XXX

Variables aléatoires

Contenu

Dans tout ce chapitre $(\Omega\,;\mathrm{P})$ représente un espace probabilisé fini et E désigne un ensemble quelconque.

I Variables aléatoires

I.1 Définition

Définition 1 : On appelle *variable aléatoire* sur Ω à valeurs dans E toute application $\mathbb{X}$ de Ω dans E.

$$\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathrm{E}.$$

Si $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$, on parle de *variable aléatoire réelle* raccourci en v.a.r .

Remarques :

— une *variable* aléatoire est une *fonction* !

— Comme Ω est fini, une variable aléatoire $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathrm{E}$ prend un nombre fini de valeurs.

L'ensemble de ces valeurs peut s'écrire $\mathbb{X}(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, k \in [\![1\,;n]\!]$, $x_k \in \mathrm{E}$.

Exemple 1 : On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

L'univers est $\Omega = \{7\heartsuit, 7\diamondsuit, 7\spadesuit, 7\clubsuit, 8\heartsuit, \cdots, A\heartsuit, A\diamondsuit, A\spadesuit, A\clubsuit\}$.

On gagne :

- 10 euros si la carte tirée est l'as de cœur ;
- 5 euros si la carte tirée est un autre as ;
- 2 euros si la carte tirée est un valet, une dame ou un roi ;
- -1 euro sinon. On perd donc !

On peut modéliser le gain par une variable aléatoire

$$\mathbb{X} : \begin{cases} \Omega & \longmapsto & \mathbb{R} \\ A\heartsuit & \to & 10 \\ A\diamondsuit & \to & 5 \\ \cdots & \to & \cdots \\ 7\clubsuit & \to & -1 \end{cases}$$

En particulier, $\mathbb{X}(\Omega) = \{-1, 2, 5, 10\}$ et $\mathbb{X}^{-1}(5) = \{A\diamondsuit, A\spadesuit, A\clubsuit\}$.

I.2 Image d'une variable aléatoire, Image réciproque

Définition 2 : Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire sur Ω.

- L'ensemble $\mathbb{X}(\Omega)$, image directe de Ω par $\mathbb{X}$, est appelé *support* de la variable aléatoire.

- Soit A une partie de E.

  - L'événement $\mathbb{X}^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \,/\, \mathbb{X}(\omega) \in A\}$, image réciproque de A par $\mathbb{X}$, est habituellement et abusivement noté $(\mathbb{X} \in A)$.

    Dans le cas où A est un singleton $\{x\}$ où $x \in E$, on emploie plutôt les notations $(\mathbb{X} = x)$ au lieu de $(\mathbb{X} \in \{x\})$.

  - La probabilité $P(\mathbb{X}^{-1}(A))$ de l'événement $(\mathbb{X} \in A)$ est notée $P(\mathbb{X} \in A)$, celle de $(\mathbb{X} = x)$, $P(\mathbb{X} = x)$.

    Dans le cas de v.a.r , on note $P(\mathbb{X} \leqslant x)$ au lieu de $P(\mathbb{X} \in]-\infty\,; x])$.

Exemple 2 : Dans l' exemple (1) ,

- le *support* de la variable aléatoire $\mathbb{X}$ est $\mathbb{X}(\Omega) = \{-1, 2, 5, 10\}$.
- $(X \leqslant 12)$ est l'événement certain et $(X = 7)$ est l'événement impossible.
- $(X = 5)$ désigne l'événement : $\{A\diamondsuit, A\spadesuit, A\clubsuit\}$.

  On peut aussi le lire : « Gagner 5 euros », et on a $P(\mathbb{X} = 5) = P(\{A\diamondsuit, A\spadesuit, A\clubsuit\}) = \dfrac{3}{32}$.

Exemple 3 : On lance deux fois un dé bien équilibré à 6 faces.

- L'univers de cette expérience aléatoire est l'ensemble des couples de $[\![1\,;6]\!]^2$ donc $\Omega = [\![1\,;6]\!]^2$.
- Le dé étant bien équilibré, la probabilité sur Ω est uniforme.

- On peut définir la fonction $\mathbb{S}$ sur Ω qui donne la somme des valeurs obtenues lors des deux lancers.

  $\mathbb{S}$ est une v.a.r sur Ω de support $\mathbb{S}(\Omega) = [\![2\,;12]\!]$.

  Ainsi,

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{S}: & [\![1\,;6]\!]^2 & \longrightarrow & [\![2\,;12]\!] \\ & (i\,;j) & \longmapsto & i+j \end{array}.$$

  - $(\mathbb{S}=2) = \{(1\,;1)\}$.
  - $(\mathbb{S}=3) = \{(1\,;2)\,,(2\,;1)\}$.
  - ...
  - $(\mathbb{S}=7) = \{(1\,;6)\,,(2\,;5)\,,(3\,;4)\,,(4\,;3)\,,(5\,;2)\,,(6\,;1)\}$.
  - ...
  - $(\mathbb{S}=12) = \{(6\,;6)\}$.

  On peut alors remarquer que les événements $(\mathbb{S}=k)_{2\leqslant k\leqslant 12}$ forment un système complet d'événements de Ω.

Théorème 1 : Soit $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathrm{E}$ une variable aléatoire de support $\mathbb{X}(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, k \in [\![1\,;n]\!]$, $x_k \in \mathrm{E}$.

Les événements $(\mathbb{X} = x_1)$, $(\mathbb{X} = x_2)$, ..., $(\mathbb{X} = x_n)$ forment un système complet d'événements de Ω appelé *le système complet d'événements associé à* $\mathbb{X}$.

En particulier, si on pose pour tout entier $k \in [\![1\,;n]\!]$, $p_k = \mathrm{P}(\mathbb{X} = x_k)$ alors :

$$p_k \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$$

Preuve : $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n}(\mathbb{X}=x_k) = \bigcup_{k=1}^{n}\mathbb{X}^{-1}(x_k)) = \mathbb{X}^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{n}\{x_k\}\right) = \mathbb{X}^{-1}\left(\mathbb{X}(\Omega)\right) = \Omega$ *et il est clair que* $(\mathbb{X}=x_i)\cap(\mathbb{X}=x_j) = \varnothing$ *si* $i \neq j$.

I.3 Fonction d'une variable aléatoire

Une variable aléatoire réelle est une fonction.

- On peut donc, grâce à deux variables aléatoires réelles $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$, définir leur somme $\mathbb{X}+\mathbb{Y}$, leur produit $\mathbb{X}\mathbb{Y}$, le produit par un scalaire $\lambda\mathbb{X}$ qui sont de nouvelles variables aléatoires.

  Par exemple,

Définition 3 (Somme de variables aléatoires) : Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires définies sur l'univers Ω et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- On appelle somme des variables aléatoires, notée $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$, la variable aléatoire définie sur Ω par :
$$\forall\, \omega \in \Omega,\ \mathbb{Z}(\omega) = \mathbb{X}(\omega) + \mathbb{Y}(\omega).$$
- On appelle produit des variables aléatoires, notée $\mathbb{Z} = \mathbb{X}\mathbb{Y}$, la variable aléatoire définie sur Ω par :
$$\forall\, \omega \in \Omega,\ \mathbb{Z}(\omega) = \mathbb{X}(\omega) \times \mathbb{Y}(\omega).$$
- Pour une v.a.r $\mathbb{X}$, on appelle produit par un scalaire, notée $\mathbb{Z} = \lambda\mathbb{X}$, la variable aléatoire définie sur Ω par :
$$\forall\, \omega \in \Omega,\ \mathbb{Z}(\omega) = \lambda\mathbb{X}(\omega).$$

Exemple 4 :

- On lance cinq dés équilibrés et on compte la somme des nombres obtenus.

  Soit $\mathbb{X}$ la variable aléatoire correspondant à cette somme.

  Alors, on peut écrire $\mathbb{X}$ sous la forme $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 + ... + \mathbb{X}_5$ où, pour tout $k \in [\![1\,;5]\!]$, $\mathbb{X}_k$ correspond au résultat du dé numéro k.

ATTENTION $\mathbb{X} \neq 5 \times \mathbb{X}_1$. L'ensemble des valeurs prises par $\mathbb{X}$ est $\{5; 6; 7; 8; 9; \dots; 30\}$ (somme possible des 5 dés) alors que $5 \times \mathbb{X}_1$ ne peut prendre que les valeurs 5, 10, 15, 20, 25 et 30.

- On lance 20 fois une pièce de monnaie et on note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire comptant le nombre de pile obtenu.

  On peut écrire la variable aléatoire $\mathbb{X}$ sous la forme $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 \dots + \mathbb{X}_{20}$ où, pour tout $k \in [\![1\,;20]\!]$, $\mathbb{X}_k = 1$ si on a obtenu pile au $k^{\text{ème}}$ lancer et $\mathbb{X}_k = 0$ sinon.

Exercice 1 : Lors d'une soirée au casino, Nadège décide de tester différents jeux : une fois la roulette et deux fois les machines à sous.

Elle note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire correspondant au gain total remporté.

1. Pour faciliter l'étude, elle écrit $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 + \mathbb{X}_3$.

   À quoi les variables aléatoires $\mathbb{X}_1$, $\mathbb{X}_2$ et $\mathbb{X}_3$ peuvent-elles alors correspondre ?
2. Yvann souhaite écrire $\mathbb{X}$ sous la forme $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 + 2\mathbb{X}_2$.

   A-t-il raison ? Justifier.

- On peut également composer la variable aléatoire réelle $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ par une fonction réelle $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$. On obtient alors une nouvelle variable aléatoire
$$f \circ \mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}.$$

Exemple 5 : Soit $f : x \longmapsto ax + b$ une fonction affine. Alors $f(\mathbb{X}) : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & a\omega + b \end{array}$ notée $f(\mathbb{X}) = a\mathbb{X} + b$.

ATTENTION Cette variable aléatoire est généralement notée $f(\mathbb{X})$ mais il faudra bien comprendre $f \circ \mathbb{X}$.

I.4 Loi d'une variable aléatoire

Une variable $\mathbb{X}$ aléatoire étant donnée, on cherche à déterminer la probabilité d'obtenir un élément de $\mathbb{X}(\Omega)$.

Dans l' exemple (1) :

x	-1	2	5	10
$P(\mathbb{X}=x)$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{3}{32}$	$\dfrac{1}{32}$

Mais on peut aussi définir $P(\mathbb{X} \in \{2,5,10\}) = \dfrac{1}{2}$.

La loi de probabilité de $\mathbb{X}$, notée $P_{\mathbb{X}}$ associe à toute partie A de $\mathbb{X}(\Omega)$ la probabilité $P(\mathbb{X} \in A)$.

Définition 4 : Soit $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto E$ une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini (Ω, P).

On appelle *loi de probabilité* de $\mathbb{X}$, notée $P_{\mathbb{X}}$, l'application

$$P_{\mathbb{X}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{X}(\Omega) & \longrightarrow & [0\,;1] \\ x & \longmapsto & P(\mathbb{X}=x). \end{array}$$

Exercice 2 : Un sac contient 6 jetons : deux numérotés 1, trois numérotés 2 et un numéroté 3. Chaque jeton apparaît avec la même probabilité. On tire simultanément trois jetons. On note $\mathbb{X}$ la somme des numéros portés sur les trois jetons.

Déterminer la loi de $\mathbb{X}$.

Proposition 2 : Soit $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto E$ une variable aléatoire de loi de probabilité $P_{\mathbb{X}}$.

L'application $P_{\mathbb{X}}$ définit une probabilité sur Ω et on a :

$$\forall\, A \in \mathcal{P}(\mathbb{X}(\Omega)),\ P(\mathbb{X} \in A) = \sum_{\substack{x \in \mathbb{X}(\Omega) \\ x \in A}} P(\mathbb{X}=x) = \sum_{\substack{x \in \mathbb{X}(\Omega) \\ x \in A}} P_{\mathbb{X}}(x).$$

Preuve : Le théorème (1) assure déjà que $P_{\mathbb{X}}$ est une probabilité. Faisons comme si nous ne l'avions pas vu et montrons-le directement :

- On a bien $\forall\, A \subset \mathbb{X}(\Omega)$, $\quad P_{\mathbb{X}}(A) \in [0\,;1]$ puisque $P_{\mathbb{X}}(A) = P(\mathbb{X} \in A)$.
- $P_{\mathbb{X}}(\mathbb{X}(\Omega)) = P(\mathbb{X} \in \mathbb{X}(\Omega)) = P(\Omega) = 1$
- Soient A, B sont deux parties disjointes de $\mathbb{X}(\Omega)$. On a $P_{\mathbb{X}}(A \cup B) = P(\mathbb{X} \in A \cup B)$.

  Or, $(\mathbb{X} \in A \cup B) = \mathbb{X}^{-1}(A \cup B) = \mathbb{X}^{-1}(A) \cup \mathbb{X}^{-1}(B)$.

  De plus, $\mathbb{X}^{-1}(A) \cap \mathbb{X}^{-1}(B) = \mathbb{X}^{-1}(A \cap B) = \mathbb{X}^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ entraîne que les événements $\mathbb{X}^{-1}(A)$ et $\mathbb{X}^{-1}(B)$ sont incompatibles.

On a alors :

$$\begin{aligned}
P_{\mathbb{X}}(A \cup B) &= P(\mathbb{X} \in A \cup B) \\
&= P(\mathbb{X}^{-1}(A) \cup \mathbb{X}^{-1}(B)) \\
&= P(\mathbb{X}^{-1}(A)) + P(\mathbb{X}^{-1}(B)) \\
&= P(\mathbb{X} \in A) + P(\mathbb{X} \in B) \\
&= P_{\mathbb{X}}(A) + P_{\mathbb{X}}(B)
\end{aligned}$$

En conclusion, $P_{\mathbb{X}}$ est bien une probabilité.

Exemple 6 : Reprenons l' exemple (3)

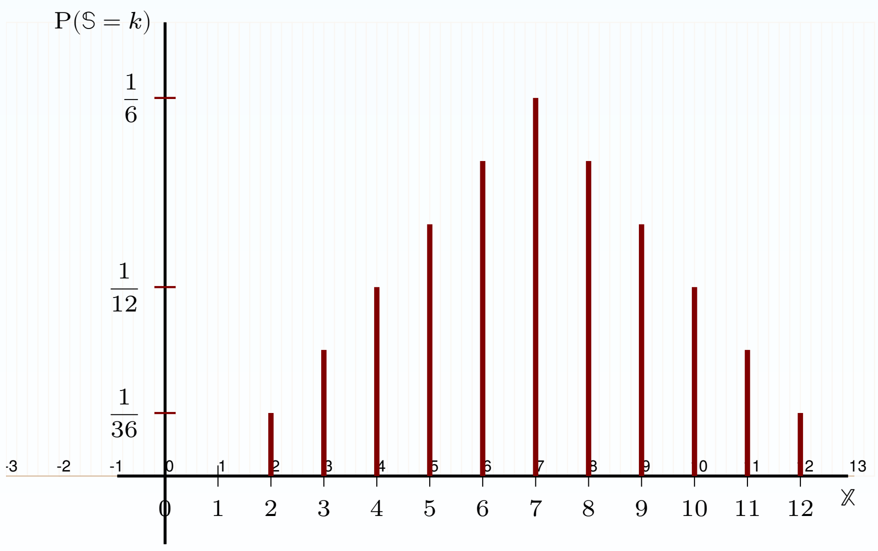
- $P(\mathbb{S} = 2) = \dfrac{\text{card}\,(\mathbb{S} = 2)}{\text{card}\,(\Omega)} = \dfrac{1}{36}$.
- $P(\mathbb{S} = 3) = \dfrac{\text{card}\,(\mathbb{S} = 3)}{\text{card}\,(\Omega)} = \dfrac{1}{18}$.
- ...
- $P(\mathbb{S} = 7) = \dfrac{\text{card}\,(\mathbb{S} = 7)}{\text{card}\,(\Omega)} = \dfrac{1}{6}$.
- ...
- $P(\mathbb{S} = 12) = \dfrac{\text{card}\,(\mathbb{S} = 12)}{\text{card}\,(\Omega)} = \dfrac{1}{36}$.

L'application $P_{\mathbb{S}} : \begin{array}{rcl} [\![2\,;12]\!] & \longrightarrow & [0\,;1] \\ k & \longmapsto & P(\mathbb{S} = k) \end{array}$ est la loi de probabilité de $\mathbb{S}$.

On peut regrouper les résultats dans un tableau :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(\mathbb{S} = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

On peut aussi représenter la loi de $\mathbb{S}$ par un diagramme en bâtons :



Pour toute partie A de $\mathbb{S}(\Omega) = [\![2\,;12]\!]$, on peut alors calculer la probabilité de l'événement $(\mathbb{S} \in A)$.

Par exemple, $P(\mathbb{S} \in \{4, 6, 11\}) = P(\mathbb{S} = 4) + P(\mathbb{S} = 6) + P(\mathbb{S} = 11)$

$$= P_{\mathbb{S}}(4) + P_{\mathbb{S}}(6) + P_{\mathbb{S}}(11) = \frac{1}{12} + \frac{5}{36} + \frac{1}{18} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

II Espérance d'une variable aléatoire réelle

II.1 Définition

Définition 5 : Soit $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle** de support $\mathbb{X}(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_p\}$ où $p \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, k \in [\![1\,;p]\!]$, $x_k \in \mathbb{R}$.

- On appelle *espérance* de $\mathbb{X}$, notée $\mathrm{E}(\mathbb{X})$, le réel définit par :

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^{p} x_i \mathrm{P}(\mathbb{X} = x_i) = \sum_{x \in \mathbb{X}(\Omega)} x\mathrm{P}(\mathbb{X} = x).$$

- On dit que $\mathbb{X}$ est une *variable centrée* si $\mathrm{E}(\mathbb{X}) = 0$.

Remarques :

1. Dans les démonstrations et les résultats plus théoriques, on reviendra souvent à

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{X}(\omega)\mathrm{P}(\{\omega\}).$$

2. L'espérance correspond à la moyenne des valeurs prises par $\mathbb{X}$, pondérée par leur probabilité. C'est donc un indicateur de position.

Exemple 7 : Reprenons l'exemple l' exemple (1)

x	-1	2	5	10
$\mathrm{P}(\mathbb{X} = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

L'espérance de $\mathbb{X}$ est $\mathrm{E}(\mathbb{X}) = (-1) \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{8} + 5 \times \frac{3}{32} + 10 \times \frac{1}{32} = \frac{33}{32} \simeq 1,03$ euros .

C'est la somme qu'on peut espérer gagner par partie en moyenne, en jouant de nombreuses fois.

Exemple 8 : Et si nous reprenons l' exemple (3) ,

$$\mathrm{E}(\mathbb{S}) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{1}{12} + 4 \times \frac{1}{12} + \ldots + 11 \times \frac{1}{18} + 12 \times \frac{1}{36} = 7.$$

II.2 Linéarité

Proposition 3 : Soient $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ et $\mathbb{Y} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles sur Ω fini.

Linéarité : $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{E}(\alpha\mathbb{X} + \beta\mathbb{Y}) = \alpha\mathrm{E}(\mathbb{X}) + \beta\mathrm{E}(\mathbb{Y})$.

En particulier, $\mathrm{E}(\alpha\mathbb{X} + \beta) = \alpha\mathrm{E}(\mathbb{X}) + \beta$

Positivité : Si $\mathbb{X} \geqslant 0$, alors $\mathrm{E}(\mathbb{X}) \geqslant 0$.

Croissance : Si $\mathbb{X} \leqslant \mathbb{Y}$, alors $\mathrm{E}(\mathbb{X}) \leqslant \mathrm{E}(\mathbb{Y})$.

Inégalité triangulaire : $|\mathrm{E}(\mathbb{X})| \leqslant \mathrm{E}(|\mathbb{X}|)$.

ATTENTION La notation $\mathbb{X} \geqslant 0$ est un tantinet abusive et signifie que la fonction $\mathbb{X}$ prend des valeurs positives sur Ω *i.e.* $\forall\, \omega \in \Omega,\ \mathbb{X}(\omega) \geqslant 0$.

De même $\mathbb{X} \leqslant \mathbb{Y} \iff \forall\, \omega \in \Omega,\ \mathbb{X}(\omega) \leqslant \mathbb{Y}(\omega)$.

Preuve :

Linéarité : Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\alpha\mathbb{X} + \beta\mathbb{Y}) &= \sum_{\omega\in\Omega} \mathrm{P}(\{\omega\})(\alpha\mathbb{X} + \beta\mathbb{Y})(\omega) \\
&= \sum_{\omega\in\Omega} \mathrm{P}(\{\omega\})(\alpha\mathbb{X}(\omega) + \beta\mathbb{Y}(\omega)) \\
&= \alpha \sum_{\omega\in\Omega} \mathrm{P}(\{\omega\})\mathbb{X}(\omega) + \beta \sum_{\omega\in\Omega} \mathrm{P}(\{\omega\})\mathbb{Y}(\omega) \\
&= \alpha\mathrm{E}(\mathbb{X}) + \beta\mathrm{E}(\mathbb{Y}).
\end{aligned}$$

Positivité : Si $\mathbb{X} \geqslant 0$, alors $\mathrm{E}(\mathbb{X})$ est une somme de nombres positifs donc ...

Croissance : $\mathbb{X} \leqslant \mathbb{Y} \iff \mathbb{Y} - \mathbb{X} \geqslant 0 \implies \mathrm{E}(\mathbb{Y} - \mathbb{X}) \geqslant 0$
$\implies \mathrm{E}(\mathbb{Y}) + \mathrm{E}(-\mathbb{X}) \geqslant 0 \implies \mathrm{E}(\mathbb{Y}) - \mathrm{E}(\mathbb{X}) \geqslant 0.$

Tout avait déjà été fait dans les points précédents.

Inégalité triangulaire : Par définition, de la valeur absolue, $\forall\, \omega \in \Omega,\ -|\mathbb{X}(\omega)| \leqslant \mathbb{X}(\omega) \leqslant |\mathbb{X}(\omega)|$.

Par croissance et linéarité de l'espérance, on a donc :

$$-\mathrm{E}(|\mathbb{X}|) \leqslant \mathrm{E}(\mathbb{X}) \leqslant \mathrm{E}(|\mathbb{X}|).$$

Exercice 3 : Un forain a construit un appareil de jeu contenant six boules blanches et trois boules rouges. Lorsqu'on introduit un jeton dans l'appareil, trois boules prises au hasard tombent dans un panier. Si les trois boules sont rouges, le joueur gagne 100 €; si deux des boules sont rouges, il gagne 15€, si une seule est rouge, il gagne un lot de 5 €. Le prix du jeton est fixé à 8 €.

1. Soit $\mathbb{X}$ la variable aléatoire désignant la somme gagnée par le joueur.

   Déterminer la loi de $\mathbb{X}$, et calculer son espérance. En déduire le gain moyen du forain.
2. L'appareil ne s'avérant pas suffisamment rentable, le forain envisage deux solutions : augmenter de 1 euro le pris du jeton ou bien ajouter une boule blanche dans l'urne. Quelle est la solution la plus rentable pour le forain ?

II.3 Formule de transfert

Théorème 4 : Soit $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle** de support $\mathbb{X}(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_p\}$ où $p \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, k \in [\![1\,;p]\!]$, $x_k \in \mathbb{R}$.

Soit $f : \mathbb{X}(\Omega) \longmapsto \mathbb{R}$ une application à valeurs réelles définie sur $\mathbb{X}(\Omega)$.

Alors :

$$\mathrm{E}(f(\mathbb{X})) = \mathrm{E}(f \circ \mathbb{X}) = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{P}(\mathbb{X} = x_k) f(x_k).$$

Preuve : Par définition, $\mathrm{E}(f(\mathbb{X})) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathrm{P}(\{\omega\}) f(\mathbb{X}(\omega))$.

On regroupe les ω tels que $\mathbb{X}(\omega) = x_i$ en posant $\Omega_i = \{\omega \,/\, \mathbb{X}(\omega) = x_i\}$. Les Ω_i forment alors un système complet d'événements de Ω et on a $\mathrm{P}(\mathbb{X} = x_i) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{\omega \in \Omega_i} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in \Omega_i} \mathrm{P}(\{\omega\})$.

$$\mathrm{E}(f(\mathbb{X})) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathrm{P}(\{\omega\})(f \circ \mathbb{X})(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathrm{P}(\{\omega\}) f(\mathbb{X}(\omega))$$

Or, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{p} \Omega_i$ (réunion d'événements disjoints)

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{\omega \in \Omega_i} \mathrm{P}(\{\omega\}) f(\mathbb{X}(\omega)) \right) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{\omega \in \Omega_i} \mathrm{P}(\{\omega\}) f(x_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(f(x_i) \sum_{\omega \in \Omega_i} \mathrm{P}(\{\omega\}) \right) = \sum_{i=1}^{p} f(x_i) \mathrm{P}(\Omega_i) \\ &= \sum_{i=1}^{p} f(x_i) \mathrm{P}(\mathbb{X} = x_i). \end{aligned}$$

Exemple 9 : On reprend l' exemple (3) où $\mathbb{S}$ est la variable aléatoire qui donne la somme des valeurs obtenues lors des deux lancers.

Par exemple, on a alors :

$$\mathrm{E}(\mathbb{S}^2) = \sum_{i=2}^{12} s^2 \times \mathrm{P}(\mathbb{S} = s) = 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{1}{18} + \ldots + 12^2 \times \frac{1}{36} = \frac{329}{6}.$$

III Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

III.1 Définitions

Définition 6 (Variance) : Soit $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

On appelle *variance* de $\mathbb{X}$, notée $\mathrm{V}(\mathbb{X})$, le réel :

$$\mathrm{V}(\mathbb{X}) = \mathrm{E}\Big((\mathbb{X} - \mathrm{E}(\mathbb{X}))^2\Big).$$

Proposition 5 (Formule de König-Huygens) : Soit $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

Alors :

$$\mathrm{V}(\mathbb{X}) = \mathrm{E}(\mathbb{X}^2) - \mathrm{E}(\mathbb{X})^2.$$

Preuve : Posons $m = \mathrm{E}(\mathbb{X})$.

Comme $(\mathbb{X}-m)^2 = \mathbb{X}^2 - 2m\mathbb{X} + m^2$, alors

$$\mathrm{E}((\mathbb{X}-m)^2) = \mathrm{E}(\mathbb{X}^2 - 2m\mathbb{X} + m^2) = \mathrm{E}(\mathbb{X}^2) - 2m\mathrm{E}(\mathbb{X}) + m^2 = \mathrm{E}(\mathbb{X}^2) - m^2.$$

Proposition 6 : $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\quad \mathrm{V}(\alpha\mathbb{X}+\beta) = \alpha^2\mathrm{V}(\mathbb{X}).$

Preuve : Une fois n'est pas coutume, il suffit de développer :

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\alpha\mathbb{X}+\beta) &= \mathrm{E}\Big(\big(\alpha\mathbb{X}+\beta-\mathrm{E}(\alpha\mathbb{X}+\beta)\big)^2\Big)\\
&= \mathrm{E}\Big(\big(\alpha\mathbb{X}+\cancel{\beta}-\alpha\mathrm{E}(\mathbb{X})-\cancel{\beta}\big)^2\Big)\\
&= \mathrm{E}(\alpha^2(\mathbb{X}-\mathrm{E}(\mathbb{X}))^2)\\
&= \alpha^2\mathrm{E}((\mathbb{X}-\mathrm{E}(\mathbb{X}))^2)\\
&= \alpha^2\mathrm{V}(\mathbb{X}).
\end{aligned}$$

Comme $(\mathbb{X}-m)^2 \geqslant 0$, la variance $\mathrm{V}(\mathbb{X}) = \mathrm{E}((\mathbb{X}-m)^2)$ est positive. Ce qui permet la définition suivante :

Définition 7 (Écart-type) : Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire réelle.

On appelle *écart-type* de $\mathbb{X}$, noté $\sigma(\mathbb{X})$, le réel :

$$\sigma(\mathbb{X}) = \sqrt{\mathrm{V}(\mathbb{X})}.$$

Remarque : Une v.a.r $\mathbb{Z} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ est dite *centrée* si $\mathrm{E}(\mathbb{Z}) = 0$ et *réduite* si $\sigma(\mathbb{Z}) = 1$.

Par exemple, si $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ est une v.a.r telle que $\sigma(\mathbb{X}) > 0$ alors $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{X}-\mathrm{E}(\mathbb{X})}{\sigma(\mathbb{X})}$ est centrée réduite

III.2 Inégalité de Markov et Bienaymé-Tchebychev

Théorème 7 (Inégalité de Markov [1]) : Soit $\mathbb{Z} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle **positive**.

Alors :

$$\forall\, a > 0,\ \mathrm{P}(\mathbb{Z} \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{E}(\mathbb{Z})}{a}.$$

Preuve : Soient $\mathbb{Z} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle positive et $a > 0$.

$$\mathrm{E}(\mathbb{Z}) = \sum_{z\in\mathbb{Z}(\Omega)} z\mathrm{P}(\mathbb{Z}=z) = \sum_{\substack{z\in\mathbb{Z}(\Omega)\\ z\geqslant a}} z\mathrm{P}(\mathbb{Z}=z) + \sum_{\substack{z\in\mathbb{Z}(\Omega)\\ z<a}} z\mathrm{P}(\mathbb{Z}=z).$$

Or, $\mathbb{Z}$ est positive i.e. $\forall\, z \in \mathbb{Z}(\Omega),\ z \geqslant 0$.

Donc, $\displaystyle\sum_{\substack{z\in\mathbb{Z}(\Omega)\\ z<a}} z\mathrm{P}(\mathbb{Z}=z) \geqslant 0.$

Ainsi, $\mathrm{E}(\mathbb{Z}) \geqslant \displaystyle\sum_{\substack{z\in\mathbb{Z}(\Omega)\\ z\geqslant a}} z\mathrm{P}(\mathbb{Z}=z) \geqslant \sum_{\substack{z\in\mathbb{Z}(\Omega)\\ z\geqslant a}} a\mathrm{P}(\mathbb{Z}=z) = a \underbrace{\sum_{\substack{z\in\mathbb{Z}(\Omega)\\ z\geqslant a}} \mathrm{P}(\mathbb{Z}=z)}_{\mathrm{P}(\mathbb{Z}\geqslant a)} \geqslant a\mathrm{P}(\mathbb{Z}\geqslant a)$.

D'où le résultat en divisant les deux membres par $a > 0$.

L'inégalité de Markov donne une majoration de la probabilité qu'une variable aléatoire réelle à valeurs positives soit supérieure ou égale à une constante positive.

Théorème 8 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) : Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire réelle d'espérance m et d'écart-type σ.

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \mathrm{P}(|\mathbb{X}-m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Preuve : Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire réelle d'espérance m et de variance $\mathrm{V}(\mathbb{X}) = \sigma^2$.

Soit $\varepsilon > 0$. On pose très naturellement $\mathbb{Z} = (\mathbb{X}-m)^2$ qui est une var positive et $a = \varepsilon^2$.

D'après le théorème (7),

$$\mathrm{P}(\mathbb{Z} \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{E}(\mathbb{Z})}{a} \iff \mathrm{P}\Big((\mathbb{X}-m)^2 \geqslant \varepsilon^2\Big) \leqslant \frac{\mathrm{E}\Big((\mathbb{X}-m)^2\Big)}{\varepsilon^2}.$$

Or, $(\mathbb{X}-m)^2 \geqslant \varepsilon^2 \iff |\mathbb{X}-m| \geqslant \varepsilon$ et, $\mathrm{E}\Big((\mathbb{X}-m)^2\Big) = \mathrm{V}(\mathbb{X}) = \sigma^2$ par définition.

Donc, en remplaçant,

$$\mathrm{P}(|\mathbb{X}-m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Remarque : Cette formule fournit un majorant de l'erreur quand on estime que $\mathbb{X} \in]m-\varepsilon, m+\varepsilon[$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathrm{P}(|\mathbb{X}-m| \geqslant \varepsilon)$ est la probabilité pour que $\mathbb{X}$ prenne des valeurs éloignées de $\mathrm{E}(\mathbb{X})$ d'au moins ε. Cette probabilité est faible dès que $\mathrm{V}(\mathbb{X})$ est petit et que ε est grand.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev vise donc à montrer que la variable aléatoire $\mathbb{X}$ prend des valeurs proches de $\mathrm{E}(\mathbb{X})$ avec une grande probabilité, mais elle donne, en général une majoration assez grossière.

[1]. Andreï Andreïevitch Markov (**1856-1922**) est un mathématicien russe.
Il est considéré comme le fondateur de la théorie des *processus stochastiques*.

Un peu d'histoire : *En 1874, il entra à la faculté de physique et de mathématiques de l'université impériale de Saint-Pétersbourg. Il participa au séminaire dirigé par Korkine et Zolotarev, et assista à des conférences de Tchebychev, le directeur du département de mathématiques. Celles-ci étaient particulièrement stimulantes pour Markov, car Tchebychev encourageait souvent une atmosphère de recherche en posant de nouvelles questions et problèmes pour que ses étudiants y réfléchissent.*

IV Lois usuelles

IV.1 Loi uniforme

Définition 8 : Soient $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle** et $A = \{x_1, \cdots, x_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, k \in [\![1\,;n]\!]$, $x_k \in \mathbb{R}$, un sous-ensemble fini non vide de $\mathbb{R}$.

On dit que $\mathbb{X}$ suit la *loi uniforme sur* A et on note $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{U}(A)$ lorsque :

- $\mathbb{X}(\Omega) = A$.
- $\forall\, k \in [\![1\,;n]\!]\,, \quad P(\mathbb{X} = x_k) = \dfrac{1}{n}$.

Remarques :

— C'est en fait la loi d'équiprobabilité sur A.

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(\mathbb{X} = x)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\frac{1}{n}$

— On retrouve souvent dans les exercices la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$:

x	1	2	$\cdots$	n
$P(\mathbb{X} = x)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\frac{1}{n}$

Par exemple, le résultat d'un lancer de dé supposé honnête suit la loi $\mathcal{U}([\![1, 6]\!])$.

Proposition 9 : Si $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ alors :

$$E(\mathbb{X}) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad V(\mathbb{X}) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Preuve :

$$E(\mathbb{X}) = \frac{1}{n} \times 1 + \frac{1}{n} \times 2 + \cdots + \frac{1}{n} \times n = \frac{1}{n}(1 + 2 + \cdots + n) = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Et,

$$\begin{aligned} V(\mathbb{X}) &= E(\mathbb{X}^2) - E(\mathbb{X})^2 \\ &= \left(\frac{1}{n} \times 1^2 + \frac{1}{n} \times 2^2 + \cdots + \frac{1}{n} \times n^2\right) - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{n^2-1}{12} \end{aligned}$$

IV.2 Loi de Bernoulli

Définition 9 : Soient $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle** et $p \in [0\,;1]$.

On dit que $\mathbb{X}$ suit la *loi de Bernoulli de paramètre* p et on note $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$ lorsque :

- $\mathbb{X}(\Omega) = \{0, 1\}$
- $\mathrm{P}(\mathbb{X} = 1) = p$ et $\mathrm{P}(\mathbb{X} = 0) = 1 - p$.

On pose souvent $q = 1 - p$.

Remarques :

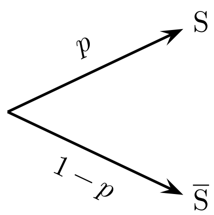
— En résumé :

x	0	1
$\mathrm{P}(\mathbb{X} = x)$	$1-p$	p

— Cette loi modélise le succès ($\mathbb{X} = 1$) ou l'échec ($\mathbb{X} = 0$) à une expérience aléatoire donnée. p est la probabilité de succès.

On dira donc qu'une expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli lorsq'elle admet seulement deux issues possibles, moralement appelées échec et succès.

— L'arbre correspondant s'appelle une *épreuve de Bernoulli.*



Exemple 10 :

- Le jeu du pile ou face : On considère par exemple comme succès « obtenir pile » et comme échec « obtenir face ».
$$p = \frac{1}{2}.$$
- On lance un dé et on considère par exemple comme succès « obtenir un six » et comme échec « ne pas obtenir un six ».
$$p = \frac{1}{6}.$$
- Interroger une personne dans la rue et lui demander si elle est gauchère est une épreuve de Bernoulli de succès S « la personne est gauchère ».
$$p \simeq 0,13.$$

Proposition 10 : Si $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$ alors :

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = p \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(\mathbb{X}) = p(1-p).$$

Preuve : Il suffit d'appliquer simplement la définition :

– $\mathrm{E}(\mathbb{X}) = 1 \times \mathrm{P}(\mathbb{X}=1) + 0 \times \mathrm{P}(\mathbb{X}=0)$
$= 1 \times p + 0 \times (1-p)$
$= p.$

– $\mathrm{V}(\mathbb{X}) = \mathrm{P}(\mathbb{X}=1)(1-\mathrm{E}(\mathbb{X}))^2 + \mathrm{P}(\mathbb{X}=0) \times (0-\mathrm{E}(\mathbb{X}))^2$
$= p \times (1-p)^2 + (1-p) \times p^2$
$= p(1-p)((1-\cancel{p}) + \cancel{p})$
$= p(1-p).$

IV.3 Loi binomiale

Définition 10 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle *schéma de Bernoulli* (d'ordre n) toute répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

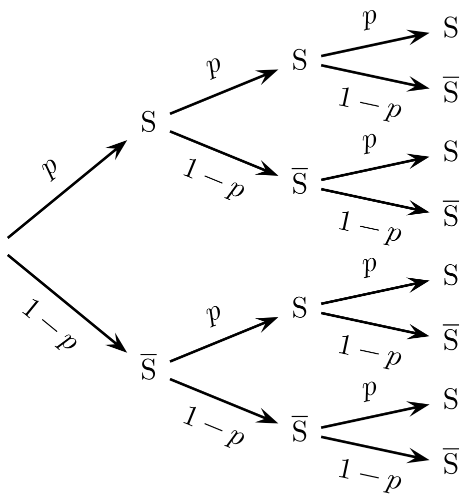


Figure XXX.1 – Schéma de Bernoulli d'ordre 3.

Exemple 11 :

- Soit n un entier naturel non nul.

  Répéter n fois chacune des expériences de l' exemple (10) est un schéma de Bernoulli (d'ordre n).
- On peut aussi considérer une urne opaque dans laquelle ont été placées une boule verte et deux boules bleues, toutes indiscernables au toucher.
  1. On prélève alors une boule dans cette urne, on note sa couleur, puis on remet la boule dans l'urne.
  2. On répète ainsi dix fois l'expérience et on s'intéresse aux boules bleues obtenues.
  3. Chaque tirage est une épreuve de Bernoulli de succès S : « La boule est bleue » dont la probabilité est $p = \dfrac{2}{3}$.
  4. Comme les dix tirages se font avec remise, les tirages sont identiques et indépendants : on a bien un schéma de Bernoulli (d'ordre $n = 10$).

La variable aléatoire $\mathbb{X}$ comptant les succès peut prendre toutes les valeurs entre 0 et n donc $\mathbb{X}(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$.

Soit $k \in [\![0\,;n]\!]$. L'événement $(\mathbb{X} = k)$ est réalisé si on obtient exactement k succès et $n-k$ échecs. La probabilité de chacune de ces branches est $p^k q^{n-k}$.

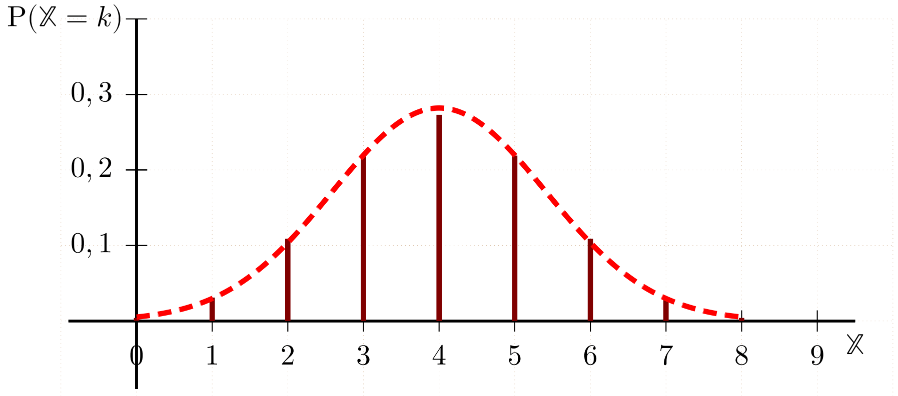
Enfin, lors de ces n épreuves, il y autant de manières d'obtenir k succès (et donc $n-k$ échecs) que d'anagrammes d'un mot de n lettres contenant k lettres S (pour succès) et $n-k$ lettres E (pour échec) *i.e.* $\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dbinom{n}{k}$.

Finalement, $\forall\, k \in [\![0\,;n]\!]$, $\mathrm{P}(\mathbb{X} = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Définition 11 : Soient $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle**, $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et $p \in [0\,;1]$.

On dit que $\mathbb{X}$ suit la *loi binomiale de paramètres n et p* et on note $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$ lorsque :

- $\mathbb{X}(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$.
- $\forall\, k \in [\![0\,;n]\!]$, $\mathrm{P}(\mathbb{X} = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.



$$\mathrm{P}(\mathbb{X} = k) = \binom{8}{k} 0,5^k 0,5^{8-k} = \binom{8}{k} 0,5^8.$$

$\mathbb{X}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathrm{P}(\mathbb{X} = k)$	0,004	0,031	0,109	0,219	0,273	0,219	0,109	0,031	0,004

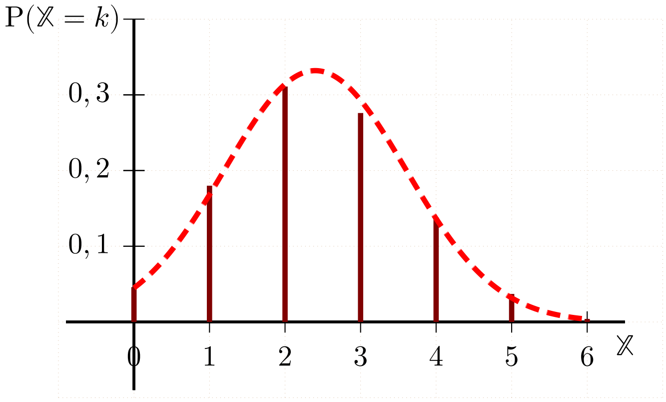
Figure XXX.2 – Représentation (symétrique) de $\mathcal{B}(8;\, 0,5)$.

Remarque : On peut vérifier que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(\mathbb{X} = k) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= [p + (1-p)]^n \\ &= 1.\end{aligned}$$

Exemple 12 (Classique) : Une urne contient des boules blanches et noires avec une proportion p de boules blanches.

On pioche n boules avec remise et on note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches tirées après les n tirages.



$$\mathrm{P}(\mathbb{X}=k)=\binom{6}{k}0,4^k 0,6^{6-k}.$$

$\mathbb{X}$	0	1	2	3	4	5	6
$\mathrm{P}(\mathbb{X}=k)$	0,046	0,187	0,311	0,276	0,138	0,037	0,004

Figure XXX.3 – Représentation (asymétrique) de $\mathcal{B}(6;\, 0,4)$.

$\mathbb{X}$ suit une loi $\mathcal{B}(n,p)$.

Exercice 4 : Une personne sur 1500 est daltonienne. Combien de personnes doit-on choisir pour être sûr à 95% d'avoir au moins un daltonien ?

Proposition 11 : Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. Alors,
$$\mathrm{E}(\mathbb{X})=np.$$

Preuve : *Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre n et p.*

Calcul direct :

$$\mathrm{E}(\mathbb{X})=\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{P}(\mathbb{X}=k)=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

D'après la formule du « capitaine »,

$$=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}$$

Un petit changement de variable sur les indices,

$$=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}$$

On factorise par p,

$$=np\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k}$$

Enfin, on reconnaît le développement de $(p+(1-p))^{n-1} = 1^{n-1} = 1$:

Donc, $\mathrm{E}(\mathbb{X}) = np$.

$\mathbb{X}$ **vue comme une somme de v.a.r** : Appelons $\mathbb{X}_1$, $\mathbb{X}_2$, ..., $\mathbb{X}_n$ les variables aléatoires associées à chacune des épreuves de Bernoulli.

D'après la proposition (3), on a :

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \mathrm{E}(\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 + \ldots + \mathbb{X}_n) = \mathrm{E}(\mathbb{X}_1) + \mathrm{E}(\mathbb{X}_2) + \ldots + \mathrm{E}(\mathbb{X}_n) = p + p + \ldots + p = np.$$

Exercice 5 : On considère qu'à un concours, un candidat a 20% de chances de réussir. On prend un groupe de 25 candidats au hasard.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins un candidat réussisse ?
2. Quelle est la probabilité qu'au plus deux candidats réussissent ?
3. Quelle est la probabilité que dix candidats réussissent ?
4. Calculer le nombre moyen de candidats qui réussissent sur 25 qui passent le concours.

V COUPLE DE VARIABLES ALÉATOIRES

Introduction

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.

- On en tire une et on note son numéro $\mathbb{X}$.
- On retire alors toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à $\mathbb{X}$.
- On tire une nouvelle boule dont le numéro est $\mathbb{Y}$.

Le support de chacune de ces variables aléatoires réelles est $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{Y}(\Omega) = [\![1\,;6]\!]$. Ω désignant l'ensemble des tirages sans remise de l'urne.

Ω est donc l'ensemble des 2-arrangements de l'ensemble formé des 6 boules de l'urne.

Le couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est une nouvelle variable aléatoire de support $[\![1\,;6]\!] \times [\![1\,;6]\!]$.

On veut déterminer la loi de $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Cela revient à chercher, pour tout couple $(i\,;j) \in [\![1\,;6]\!]^2$,

$$\mathrm{P}\big((\mathbb{X} = i) \cap (\mathrm{Y} = j)\big).$$

Or, $\mathrm{P}\big((\mathbb{X} = i) \cap (\mathbb{Y} = j)\big) = \mathrm{P}(\mathbb{X} = i) \times \mathrm{P}_{(\mathbb{X}=i)}(\mathbb{Y} = j) = \begin{cases} \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{i} & \text{si } j \leqslant i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$.

$\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}$	1	2	3	4	5	6	Total
1	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	0	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
Total	$\frac{49}{120}$	$\frac{29}{120}$	$\frac{19}{120}$	$\frac{37}{360}$	$\frac{11}{180}$	$\frac{1}{36}$	1

Commentaires :

— Ce tableau donne la loi, dite *conjointe*, du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

— Les marges (obtenues en sommant les valeurs) comportent les lois de $\mathbb{X}$ et de $\mathbb{Y}$. On les appellera donc les lois *marginales*.

V.1 Lois conjointe et marginale

Définition 12 : Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires définies sur un univers fini Ω à valeurs, respectivement, dans des ensembles E et F quelconques.

- Le couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est également une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$.
- La loi de probabilité du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est appelée *loi conjointe* de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.
- Les lois de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont appelées *lois marginales* du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Proposition 12 (Lois marginales et loi conjointe) : Soient $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathrm{E}$ et $\mathbb{Y} : \Omega \longmapsto \mathrm{F}$ deux variables aléatoires sur des ensembles E et F quelconques.

$$\forall\, x \in \mathbb{X}(\Omega), \quad \mathrm{P}(\mathbb{X} = x) = \sum_{y \in \mathbb{Y}(\Omega)} \mathrm{P}\big((\mathbb{X} = x) \cap (\mathbb{Y} = y)\big).$$

$$\forall\, y \in \mathbb{Y}(\Omega), \quad \mathrm{P}(\mathbb{Y} = y) = \sum_{x \in \mathbb{X}(\Omega)} \mathrm{P}\big((\mathbb{X} = x) \cap (\mathbb{Y} = y)\big).$$

Moralité : Si on connaît la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, on peut déterminer les lois marginales.

Remarque : En revanche, la réciproque est fausse : si on connaît les lois marginales, on ne peut déterminer la loi conjointe.

Preuve : Soit $\mathbb{X} : \Omega \longmapsto \mathrm{E}$ une va où E est un ensemble quelconque.

Soit $\mathbb{Y} : \Omega \longmapsto \mathrm{F}$ une va de support $\mathbb{Y}(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et, $\forall\, k \in [\![1\,;n]\!]$, $y_k \in \mathrm{F}$.

$\forall\, y \in \mathbb{Y}(\Omega)$, les événements $(\mathbb{Y} = y)$ forment un système complet d'événements de Ω.

$\forall x \in \mathbb{X}(\Omega)$, on peut écrire

$$(\mathbb{X}=x) = (\mathbb{X}=x)\cap\Omega = (\mathbb{X}=x)\cap\Big(\bigcup_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)}(\mathbb{Y}=y)\Big) = \bigcup_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)}\Big((\mathbb{X}=x)\cap(\mathbb{Y}=y)\Big).$$

Comme les événements $(\mathbb{X}=x)\cap(\mathbb{Y}=y)$ sont deux à deux disjoints, on a alors :

$$\mathrm{P}(\mathbb{X}=x) = \mathrm{P}\Big(\bigcup_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)}\Big((\mathbb{X}=x)\cap(\mathbb{Y}=y)\Big)\Big) = \sum_{y\in\mathbb{Y}(\Omega)}\mathrm{P}((\mathbb{X}=x)\cap(\mathbb{Y}=y)).$$

Le raisonnement est identique pour $\mathrm{P}(\mathbb{Y}=y)$.

On représente souvent la loi de $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ sous la forme d'un tableau à deux entrées donnant $\mathrm{P}((\mathbb{X}=x)\cap(\mathbb{Y}=y))$ en fonction des valeurs possibles de $x\in\mathbb{X}(\Omega)$ et $y\in\mathbb{Y}(\Omega)$.

Le tableau ci-dessous illustre le calcul des lois marginales. On note :

- $\mathbb{X}:\Omega\longmapsto\mathrm{E}$ une v.a de support $\mathbb{X}(\Omega)=\{x_1,\dots,x_m\}$ où $m\in\mathbb{N}^*$ et, $\forall k\in[\![1\,;m]\!]$, $x_k\in\mathrm{E}$.
- $\mathbb{X}:\Omega\longmapsto\mathrm{F}$ une v.a de support $\mathbb{Y}(\Omega)=\{y_1,\dots,y_n\}$ où $n\in\mathbb{N}^*$ et, $\forall k\in[\![1\,;n]\!]$, $y_k\in\mathrm{F}$.

$\mathbb{X}\setminus\mathbb{Y}$	y_1	y_2	...	y_n	Total
x_1	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$	...	$p_{1,n}$	$\mathrm{P}(\mathbb{X}=x_1)=\sum_{j=1}^{n}p_{1,j}$
x_2	$p_{2,1}$	$p_{2,2}$	...	$p_{2,n}$	$\mathrm{P}(\mathbb{X}=x_2)=\sum_{j=1}^{n}p_{2,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	$p_{m,1}$	$p_{m,2}$	...	$p_{m,n}$	$\mathrm{P}(\mathbb{X}=x_m)=\sum_{j=1}^{n}p_{m,j}$
Total	$\mathrm{P}(\mathbb{Y}=y_1)=\sum_{i=1}^{m}p_{i,1}$	$\mathrm{P}(\mathbb{Y}=y_2)=\sum_{i=1}^{m}p_{i,2}$	...	$\mathrm{P}(\mathbb{Y}=y_n)=\sum_{i=1}^{m}p_{i,n}$	1

V.2 Loi conditionnelle

Définition 13 : Soient E et F deux ensembles quelconques.

Soient $\mathbb{X}:\Omega\longmapsto\mathrm{E}$ et $\mathbb{Y}:\Omega\longmapsto\mathrm{F}$ deux variables aléatoires. Soit $x\in\mathbb{X}(\Omega)$.

On appelle *loi conditionnelle sachant que* $(\mathbb{X}=x)$ la loi définie par :

$$\mathrm{P}_{(\mathbb{X}=x)}(\mathbb{Y}=y) = \frac{\mathrm{P}((\mathbb{X}=x)\cap(\mathbb{Y}=y))}{\mathrm{P}(\mathbb{X}=x)} \qquad \text{pour } y\in\mathbb{Y}(\Omega)$$

De même, pour $y\in\mathbb{Y}(\Omega)$, on définit la *loi conditionnelle sachant que* $(\mathbb{Y}=y)$ par :

$$\mathrm{P}_{(\mathbb{Y}=y)}(\mathbb{X}=x) = \frac{\mathrm{P}((\mathbb{X}=x)\cap(\mathbb{Y}=y))}{\mathrm{P}(\mathbb{Y}=y)} \qquad \text{pour } x\in\mathbb{X}(\Omega)$$

Exercice 6 : On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire successivement 2 boules. On note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire définie par $\mathbb{X}=0$ si la première boule est noire et $\mathbb{X}=1$ si elle est blanche. On définit $\mathbb{Y}$ de la même façon pour la deuxième boule.

1 On effectue les tirages avec remise. Déterminer la loi de probabilité du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ ainsi que les lois marginales de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$. Déterminer la loi de $\mathbb{X}$ conditionnée par $\mathbb{Y}$ ainsi que la loi de $\mathbb{Y}$ conditionnée par $\mathbb{X}$.

2 Mêmes questions pour un tirage sans remise.

VI VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES

Définition 14 : Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ deux variables aléatoires sur Ω.

On dit que les deux *variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes* si et seulement si :

$$\forall\, x \in \mathbb{X}(\Omega), \forall\, y \in \mathbb{Y}(\Omega), \quad \mathrm{P}((\mathbb{X} = x) \cap (\mathbb{Y} = y)) = \mathrm{P}(\mathbb{X} = x) \times \mathrm{P}(\mathbb{Y} = y)$$

Exemple 13 :

$\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}$	1	2	3	4	5	6	Total
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
Total	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes

$\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}$	1	2	3	4	5	6	Total
1	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
2	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
3	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
4	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Total	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ne sont pas indépendantes

Exercice 7 : Soient deux variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ dont les tableaux des lois conjointes sont donnés ci-dessous. Lequel correspond à des variables indépendantes ?

$\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}$	1	2	Total
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\mathrm{P}(\mathbb{X} = 1) = \frac{2}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	0	$\mathrm{P}(\mathbb{X} = 2) = \frac{1}{3}$
Total	$\mathrm{P}(\mathbb{Y} = 1) = \frac{2}{3}$	$\mathrm{P}(\mathbb{Y} = 2) = \frac{1}{3}$	1

$\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}$	1	2	Total
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\mathrm{P}(\mathbb{X} = 1) = \frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\mathrm{P}(\mathbb{X} = 2) = \frac{1}{2}$
Total	$\mathrm{P}(\mathbb{Y} = 1) = \frac{1}{2}$	$\mathrm{P}(\mathbb{Y} = 2) = \frac{1}{2}$	1

VI.1 Caractérisation

Proposition 13 : Soient (Ω, P) un espace probabilisé et $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ deux variables aléatoires sur Ω. $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes si, et seulement si

$$\forall \mathrm{A} \subset \mathbb{X}(\Omega), \forall \mathrm{B} \subset \mathbb{Y}(\Omega), \quad \mathrm{P}\Big((\mathbb{X} \in \mathrm{A}) \cap (\mathbb{Y} \in \mathrm{B})\Big) = \mathrm{P}(\mathbb{X} \in \mathrm{A}) \times \mathrm{P}(\mathbb{Y} \in \mathrm{B})$$

Preuve :

$(\Leftarrow)$: Immédiat en posant si nécessaire $\mathrm{A} = \{x\}$ et $\mathrm{B} = \{y\}$.

$(\Rightarrow)$: Supposons que les variables aléatoires $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ soient indépendantes.

Considérons deux ensembles $\mathrm{A} = \{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$ et $\mathrm{B} = \{y_1, y_2, \cdots, y_s\}$.

$$\mathrm{P}((\mathbb{X} \in \mathrm{A}) \cap (\mathbb{Y} \in \mathrm{B})) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{r} \bigcup_{j=1}^{s} (\mathbb{X} = x_i) \cap (\mathbb{Y} = y_j)\right)$$

Or, les événements $\Big((\mathbb{X} = x_i) \cap (\mathbb{Y} = y_j)\Big)_{\substack{i \in [\![1;r]\!] \\ j \in [\![1;s]\!]}}$ sont deux à deux incompatibles, donc :

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \mathrm{P}\left((\mathbb{X} = x_i) \cap (\mathbb{Y} = y_j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \mathrm{P}(\mathbb{X} = x_i) \times \mathrm{P}(\mathbb{Y} = y_j), \text{ par indépendance de } \mathbb{X} \text{ et } \mathbb{Y}. \\
&= \left(\sum_{i=1}^{r} \mathrm{P}(\mathbb{X} = x_i)\right) \left(\sum_{j=1}^{s} \mathrm{P}(\mathbb{Y} = y_j)\right) \\
&= \mathrm{P}(\mathbb{X} \in \mathrm{A}) \times \mathrm{P}(\mathbb{Y} \in \mathrm{B})
\end{aligned}$$

Corollaire 13.1 : Si $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ sont deux variables aléatoires indépendantes, et f, g sont deux applications définies respectivement sur $\mathbb{X}(\Omega)$ et $\mathbb{Y}(\Omega)$, alors les variables aléatoires $f(\mathbb{X})$ et $g(\mathbb{Y})$ sont indépendantes.

Preuve : Soient $f : \mathbb{X}(\Omega) \longmapsto \mathrm{E}$, $g : \mathbb{Y}(\Omega) \longmapsto \mathrm{F}$, $x \in \mathrm{E}$ et $y \in \mathrm{F}$.

On a :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(f(\mathbb{X}) = x) \cap (g(\mathbb{Y}) = y)\Big) &= \mathbb{P}\Big(\mathbb{X} \in f^{-1}(\{x\}) \cap \mathbb{Y} \in g^{-1}(\{y\})\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\mathbb{X} \in f^{-1}(\{x\})\Big) \times \mathbb{P}\Big(\mathbb{Y} \in g^{-1}(\{y\})\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(f(\mathbb{X}) = x)\Big) \times \mathbb{P}\Big((g(\mathbb{Y}) = y)\Big).
\end{aligned}$$

Ainsi, $f(\mathbb{X})$ et $g(\mathbb{Y})$ sont indépendantes.

VI.2 Variables aléatoires mutuellement indépendantes

Définition 15 : Les variables aléatoires $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \cdots \mathbb{X}_n$ sont dites *mutuellement indépendantes* si, pour toute famille $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{X}_1(\Omega) \times \mathbb{X}_2(\Omega) \times \cdots \times \mathbb{X}_n(\Omega)$ les événements $(\mathbb{X}_1 = x_1), (\mathbb{X}_2 = x_2), \cdots, (\mathbb{X}_n = x_n)$ sont mutuellement indépendants, *i.e.* si, et seulement si

$$\forall\, (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i(\Omega), \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (\mathbb{X}_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathbb{X}_i = x_i).$$

Exemples 14 :

- Dans le cas d'un tirage avec remise dans une urne, si $\mathbb{X}_i$ est le numéro de la $i^{\text{ème}}$ boule tirée, $\mathbb{X}_1$, ..., $\mathbb{X}_n$ sont mutuellement indépendantes.
- De manière plus générale, si on effectue n fois la même expérience, de manière indépendante, et si $\mathbb{X}_i$ est le résultat de la $i^{\text{ème}}$, $\mathbb{X}_1$, ..., $\mathbb{X}_n$ sont mutuellement indépendantes.

Proposition 14 : Soient $\mathbb{X}_1$, ..., $\mathbb{X}_n$ des variables mutuellement indépendantes.

1. $\forall\, (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n) \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}(\mathbb{X}_i(\Omega))$, les événements $(\mathbb{X}_1 \in \mathrm{A}_1)$, $(\mathbb{X}_2 \in \mathrm{A}_2)$, $\cdots$, $(\mathbb{X}_n \in \mathrm{A}_n)$ sont mutuellement indépendants *i.e.*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (\mathbb{X}_i \in \mathrm{A}_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathbb{X}_i \in \mathrm{A}_i).$$

2. Toute sous-famille de $\mathbb{X}_1$, ..., $\mathbb{X}_n$ est indépendante.

Preuve :

1

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (\mathbb{X}_i \in \mathrm{A}_i)\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in [\![1;n]\!]} \left(\bigcup_{x_i \in \mathrm{A}_i} \{\mathbb{X}_i = x_i\}\right)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{(x_1,\dots,x_n) \in \mathrm{A}_1 \times \dots \times \mathrm{A}_n} \left(\bigcap_{i \in [\![1;n]\!]} \{\mathbb{X}_i = x_i\}\right)\right) \\
&= \sum_{(x_1,\dots,x_n) \in \mathrm{A}_1 \times \dots \times \mathrm{A}_n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in [\![1;n]\!]} \{\mathbb{X}_i = x_i\}\right) \\
&= \sum_{(x_1,\dots,x_n) \in \mathrm{A}_1 \times \dots \times \mathrm{A}_n} \prod_{i \in [\![1;n]\!]} \mathbb{P}\left(\{\mathbb{X}_i = x_i\}\right) \\
&= \sum_{x_1 \in \mathrm{A}_1} \dots \sum_{x_n \in \mathrm{A}_n} \prod_{i \in [\![1;n]\!]} \mathbb{P}\left(\{\mathbb{X}_i = x_i\}\right) \\
&= \left(\sum_{x_1 \in \mathrm{A}_1} \mathbb{P}\left(\{\mathbb{X}_1 = x_1\}\right)\right) \dots \left(\sum_{x_n \in \mathrm{A}_n} \mathbb{P}\left(\{\mathbb{X}_n = x_n\}\right)\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathbb{X}_i \in \mathrm{A}_i).
\end{aligned}$$

2 Quitte à réordonner $(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n)$, on se donne une sous-famille $(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_p)$ avec $p \leqslant n$.

Pour $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{X}_1(\Omega) \times \dots \times \mathbb{X}_p(\Omega)$, on pose $\mathrm{A}_i = \{x_i\}$ si $i \in [\![1\,;p]\!]$ et $\mathrm{A}_i = \Omega$ sinon.

D'après l'assertion précédente, on a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big((\mathbb{X}_1 = x_1) \cap \dots (\mathbb{X}_p = x_p)\Big) &= \mathbb{P}\Big((\mathbb{X}_1 \in \mathrm{A}_1) \cap \dots \cap (\mathbb{X}_n \in \mathrm{A}_n)\Big) \\ &= \mathbb{P}(\mathbb{X}_1 \in \mathrm{A}_1) \dots \mathbb{P}(\mathbb{X}_n \in \mathrm{A}_n) \\ &= \mathbb{P}(\mathbb{X}_1 = x_1) \dots \mathbb{P}(\mathbb{X}_p = x_p) \times 1 \dots .\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_p$ sont indépendantes.

Corollaire 14.1 : Toute famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes sont deux à deux indépendantes.

ATTENTION Comme dans le cas des événements, la réciproque est fausse.

Proposition 15 (Lemme des coalitions) : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et $p \in [\![1\,;n-1]\!]$.

Soient $\mathbb{X}_1$, ..., $\mathbb{X}_n$ une famille de n variables aléatoires mutuellement indépendantes sur Ω.

Pour toutes application $f : \mathbb{R}^p \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{n-p} \longmapsto \mathbb{R}$, $f(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_p)$ et $g(\mathbb{X}_{p+1}, \dots, \mathbb{X}_n)$ sont indépendantes.

Preuve : Admis.

VI.3 Application à la loi binomiale

Théorème 16 : Soient $\mathbb{X}_1$, ..., $\mathbb{X}_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0\,;1]$.

Alors $\mathbb{X}_1 + \dots + \mathbb{X}_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Comme $\mathbb{X}_i$ comptabilise le succès ou l'échec à la $i^{\text{ème}}$ épreuve de Bernoulli, la variable aléatoire $\mathbb{X}_1 + \dots + \mathbb{X}_n$ représente le nombre de succès de n expériences indépendantes ayant probabilité p de réussir. Une telle variable suit une loi binomiale de paramètre n et p.

On vérifie ici cela par le calcul.

Preuve : Posons $\mathbb{Y} = \mathbb{X}_1 + \dots + \mathbb{X}_n$.

Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathbb{X}_i(\Omega) = \{0, 1\}$ et $\mathbb{Y}(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$.

Soit $k \in [\![0\,;n]\!]$, notons

$$\mathrm{A}_k = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n \;/\; x_1 + \dots x_n = k\right\}.$$

A_k est de cardinal $\dbinom{n}{k}$ puisqu'il faut choisir k des x_i parmi les n qui ont la valeur 1 (les autres prenant la valeur 0) pour avoir un élément de A_k.

Il est alors facile de constater que $\big((\mathbb{X}_1 = x_1) \cap \ldots \cap (\mathbb{X}_n = x_n)\big)$ avec $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{A}_k$ sont deux à deux incompatibles.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathbb{Y} = k) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{(x_1,\ldots,x_n)\in \mathrm{A}_k} \left(\bigcap_{i\in[\![1;n]\!]} \{\mathbb{X}_i = x_i\}\right)\right) \\
&= \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in \mathrm{A}_k} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in[\![1;n]\!]} \{\mathbb{X}_i = x_i\}\right) \\
&= \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in \mathrm{A}_k} \prod_{i\in[\![1;n]\!]} \mathbb{P}\left(\{\mathbb{X}_i = x_i\}\right).
\end{aligned}$$

Parmi les x_i, k valent 1 donc k des $\mathbb{P}(\mathbb{X}_i = x_i)$ valent p, et $n-k$ valent 0 donc les $n-k$ autres $\mathbb{P}(\mathbb{X}_i = x_i)$ valent $1-p$.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in \mathrm{A}_k} p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$.

VI.4 Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes

Théorème 17 : Si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont deux variables aléatoires réelles indépendantes, alors

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \mathrm{E}(\mathbb{X})\mathrm{E}(\mathbb{Y}).$$

Preuve : Posons $\mathbb{X}(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_p\}$, les x_i étant tous distincts et $\mathbb{Y}(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_q\}$, les y_j étant tous distincts.

On pose $\mathrm{Z} = \mathbb{X}\mathbb{Y}$.

On a $\mathrm{Z}(\Omega) = \{x_i y_j, (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]\} = \{z_1, \ldots, z_r\}$, les z_k étant tous distincts.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathbb{Z}) &= \sum_{k=1}^{r} z_k \mathrm{P}(\mathbb{Z} = z_k) \\
&= \sum_{k=1}^{r} z_k \mathrm{P}\left(\bigcup_{x_i y_j = z_k} \Big((\mathbb{X} = x_i) \cap (\mathbb{Y} = y_j)\Big)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{r} z_k \left[\sum_{x_i y_j = z_k} \mathrm{P}\Big((\mathbb{X} = x_i) \cap (\mathbb{Y} = y_j)\Big)\right] \quad \text{car les événements sont incompatibles} \\
&= \sum_{k=1}^{r} z_k \left[\sum_{x_i y_j = z_k} \mathrm{P}(\mathbb{X} = x_i)\mathrm{P}(\mathbb{Y} = y_j)\right] \quad \text{car les v.a. sont indépendantes} \\
&= \sum_{k=1}^{r} \sum_{x_i y_j = z_k} x_i y_j \mathrm{P}(\mathbb{X} = x_i)\mathrm{P}(\mathbb{Y} = y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} x_i y_j \mathrm{P}(\mathbb{X} = x_i)\mathrm{P}(\mathbb{Y} = y_j) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{p} x_i \mathrm{P}(\mathbb{X} = x_i)\right)\left(\sum_{j=1}^{q} y_j \mathrm{P}(\mathbb{Y} = y_j)\right) = \mathrm{E}(\mathbb{X})\mathrm{E}(\mathbb{Y}).
\end{aligned}$$

Remarque : On peut aussi voir ce résultat comme une application du théorème (4) de transfert appliqué à $f : (x\,;y) \longmapsto xy$ et à la variable $\mathbb{Z} = (\mathbb{X}\,;\mathbb{Y})$.

ATTENTION

La réciproque est fausse en général comme le montre l'exemple suivant :

Contre-Exemple 15 : Soient U et V deux urnes, que l'on remplit, de manière aléatoire avec deux boules.

On note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire qui compte le nombre de boules dans U, $\mathbb{Y}$ la variable aléatoire qui compte le nombre d'urnes vides.

	$(\mathbb{X} = 0)$	$(\mathbb{X} = 1)$	$(\mathbb{X} = 2)$	Total
$(\mathbb{Y} = 0)$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$(\mathbb{Y} = 1)$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Total	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

z	$\mathrm{P}(\mathbb{X}\mathbb{Y} = z)$
0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$
2	0

Alors $\mathbb{P}(\mathbb{X} = 0) = \mathbb{P}(\mathbb{X} = 2) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\mathbb{X} = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(\mathbb{Y} = 0) = \mathbb{P}(\mathbb{Y} = 1) = \frac{1}{2}$.

On calcule $\mathrm{E}(\mathbb{X}) = 1$, $\mathrm{E}(\mathbb{Y}) = \frac{1}{2}$ d'où $\mathrm{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \frac{1}{2} = \mathrm{E}(\mathbb{X})\mathrm{E}(\mathbb{Y})$ mais $\mathbb{P}((\mathbb{X} = 0) \cap (\mathbb{Y} = 0)) = 0 \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}((\mathbb{X} = 0))\mathbb{P}((\mathbb{Y} = 0))$. Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ne sont pas indépendantes.

Corollaire 17.1 : Si $\mathbb{X}_1$, ..., $\mathbb{X}_n$ sont des variables mutuellement indépendantes, alors

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n) = \mathrm{E}(\mathbb{X}_1) \dots \mathrm{E}(\mathbb{X}_n).$$

Preuve : On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(n)$ correspondant à l'énoncé.
$\mathcal{P}(1)$ est trivialement vraie.
Soit $n \geqslant 2$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et soient $\mathbb{X}_1$, ..., $\mathbb{X}_n$, $\mathbb{X}_{n+1}$ des variables aléatoires indépendantes.
Alors $\mathbb{X}_{n+1}$ est indépendante de $\mathbb{X}_1$, ..., $\mathbb{X}_n$ donc par hypothèse de récurrence :

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}_1 \dots \mathbb{X}_n \mathbb{X}_{n+1}) = \mathrm{E}(\mathbb{X}_1 \dots \mathbb{X}_n)\mathrm{E}(\mathbb{X}_{n+1}) = \mathrm{E}(\mathbb{X}_1) \dots \mathrm{E}(\mathbb{X}_n)\mathrm{E}(\mathbb{X}_{n+1}).$$

Et, on a $\mathcal{P}(n+1)$.
En conclusion, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$.

VII COVARIANCE DE DEUX VARIABLES ALÉATOIRES

Définition 16 : Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ des variables aléatoires réelles.
On appelle *covariance* de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$, notée $Cov(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, le réel

$$\begin{aligned} Cov(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) &= \mathrm{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) - \mathrm{E}(\mathbb{X})\mathrm{E}(\mathbb{Y}) \\ &= \mathrm{E}\Big((\mathbb{X} - \mathrm{E}(\mathbb{X}))(\mathbb{Y} - \mathrm{E}(\mathbb{Y}))\Big). \end{aligned}$$

On dit que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont *décorrélées* si $Cov(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = 0$.

La covariance est donc la moyenne des produits des écarts des valeurs à la moyenne de chaque série. Elle évalue la dépendance linéaire entre $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$. D'après le théorème (17), si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes alors $Cov(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = 0$.

ATTENTION | La réciproque est fausse.

Proposition 18 : Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ des variables aléatoires réelles.
Alors,

$$\mathrm{V}(\mathbb{X} + \mathbb{Y}) = \mathrm{V}(\mathbb{X}) + \mathrm{V}(\mathbb{Y}) + 2Cov(\mathbb{X}, \mathbb{Y}).$$

Si, $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont décorrélées alors $\mathrm{V}(\mathbb{X} + \mathbb{Y}) = \mathrm{V}(\mathbb{X}) + \mathrm{V}(\mathbb{Y})$.

Preuve : Il suffit de développer et d'utiliser la proposition (5) :

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(\mathbb{X} + \mathbb{Y}) &= \mathrm{E}\Big(\big(\mathbb{X} + \mathbb{Y} - \mathrm{E}(\mathbb{X} + \mathbb{Y})\big)^2\Big) \\ &= \mathrm{E}\Big((\mathbb{X} + \mathbb{Y})^2 - 2(\mathbb{X} + \mathbb{Y})\mathrm{E}(\mathbb{X} + \mathbb{Y}) + \mathrm{E}(\mathbb{X} + \mathbb{Y})^2\Big) \\ &= \mathrm{E}\Big((\mathbb{X} + \mathbb{Y})^2\Big) - \mathrm{E}(\mathbb{X} + \mathbb{Y})^2 \\ &= \mathrm{E}(\mathbb{X}^2) + \mathrm{E}(\mathbb{Y}^2) + 2\mathrm{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) - \mathrm{E}(\mathbb{X})^2 - 2\mathrm{E}(\mathbb{X})\mathrm{E}(\mathbb{Y}) - \mathrm{E}(\mathbb{Y})^2 \\ &= \mathrm{V}(\mathbb{X}) + \mathrm{V}(\mathbb{Y}) + 2\Big(\mathrm{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) - \mathrm{E}(\mathbb{X})\mathrm{E}(\mathbb{Y})\Big) \\ &= \mathrm{V}(\mathbb{X}) + \mathrm{V}(\mathbb{Y}) + 2Cov(\mathbb{X}, \mathbb{Y}). \end{aligned}$$

Corollaire 18.1 : Si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont deux variables aléatoires réelles indépendantes alors

$$\mathrm{V}(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) = \mathrm{V}(\mathbb{X}) + \mathrm{V}(\mathbb{Y}).$$

Preuve : Le théorème (17) donne le résultat.

Le corollaire (18.1) se généralise aisément au cas de n variables aléatoires mutuellement indépendantes :

Proposition 19 : Si $\mathbb{X}_1$, ..., $\mathbb{X}_n$ sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes alors

$$\mathrm{V}(\mathbb{X}_1 + \dots + \mathbb{X}_n) = \mathrm{V}(\mathbb{X}_1) + \dots + \mathrm{V}(\mathbb{X}_n).$$

« La variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes est la somme de leur variance. »

Preuve : Par linéarité de l'espérance, $\mathrm{E}(\mathbb{X}_1 + \dots + \mathbb{X}_n) = \mathrm{E}(\mathbb{X}_1) + \dots + \mathrm{E}(\mathbb{X}_n)$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\mathbb{X}_1 + \dots + \mathbb{X}_n) &= \mathrm{E}\Big((\mathbb{X}_1 + \dots + \mathbb{X}_n)\Big)^2 - \Big(\mathrm{E}(\mathbb{X}_1) + \dots + \mathrm{E}(\mathbb{X}_n)\Big)^2 \\
&= \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i^2 + 2\sum_{i<j} \mathbb{X}_i\mathbb{X}_j\right) - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(\mathbb{X}_i)^2 - 2\sum_{i<j} \mathrm{E}(\mathbb{X}_i)\mathrm{E}(\mathrm{X}_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(\underbrace{\mathrm{E}(\mathbb{X}_i^2) - \mathrm{E}(\mathbb{X}_i)^2}_{=\mathrm{V}(\mathbb{X}_i)} \Big) + 2\sum_{i<j} \Big(\underbrace{\mathrm{E}(\mathbb{X}_i\mathbb{X}_j) - \mathrm{E}(\mathbb{X}_i)\mathrm{E}(\mathrm{X}_j)}_{=0 \text{ par indépendance}} \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}(\mathbb{X}_i).
\end{aligned}$$

Corollaire 19.1 : Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. Alors,

$$\mathrm{V}(\mathbb{X}) = np(1-p).$$

Preuve : On redécompose $\mathbb{X}$ sous la forme d'une somme de n variables aléatoires indépendantes $\mathbb{X}_i$ indépendantes. On a alors :

$$\mathrm{V}(\mathbb{X}) = \mathrm{V}(\mathbb{X}_1) + \mathrm{V}(\mathbb{X}_2) + \dots + \mathrm{V}(\mathbb{X}_n) = p(1-p) + p(1-p) + \dots + p(1-p) = np(1-p).$$

Exercice 8 : Soit $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ deux variables aléatoires indépendantes de même loi, à valeurs dans $\{1, \dots, \mathrm{N}\}$. On pose $\mathbb{X} = \mathbb{U} - \mathbb{V}$ et $\mathbb{Y} = \mathbb{U} + \mathbb{V}$.

Déterminer la covariance entre $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.