Nom : .... **Prénom :** ....

Séries numériques

Définition 1 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

- On appelle ...., notée .... ou ...., la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \text{................................}$$

Vocabulaire : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

◇ ..... s'appelle la *somme partielle* de rang n.

- On dit que *la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge* lorsque ....

Vocabulaire : Dans le cas de **convergence**,

◇ On appelle reste de rang n l'élément ..... défini par :

....

- Lorsque la série ne converge pas, on dit qu'elle ....

Remarques et commentaires :

— Écrire la somme infinie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ suppose ....

— Enfin, remarquez que $S_0 =$ ... et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, ... $= S_n - S_{n-1}$.

Exemple 2 : Les *séries géométriques* de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ où z est un nombre complexes sont convergentes si, et seulement si .... et on a :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\quad S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \text{.......}.}$$

Dans ce cas, $R_n =$ ....

Proposition 5 : Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries ....

(i) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, ... alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ .... $\Longrightarrow$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ....

(ii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ ....

Exercice 1 : Étudier la série de terme général $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ et donner sa limite.

....

....

....

....

....

Théorème 6 :

Si $f : [0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}_+$ est une fonction ...., ... et ....
alors .... et .... sont ....

Méthode 2 (Encadrement d'une aire par des sommes) :
Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ continue et monotone.

Alors,

Si f est croissante : $\forall k \geqslant n_0$ et $t \in [k\,;k+1]$,

$$\text{..............................} \leqslant \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \text{..............................}$$

Méthode 3 (Encadrement d'une somme par des aires) :
Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ continue et monotone.

Alors,

Si f est décroissante : $\forall k \geqslant n_0+1$,

$$\text{....................} \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leqslant \text{..............................}$$

Définition 2 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On appelle *série de Riemann* la série ....

Exercice 2 : Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\ln n}{n2^n}$.

....

....

....

....

....

....

Proposition 8 : Soit $\sum u_n$ une série *à terme* .... *positif* tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Alors,

- Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ ....
- Si ......, ...

Théorème 9 (CV .... CA) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.
Si $\sum u_n$ .... alors ....

Exercice 3 : Sans justification, complétez le tableau avec les séries ci-dessous :

1. $\sum (-1)^n$
2. $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2}$
3. $\sum \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
4. $\sum \dfrac{n^n}{n!}$
5. $\sum \dfrac{\cos(n)}{n^4}$
6. $\sum \dfrac{1}{\ln(n)}$
7. $\sum \dfrac{1}{2^n}$

Séries convergentes	Séries divergentes
....	....