Nom : .... **Prénom :** ....

Séries numériques

Définition 1 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

- On appelle ...., notée .... ou ...., la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{S}_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

  Vocabulaire : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

  - u_n s'appelle .... de rang n.

- On dit que *la série* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *converge* lorsque ....

  Vocabulaire : Dans le cas de **convergence**,

  - la limite de $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est notée .... et appelée .... :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- Déterminer la nature d'une série revient .... En particulier, deux séries sont dites *de même nature* si ....

Remarques et commentaires :

— Dans le cas de convergence, on peut remarquer que la suite $(\mathrm{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .... :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le reste d'ordre n représente ....

Exemple 1 : Les *séries arithmétiques* de la forme $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} na$ où a est une constante sont .... dès que ....

Proposition 1 (Série télescopique) : La suite .... et la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(u_{n+1} - u_n\right)$ sont .... et on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \left(u_{k+1} - u_k\right) = \ldots\ldots\ldots$$

Exercice 1 : Étudier la série de terme général $\dfrac{1}{k(k+1)}$ et donner sa limite.

....

....

....

....

....

Proposition 3 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \ldots\ldots \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge .

Proposition 5 : Soient $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries ....

(i) Si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} \ldots \leqslant \ldots \\ \text{ou} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ .... $\implies \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ ....

Méthode 2 (Encadrement d'une aire par des sommes) :
Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0\,; +\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ continue et monotone.

Alors,

Si f est décroissante : $\forall\, k \geqslant n_0$ et $t \in [k\,; k+1]$,

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \leqslant \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Méthode 3 (Encadrement d'une somme par des aires) :
Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0\,; +\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ continue et monotone.

Alors,

Si f est croissante : $\forall\, k \geqslant n_0 + 1$,

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leqslant \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Proposition 7 : $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si ....

Proposition 8 : Soit $\sum u_n$ une série *à terme* .... *positif* tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Alors,

- Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ ....
- Si ......, ...

Exercice 2 : Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n^2}{(n-1)!}$.

....

....

....

....

....

....

Définition 4 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.
On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument si ....

Exercice 3 : Sans justification, complétez le tableau avec les séries ci-dessous :

1. $\sum \dfrac{1}{n}$
2. $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^3}$
3. $\sum \dfrac{n!}{n^n}$
4. $\sum \dfrac{1}{n^2\ln(n)}$
5. $\sum \dfrac{\sin(n)}{n^4}$
6. $\sum \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$
7. $\sum 2^n$

Séries convergentes	Séries divergentes
....	....