(1 + f_1(x)) &\underset{x\to 0}{=} \ln\left(1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\ &= x - x^2 + \frac{7}{6}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

puis

$$f_3(x) = \ln(1+f_2(x)) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(1+x-x^2+\frac{7}{6}x^3+o(x^3)\right) = \left(x-x^2+\frac{7}{6}x^3\right) - \frac{1}{2}\left(x-x^2\right)^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$
$$= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^3 + o(x^3).$$

Par suite, $af_1(x)+bf_2(x)+cf_3(x) \underset{x\to 0}{=} (a+b+c)x + \left(-\frac{a}{2}-b-\frac{3c}{2}\right)x^2 + \left(\frac{a}{3}+\frac{7b}{6}+\frac{5c}{2}\right)x^3 + o(x^3)$.
L'égalité $af_1+bf_2+cf_3=0$ fournit, par identification des parties régulières des développements limités à l'ordre trois en zéro :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ -\frac{a}{2}-b-\frac{3c}{2}=0 \\ \frac{a}{3}+\frac{7b}{6}+\frac{5c}{2} \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} a+b+c=0 \\ a+2b+3c=0 \\ 2a+7b+15c=0 \end{cases}.$$

Comme $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, on a donc $a=b=c=0$.

Exercice 8 : Soit $f_a(x) = |x-a|$ pour a et x réels.
Étudier la liberté de la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$.

Correction : Soient n un entier naturel non nul puis a_1,..., a_n n réels deux à deux distincts et λ_1,..., λ_n n réels.
Supposons $\lambda_1 f_{a_1} + \ldots + \lambda_n f_{a_n} = 0$. Soit i un élément de $[\![1\,;n]\!]$. On a $\lambda_i f_{a_i} = -\sum_{j\neq i}\lambda_j f_{a_j}$ et on ne peut avoir $\lambda_i \neq 0$ car alors le membre de gauche est une fonction non dérivable en a_i tandis que le membre de droite l'est. Par suite, tous les λ_i sont nuls et donc la famille $(f_{a_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre.

On a montré que toute sous-famille finie de la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre et donc la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 9 : On pose $f_a(x) = e^{ax}$ pour a et x réels.
Étudier la liberté de la famille de fonctions $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$.

Correction : Soient $a_1 < \ldots < a_n$ n réels deux à deux distincts et λ_1,..., λ_n n réels tels que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_{a_i} = 0$ $(*)$.
Première solution. Après multiplication des deux membres de $(*)$ par $e^{-a_n x}$ puis passage à la limite quand x tend vers $+\infty$, on obtient $\lambda_n = 0$. En réitérant, on obtient donc $\lambda_n = \lambda_{n-1} = \ldots = \lambda_1 = 0$.
Deuxième solution. On note f la fonction apparaissant au premier membre de $(*)$.

$$\begin{aligned} f = 0 &\Rightarrow \forall\, k \in [\![0\,;n-1]\!]\,,\ f^{(k)}(0) = 0 \\ &\Rightarrow \forall\, k \in [\![0\,;n-1]\!]\,,\ \lambda_1 a_1^k + \ldots + \lambda_n a_n^k = 0. \end{aligned}$$

Le système précédent d'inconnues λ_i, $1 \leqslant n$, est un système linéaire homogène à n équations et n inconnues. Son déterminant est le déterminant de Vandermonde des a_i et est non nul puisque les a_i sont deux à deux distincts. Le système est donc de Cramer et admet l'unique solution $(0,\ldots,0)$.

Troisième solution. (dans le cas où on se restreint à démontrer la liberté de la famille $(x \mapsto e^{nx})_{n\in\mathbb{N}_{n_0}}$).

Soient $n_1 < \dots < n_p$ p entiers naturels deux à deux distincts. Supposons que pour tout réel x on ait $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{n_i x} = 0$. On en déduit que pour tout réel strictement positif t, on a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t^{n_i} = 0$ et donc le polynôme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{X}^{n_i}$ est nul (car a une infinité de racines) ou encore les coefficients du polynôme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{X}^{n_i}$ à savoir les λ_i sont tous nuls.

Quatrième solution. (pour les redoublants) L'application φ qui à f de classe C^∞ fait correspondre sa dérivée est un endomorphisme de l'espace des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour a réel donné, $\varphi(f_a) = af_a$ et la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est constituée de vecteurs propres de φ (les f_a sont non nulles) associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. On sait qu'une telle famille est libre.

Exercice 10 : Soit E un espace vectoriel, $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une famille libre de vecteurs de E, et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des scalaires.

On pose $\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$, et $\vec{x}_i' = \vec{x}_i + \vec{y}$.

Étudier à quelle condition la famille $(\vec{x}_1', \dots, \vec{x}_n')$ est libre.

Correction : CNS : $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq -1$.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 :

1. Calculer pour p et q entiers naturels donnés les intégrales suivantes :

$$\mathrm{J}(p,q) = \int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)\,dx,\ \mathrm{K}(p,q) = \int_0^{2\pi} \cos(px)\sin(qx)\,dx \text{ et}$$
$$\mathrm{L}(p,q) = \int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)\,dx.$$

2. Montrer que la famille de fonctions $(\cos(px))_{p\in\mathbb{N}_{n_0}} \cup (\sin(qx))_{q\in\mathbb{N}^*_{n_0}}$ est libre.

Correction :

1. Pour p et q entiers relatifs, posons $\mathrm{I}(p,q) = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(p-q)x}\,dx$.

   Si $p \neq q$, $\mathrm{I}(p,q) = \dfrac{1}{i(p-q)}\left[e^{i(p-q)x}\right]_0^{2\pi} = 0$. Soient alors p et q deux entiers naturels.

   Donc si $p \neq q$, $\mathrm{J}(p,q)\dfrac{1}{2}\mathcal{R}e(\mathrm{I}(p,q) + \mathrm{I}(p,-q)) = 0$ puis $\mathrm{K}(p,q) = \dfrac{1}{2}\mathcal{I}m(\mathrm{I}(p,-q) - \mathrm{I}(p,q)) = 0$ puis $\mathrm{L}(p,q) = \dfrac{1}{2}\mathcal{R}e(\mathrm{I}(p,-q) - \mathrm{I}(p,q)) = 0$.

   Si $p = q$, $\mathrm{J}(p,p) = 2\pi$ si $p = 0$ et π si $p \neq 0$ puis $\mathrm{K}(p,p) = 0$ puis $\mathrm{L}(p,p) = \pi$ si $p \neq 0$ et 0 si $p = 0$.

2. Sur l'espace E des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques, l'application qui à (f,g) élément de E^2 associe $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$ est classiquement un produit scalaire. La famille de fonctions proposée est une famille orthogonale pour ce produit scalaire et ne contient pas le vecteur nul de E. Cette famille est donc est libre.

Exercice 2 :

1. Soient $v_1 = (2,1,4)$, $v_2 = (1,-1,2)$ et $v_3 = (3,3,6)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, trouver trois réels non tous nuls α, β, γ tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$.
2. On considère deux plans vectoriels

$$\mathrm{P}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$$

$$\mathrm{P}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$$

trouver un vecteur directeur de la droite $\mathrm{D} = \mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2$ ainsi qu'une équation paramétrée.

Correction :

1.

$$\begin{aligned} & \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0 \\ \iff & \alpha(2,1,4) + \beta(1,-1,2) + \gamma(3,3,6) = (0,0,0) \\ \iff & \Big(2\alpha + \beta + 3\gamma, \alpha - \beta + 3\gamma, 4\alpha + 2\beta + 6\gamma\Big) = (0,0,0) \\ \iff & \begin{cases} 2\alpha + \beta + 3\gamma & = 0 \\ \alpha - \beta + 3\gamma & = 0 \\ 4\alpha + 2\beta + 6\gamma & = 0 \end{cases} \\ \iff & \cdots \qquad \text{(on résout le système)} \\ \iff & \alpha = -2t, \beta = t, \gamma = t \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Si l'on prend $t = 1$ par exemple alors $\alpha = -2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ donne bien $-2v_1 + v_2 + v_3 = 0$.

Cette solution n'est pas unique, les autres coefficients qui conviennent sont les $(\alpha = -2t, \beta = t, \gamma = t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2. Il s'agit donc de trouver un vecteur $v = (x,y,z)$ dans P_1 et P_2 et donc qui doit vérifier $x - y + z = 0$ et $x - y = 0$:

$$\begin{aligned} & v = (x,y,z) \in \mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2 \\ \iff & x - y + z = 0 \text{ et } x - y = 0 \\ \iff & \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \\ \iff & \cdots \qquad \text{(on résout le système)} \\ \iff & (x = t, y = t, z = 0) \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc, si l'on fixe par exemple $t = 1$, alors $v = (1,1,0)$ est un vecteur directeur de la droite vectorielle D, une équation paramétrique étant $\mathrm{D} = \{(t,t,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3 : Soit $f : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[\times[0,2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x\cos y, x\sin y) \end{array}$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Soient a, b, α et β quatre réels.

   Montrer qu'il existe $(c,\gamma) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ a\cos(x-\alpha) + b\cos(x-\beta) = c\cos(x-\gamma)$.

3 Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $F = \{u \in E /\ \exists (a,b,\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = a\cos(x-\alpha) + b\cos(2x-\beta)\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

4 Déterminer $\{\cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), 1, \cos^2 x, \sin^2 x\} \cap F$.

5 Montrer que $(\cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x))$ est une famille libre de F.

Correction :

1 Pour tout (y, y') élément de $[0, 2\pi[^2$, $f((0,y)) = f((0,y'))$ et f n'est pas injective.

Montrons que f est surjective.

Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$.

- Si $X = Y = 0$, $f((0,0)) = (0,0)$.
- Si $X = 0$ et $Y > 0$, $f((Y, \frac{\pi}{2})) = (0, Y)$ avec $(Y, \frac{\pi}{2})$ élément de $[0, +\infty[\times[0, 2\pi[$.
- Si $X = 0$ et $Y < 0$, $f((-Y, \frac{3\pi}{2})) = (0, Y)$ avec $(-Y, \frac{3\pi}{2})$ élément de $[0, +\infty[\times[0, 2\pi[$.
- Si $X > 0$ et $Y \geqslant 0$, $f((\sqrt{X^2+Y^2}, \arctan\frac{Y}{X})) = (X, Y)$ avec $(\sqrt{X^2+Y^2}, \arctan\frac{Y}{X})$ élément de $[0, +\infty[\times[0, 2\pi[$.
- Si $X < 0$ et $Y \geqslant 0$, $f((\sqrt{X^2+Y^2}, \pi + \arctan\frac{Y}{X})) = (X, Y)$ avec $(\sqrt{X^2+Y^2}, \pi + \arctan\frac{Y}{X})$ élément de $[0, +\infty[\times[0, 2\pi[$.
- Si $X > 0$ et $Y < 0$, $f((\sqrt{X^2+Y^2}, 2\pi + \arctan\frac{Y}{X})) = (X, Y)$ avec $(\sqrt{X^2+Y^2}, 2\pi + \arctan\frac{Y}{X})$ élément de $[0, +\infty[\times[0, 2\pi[$.
- Si $X < 0$ et $Y < 0$, $f((\sqrt{X^2+Y^2}, \pi + \arctan\frac{Y}{X})) = (X, Y)$ avec $(\sqrt{X^2+Y^2}, \pi + \arctan\frac{Y}{X})$ élément de $[0, +\infty[\times[0, 2\pi[$.

2 Pour tout réel x, on a $a\cos(x-\alpha) + b\cos(x-\beta) = (a\cos\alpha + b\cos\beta)\cos x + (a\sin\alpha + b\sin\beta)\sin x$.

D'après 1), f est surjective et il existe (c, γ) élément de $[0, +\infty[\times[0, 2\pi[$ tel que $a\cos\alpha + b\cos\beta = c\cos\gamma$ et $a\sin\alpha + b\sin\beta = c\sin\gamma$. Donc,

$$\exists (c,\gamma) \in [0, +\infty[\times[0, 2\pi[/\ \forall x \in \mathbb{R},\ a\cos(x-\alpha) + b\cos(x-\beta) = c(\cos x cos\gamma + \sin x \sin\gamma) = c\cos(x-\gamma).$$

3 F est non vide car contient l'application nulle et est contenu dans E. De plus, pour x réel,

$$\begin{aligned} a\cos(x-\alpha) + b\cos(2x-\beta) + a'\cos(x-\alpha') + b'\cos(2x-\beta') \\ &= a\cos(x-\alpha) + a'\cos(x-\alpha') + b\cos(2x-\beta) + b'\cos(2x-\beta') \\ &= a'' cos(x-\alpha'') + b''\cos(2x-\beta''), \end{aligned}$$

pour un certain $(a', b'', \alpha'', \beta'')$ (d'après 2)). F est un sous-espace vectoriel de E.

4 Pour tout réel x, $\cos x = 1.\cos(x-0) + 0.\cos(2x-0)$ et $x \mapsto \cos x$ est élément de F.

Pour tout réel x, $\sin x = 1.\cos(x - \frac{\pi}{2}) + 0.\cos(2x-0)$ et $x \mapsto \sin x$ est élément de F.

Pour tout réel x, $\cos(2x) = 0.\cos(x-0) + 1.\cos(2x-0)$ et $x \mapsto \cos(2x)$ est élément de F.

Pour tout réel x, $\sin(2x) = 0.\cos(x-0) + 1.\cos(2x - \frac{\pi}{2})$ et $x \mapsto \sin(2x)$ est élément de F.

D'autre part, pour tout réel x, $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ et donc,

$$x \mapsto 1 \in F \Leftrightarrow x \mapsto \cos^2 x \in F \Leftrightarrow x \mapsto \sin^2 x \in F.$$

Montrons alors que $1 \notin \mathrm{F}$.

On suppose qu'il existe $(a,b,\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a\cos(x-\alpha) + b\cos(2x-\beta) = 1.$$

En dérivant deux fois, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -a\cos(x-\alpha) - 4b\cos(2x-\beta) = 0,$$

et donc en additionnant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -3b\cos(2x-\beta) = 1,$$

ce qui est impossible (pour $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\beta}{2}$, on trouve 0). Donc, aucune des trois dernières fonctions n'est dans F.

5 On a vu que $(x \mapsto \cos x,\ x \mapsto \sin x,\ x \mapsto \cos(2x),\ x \mapsto \sin(2x))$ est une famille d'éléments de F. Montrons que cette famille est libre.

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

Supposons que $\forall x \in \mathbb{R},\ a\cos x + b\sin x + c\cos(2x) + d\sin(2x) = 0$. En dérivant deux fois, on obtient $\forall x \in \mathbb{R},\ -a\cos x - b\sin x - 4c\cos(2x) - 4d\sin(2x) = 0$ et en additionnant : $\forall x \in \mathbb{R},\ -3c\cos(2x) - 3d\sin(2x) = 0$. Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} a\cos x + b\sin x = 0 \\ c\cos(2x) + d\sin(2x) = 0 \end{cases}.$$

$x = 0$ fournit $a = c = 0$ puis $x = \dfrac{\pi}{4}$ fournit $b = d = 0$. Donc, $(x \mapsto \cos x,\ x \mapsto \sin x,\ x \mapsto \cos(2x),\ x \mapsto \sin(2x))$ est une famille libre d'éléments de F.

Exercice 4 : On pose $f_1, f_2, f_3, f_4 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par :
$f_1(x) = \cos x,\ f_2(x) = x\cos x,\ f_3(x) = \sin x$ et $f_4(x) = x\sin x$.
Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.

Exercice 5 : Montrer que les vecteurs $\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ dans cette base.

Correction : $\det \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} = 3 \neq 0$ donc la famille $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. Les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont donc $(1/3, -1/3, 1/3)$.

$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} - \dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. Les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont donc $(1/3, -1/3, -2/3)$.

$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Donc ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $(2/3, -2/3, -1/3)$.