Fichiers Primitives a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Déterminer $\displaystyle\int^x \cos(x)\sqrt{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 2 : Calculer $\displaystyle\int^x \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 3 : Déterminer $\displaystyle\int^x \frac{\cos(\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 4 : Déterminer $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 5 : Déterminer $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}x}{25+9x^2}$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 6 : $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{25-9x^2}}$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 7 : Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

Correction : $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2} dx = 3\ln 2 - 1$ (décomposition en éléments simples).

Exercice 8 : Calculer une primitive de $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$ en précisant le ou les intervalles considérés.

Correction : $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x+x^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

Exercice 9 : Calculer une primitive de $\displaystyle\int \frac{x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$ en précisant le ou les intervalles considérés.

Correction : $\displaystyle\int \frac{x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln\frac{|x^2-1|}{x^2+1}$.

Exercice 10 : Calculer une primitive de $\displaystyle\int \frac{x^3-2}{x^3-x^2}\,\mathrm{d}x$ en précisant le ou les intervalles considérés.

Correction : $\displaystyle\int \frac{x^3-2}{x^3-x^2}\,\mathrm{d}x = x - \frac{2}{x} + \ln\frac{x^2}{|x-1|}$

Exercice 11 : Calculer une primitive de $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}$ en précisant le ou les intervalles considérés.

Correction : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$.

Exercice de difficulté moyenne :

Exercice 1 : Calculer $\int^x \cos(x)\text{ch}^3(x)\,\mathrm{d}x$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 2 : Calculer $\int^x \sin(x)\sin(2x)\sin(3x)\,\mathrm{d}x$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 3 : Calculer $\int^x \tan^2(x)\,\mathrm{d}x$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 4 : Déterminer $\int^x \dfrac{\cos(x)+2\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,\mathrm{d}x$ sur un intervalle à préciser.

Correction : $\displaystyle\int \frac{\cos(x)+2\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{5(\cos(x)+\sin(x))+\mathrm{B}(\cos(x)-\sin(x))}{\cos(x)+\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\frac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\right)\mathrm{d}$

$$= \frac{3}{2}x - \frac{1}{2\ln\left(\cos(x)+\sin(x)\right)}$$

Exercice 5 : Soit $\begin{cases}\mathrm{K} = \displaystyle\int \text{ch}\,(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{L} = \displaystyle\int \text{sh}\,(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\end{cases}$.

Calculer K et L.

Correction : $\mathrm{K}+\mathrm{L} = \int^x e^{mx}\cos(nx)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{K}-\mathrm{L} = \int^x e^{-mx}\cos(nx)\,\mathrm{d}x$.

- *Lorsque* $(m,n)=(0,0)$, *alors* $\begin{cases}\mathrm{K}=x\\ \mathrm{L}=0\end{cases}$.
- *Lorsque* $(m,n)\neq(0,0)$, *alors* $\displaystyle\int^x e^{\pm mx}e^{inx}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{(\pm m+in)x}}{\pm m+in}\right] = \frac{e^{\pm mx}}{m^2+n^2}e^{inx}(\pm m - in)$.

Donc $\begin{cases}\displaystyle\int^x e^{mx}\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{mx}}{m^2+n^2}(m\cos nx + n\sin nx)\\ \displaystyle\int^x e^{-mx}\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-mx}}{m^2+n^2}(-m\cos nx + n\sin nx)\end{cases}$.

On en déduit : $\begin{cases}\mathrm{K} = \dfrac{m\text{sh}\,(mx)\cos nx + n\text{ch}\,(mx)\sin nx}{m^2+n^2}\\ \mathrm{L} = \dfrac{m\text{ch}\,(mx)\cos nx + n\text{sh}\,(mx)\sin nx}{m^2+n^2}\end{cases}$.

Exercice 6 : Soient $\mathrm{I} = \int_0^\pi x\cos^2 x dx$ et $\mathrm{J} = \int_0^\pi x\sin^2 x dx$.

1. Calculer I et I + J.
2. En déduire J.

Exercice 7 : $\begin{cases}\mathrm{K} = \displaystyle\int \text{ch}\,mx\cos nx\,\mathrm{d}x\\ \mathrm{L} = \displaystyle\int \text{sh}\,mx\cos nx\,\mathrm{d}x\end{cases}$.

Calculer K et L.

Correction : $\mathrm{K}+\mathrm{L} = \int e^{mx}\cos nx\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{K}-\mathrm{L} = \int e^{-mx}\cos nx\,\mathrm{d}x$.

- *Lorsque* $(m,n)=(0,0)$, *alors* $\begin{cases}\mathrm{K}=x\\ \mathrm{L}=0\end{cases}$.

– Lorsque $(m,n)\neq(0,0)$, alors $\displaystyle\int e^{mx}e^{inx}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{(m+in)x}}{m+in}\right] = \frac{e^{-mx}}{m^2+n^2}e^{inx}(m-in)$.

Donc $\begin{cases}\displaystyle\int e^{mx}\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{mx}}{m^2+n^2}\left(m\cos nx + n\sin nx\right)\\ \displaystyle\int e^{-mx}\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-mx}}{m^2+n^2}\left(-m\cos nx + n\sin nx\right)\end{cases}$.

On en déduit : $\begin{cases}\mathrm{K} = \dfrac{m\mathrm{sh}\,(mx)\cos nx + n\mathrm{ch}\,(mx)\sin nx}{m^2+n^2}\\ \mathrm{L} = \dfrac{m\mathrm{ch}\,(mx)\cos nx + n\mathrm{sh}\,(mx)\sin nx}{m^2+n^2}\end{cases}$.

Exercice 8 : Calculer une primitive de $\dfrac{x^5}{x^3-x^2-x+1}$ en précisant le ou les intervalles considérés.

Correction : $\mathrm{X}^3-\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1 = \mathrm{X}^2(\mathrm{X}-1)-(\mathrm{X}-1) = (\mathrm{X}^2-1)(\mathrm{X}-1) = (\mathrm{X}-1)^2(\mathrm{X}+1)$. Donc, la décomposition en éléments simples de $f = \dfrac{\mathrm{X}^5}{\mathrm{X}^3-\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1}$ est de la forme $a\mathrm{X}^2+b\mathrm{X}+c+\dfrac{d_1}{\mathrm{X}-1}+\dfrac{d_2}{(\mathrm{X}-1)^2}+\dfrac{e}{\mathrm{X}+1}$.

– Détermination de a, b et c :
La division euclidienne de X^5 par $\mathrm{X}^3-\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1$ s'écrit

$$\mathrm{X}^5 = (\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+2)(\mathrm{X}^3-\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1)+2\mathrm{X}^2+\mathrm{X}-2.$$

On a donc $a=1$, $b=1$ et $c=2$.

– $e = \lim\limits_{x\to-1}(x+1)f(x) = \dfrac{(-1)^5}{(-1-1)^2} = -\dfrac{1}{4}$.

– Puis, $d_2 = \lim\limits_{x\to1}(x-1)^2f(x) = \dfrac{1^5}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.

– Enfin, $x=0$ fournit $0 = c-d_1+d_2+e$ et donc, $d_1 = -2-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4} = -\dfrac{9}{4}$.

Finalement,

$$\frac{\mathrm{X}^5}{\mathrm{X}^3-\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1} = \mathrm{X}^2+\mathrm{X}+2-\frac{9}{4}\frac{1}{\mathrm{X}-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(\mathrm{X}-1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{\mathrm{X}+1},$$

et donc, I désignant l'un des trois intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ ou $]1,+\infty[$, on a sur I

$$\int \frac{x^5}{x^3-x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\mathrm{C}.$$

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Déterminer $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ sur un intervalle à préciser.

Correction : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}-\int_0^0\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}{x-0} = \dfrac{1}{1+0^2} = 0.$

Exercice 2 : Étude complète de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x\frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}\,\mathrm{d}t$.

Correction : Pour t réel, posons $g(t) = \dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}$ puis, pour x réel, $\mathrm{G}(x) = \displaystyle\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

Puisque g est définie et continue sur $\mathbb{R}$, G est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathrm{G}' = g$ (G est la primitive de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1).

Plus précisément, g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donc G est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Finalement, f est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$.

Étude en 1 : Pour $x \neq 1$,

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\mathrm{G}(x)}{x-1} &= \frac{\mathrm{G}(1) + \mathrm{G}'(1)(x-1) + \frac{\mathrm{G}''(1)}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)}{x-1} \\ &= g(1) + g'(1)(x-1) + o((x-1)). \end{aligned}$$

Donc, f admet en 1 un développement limité d'ordre 1.

Par suite, f se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1) = g(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ puis le prolongement est dérivable en 1 et $f'(1) = \dfrac{1}{2}g'(1)$.

Or, pour tout réel x, $g'(x) = 2x\dfrac{1}{\sqrt{1+x^8}} + x^2 \times \left(-\dfrac{4x^7}{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}\right) = 2x\dfrac{1-x^8}{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}$ et $g'(1) = 0$.

Donc, $f'(1) = 0$.

Variations : Pour $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{G}'(x)(x-1) - \mathrm{G}(x)}{(x-1)^2}$.

$f'(x)$ est du signe de $h(x) = \mathrm{G}'(x)(x-1) - \mathrm{G}(x)$ dont la dérivée est

$$h'(x) = \mathrm{G}''(x)(x-1) + \mathrm{G}'(x) - \mathrm{G}'(x) = (x-1)g'(x).$$

h' est du signe de $2x(1-x^8)(x-1)$ ou encore du signe de $-2x(1+x)$.

h est donc décroissante sur $]-\infty,-1]$ et sur $[0,+\infty[$ et croissante sur $[-1,0]$.

Maintenant, quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$),

$$\mathrm{G}'(x)(x-1) = g(x)(x-1) \sim x\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}$$

et donc $\mathrm{G}'(x)(x-1)$ tend vers 0.

Ensuite, pour $x \geqslant 1$

$$0 \leqslant \mathrm{G}(x) \leqslant \int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{t^8}}\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{x} \leqslant 1,$$

et G est bornée au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$).

Comme G est croissante sur $\mathbb{R}$, G a une limite réelle en $+\infty$ et en $-\infty$.

Cette limite est strictement positive en $+\infty$ et strictement négative en $-\infty$.

Par suite, h a une limite strictement positive en $-\infty$ et une limite strictement négative en $+\infty$. Sur $[0,+\infty[$, h est décroissante et s'annule en 1.

Donc, h est positive sur $[0,1]$ et négative sur $[1,+\infty[$.

Ensuite,

$$h(-1) = \int_{-1}^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}\,\mathrm{d}t - \sqrt{2} = 2\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}\,\mathrm{d}t - \sqrt{2} < 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t - \sqrt{2} = 0,$$

et $h(-1) < 0$.

h s'annule donc une et une seule fois sur $]-\infty, -1[$ en un certain réel α et une et une seule fois sur $]-1, 0[$ en un certain réel β.

De plus, h est strictement positive sur $]-\infty, \alpha[$, strictement négative sur $]\alpha, \beta[$, strictement positive sur $]\beta, 1[$ et strictement négative sur $]1, +\infty[$.

f est strictement croissante sur $]-\infty, \alpha]$, strictement décroissante sur $[\alpha, \beta]$, strictement croissante sur $[\beta, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

Étude en l'infini : En $+\infty$ ou $-\infty$, G a une limite réelle et donc f tend vers 0.

Exercice 3 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.

Correction : avec ϵ.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ continue en 0.

Déterminer $\displaystyle\lim_{u\to 0} \int_0^u \frac{u}{u^2+x^2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Correction : Poser $h = \dfrac{x}{u}$. La réponse est $f(0)\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 5 : Déterminer $\displaystyle\int^x \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x$ sur un intervalle à préciser.

Correction : $\displaystyle\int \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\left(\sin\ln(x) - \cos\ln(x)\right)$.

Exercice 6 : Calculer $\displaystyle\int^x xe^x \cos(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 7 : Déterminer $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^\pi \cos(nx)\cos^n x\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin(nx)\cos^n x\,\mathrm{d}x$.

Correction :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_n = \mathrm{I}_n + i\mathrm{J}_n &= \int_0^\pi e^{inx}\cos^n x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi \left(\frac{e^{2ix}+1}{2}\right)^n \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi \left(\frac{e^{2ix}+1}{2}\right)^{n-1} \frac{e^{2ix}}{2}\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi \left(\frac{e^{2ix}+1}{2}\right)^{n-1} \frac{\mathrm{d}x}{2} \\
&= \left[\frac{1}{2n}\left(\frac{e^{2ix}+1}{2}\right)^n\right]_0^\pi + \frac{1}{2}\mathrm{I}_{n-1} = \frac{1}{2}\mathrm{I}_{n-1}
\end{aligned}$$

On en déduit $\mathrm{A}_n = \dfrac{1}{2^n}\mathrm{A}_0$ et donc $\boxed{\mathrm{I}_n = \dfrac{\pi}{2^n} \text{ et } \mathrm{J}_n = 0.}$