Séries numériques

Définition 1 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

- On appelle série de terme général u_n, notée $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ou $\sum u_n$, la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{S}_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Vocabulaire : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

◇ S_n s'appelle la *somme partielle* de rang n.

- On dit que *la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge* lorsque la suite des sommes partielles $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Vocabulaire : Dans le cas de **convergence**,

◇ On appelle reste de rang n l'élément R_n défini par :

$$\mathrm{R}_n = \mathrm{S} - \mathrm{S}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

- Lorsque la série ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

Remarques et commentaires :

— Écrire la somme infinie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ suppose implicitement que la série converge.

— Enfin, remarquez que $\mathrm{S}_0 = u_0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1}$.

Exemple 2 : Les *séries géométriques* de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ où z est un nombre complexes sont convergentes si, et seulement si $|z| < 1$ et on a :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1-z}.}$$

Dans ce cas, $\mathrm{R}_n = \dfrac{z^{n+1}}{1-z}$.

Proposition 5 : Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries à terme positif.

(i) Si $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

(ii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.

Exercice 1 : Étudier la série de terme général $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ et donner sa limite.

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$.

La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, de même nature que $(\ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, est donc divergente vers $+\infty$.

Théorème 6 :

Si $f : [0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}_+$ est une fonction continue, positive et décroissante alors la série $\sum f(n)$ et la suite $\left(\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même nature.

Méthode 2 (Encadrement d'une aire par des sommes) :

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ continue et monotone.

Alors,

Si f est croissante : $\forall\, k \geqslant n_0$ et $t \in [k\,;k+1]$,

$$\left(\sum_{k=n_0}^{n} f(k)\right) - f(n) \leqslant \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\sum_{k=n_0}^{n} f(k)\right) - f(n_0).$$

Méthode 3 (Encadrement d'une somme par des aires) :

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ continue et monotone.

Alors,

Si f est décroissante : $\forall\, k \geqslant n_0+1$,

$$\int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Définition 2 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On appelle *série de Riemann* la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$.

Exercice 2 : Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\ln n}{n2^n}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est correctement défini et positif.

De plus, $\dfrac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée par un certain réel positif A et on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \frac{\ln n}{n2^n} \leqslant \frac{\mathrm{A}}{2^n},$$

qui est le terme d'une série géométrique convergente.

D'après les critère de comparaison, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln n}{n2^n}$ converge.

Proposition 8 : Soit $\sum u_n$ une série à *terme* strictement *positif* tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Alors,

- Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Théorème 9 (CV $\Longleftarrow$ CA) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.
Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle converge.

Exercice 3 : Sans justification, complétez le tableau avec les séries ci-dessous :

1. $\sum (-1)^n$
2. $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$
3. $\sum \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$
4. $\sum \frac{n^n}{n!}$
5. $\sum \frac{\cos(n)}{n^4}$
6. $\sum \frac{1}{\ln(n)}$
7. $\sum \frac{1}{2^n}$

Séries convergentes	Séries divergentes
2 3 5 7	1 4 6

Séries numériques

Définition 1 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

- On appelle série de terme général u_n, notée $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ou $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

  Vocabulaire : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

  ◇ u_n s'appelle le terme général de rang n.

- On dit que *la série* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *converge* lorsque la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

  Vocabulaire : Dans le cas de **convergence**,

  ◇ la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ et appelée somme de la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

- Déterminer la nature d'une série revient à se poser la question de sa convergence.

  En particulier, deux séries sont dites *de même nature* si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

Remarques et commentaires :

— Dans le cas de convergence, on peut remarquer que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} S - S_n = 0.$$

Le reste d'ordre n représente l'erreur commise lorsque l'on remplace la somme S par la $n^{\text{ème}}$ somme partielle.

Exemple 1 : Les *séries arithmétiques* de la forme $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} na$ où a est une constante sont toujours divergentes dès que $a \neq 0$.

Proposition 1 (Série télescopique) : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(u_{n+1} - u_n\right)$ sont de même nature et on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(u_{k+1} - u_k\right) = u_{n+1} - u_0.$$

Exercice 1 : Étudier la série de terme général $\dfrac{1}{k(k+1)}$ et donner sa limite.

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.
La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k(k+1)}$, de même nature que $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, est donc convergente vers $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$.

Proposition 3 : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Longleftarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge .

Proposition 5 : Soient $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries à terme positif.

(i) Si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_n \leqslant v_n \\ \text{ou} \\ u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \end{cases}$ alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge.

Méthode 2 (Encadrement d'une aire par des sommes) :
Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ continue et monotone.

Alors,

Si f est décroissante : $\forall\, k \geqslant n_0$ et $t \in [k\,;k+1]$,

$$\left(\sum_{k=n_0}^{n} f(k)\right) - f(n_0) \quad\leqslant\quad \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \quad\leqslant\quad \left(\sum_{k=n_0}^{n} f(k)\right) - f(n)\ .$$

Méthode 3 (Encadrement d'une somme par des aires) :
Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ continue et monotone.

Alors,

Si f est croissante : $\forall\, k \geqslant n_0 + 1$,

$$f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \quad\leqslant\quad \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \quad\leqslant\quad \int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 7 : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si $\alpha > 1$.

Proposition 8 : Soit $\sum u_n$ une série à *terme* strictement *positif* tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Alors,

- Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Exercice 2 : Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n^2}{(n-1)!}$.

Pour $n \geqslant 1$, u_n est correctement défini et positif.

De plus,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \times \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(n+1)^2}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série de terme général u_n converge.

Définition 4 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument si la série $\sum |u_n|$ converge.

Exercice 3 : Sans justification, complétez le tableau avec les séries ci-dessous :

1 $\sum \dfrac{1}{n}$

2 $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^3}$

3 $\sum \dfrac{n!}{n^n}$

4 $\sum \dfrac{1}{n^2 \ln(n)}$

5 $\sum \dfrac{\sin(n)}{n^4}$

6 $\sum \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

7 $\sum 2^n$

Séries convergentes	Séries divergentes
2 4 5	1 3 6 7