

Variables aléatoires

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 30



- 1 Variables aléatoires
- 2 Espérance d'une variable aléatoire réelle
- 3 Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle
- 4 Lois usuelles
- 5 Couple de variables aléatoires
- 6 Variables aléatoires indépendantes
- 7 Covariance de deux variables aléatoires





En théorie des probabilités, une variable aléatoire est une variable dont la valeur est déterminée après la réalisation d'un phénomène, expérience ou événement, aléatoire : la valeur d'un dé entre 1 et 6, le côté de la pièce dans un pile ou face, le jour de semaine de naissance de la prochaine personne que vous rencontrez, le temps d'attente dans la queue du cinéma, ...



Mathématiquement, c'est une application définie sur l'ensemble des éventualités, c'est-à-dire l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.

Ce furent les jeux de hasard qui amenèrent à concevoir les variables aléatoires, en associant à une éventualité (résultat du lancer d'un ou plusieurs dés, d'un tirage à pile ou face, d'une roulette, etc.) un gain.

Dans tout ce chapitre $(\Omega; P)$ représente un espace probabilisé fini et E désigne un ensemble quelconque.



I. Variables aléatoires

1 Variables aléatoires

- Définition
- Image d'une variable aléatoire, Image réciproque
- Fonction d'une variable aléatoire
- Loi d'une variable aléatoire

2 Espérance d'une variable aléatoire réelle

3 Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

4 Lois usuelles

5 Couple de variables aléatoires

6 Variables aléatoires indépendantes

7 Covariance de deux variables aléatoires



I. Variables aléatoires

1. Définition

Définition 1 :

On appelle **variable aléatoire** sur Ω à valeurs dans E toute application X de Ω dans E .

$$X : \Omega \mapsto E.$$

Si $E \subset \mathbb{R}$, on parle de **variable aléatoire réelle** raccourci en v.a.r .

Remarques :

- une *variable* aléatoire est une **fonction** !



I. Variables aléatoires

1. Définition

Définition 1 :

On appelle **variable aléatoire** sur Ω à valeurs dans E toute application X de Ω dans E .

$$X : \Omega \mapsto E.$$

Si $E \subset \mathbb{R}$, on parle de **variable aléatoire réelle** raccourci en v.a.r .

Remarques :

- une *variable* aléatoire est une **fonction** !
- Comme Ω est **fini**, une variable aléatoire $X : \Omega \mapsto E$ prend un nombre **fini** de valeurs.

L'ensemble de ces valeurs peut s'écrire $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_k \in E$.



I. Variables aléatoires

1. Définition

Exemple 1 :

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

L'univers est $\Omega = \{7♥, 7♦, 7♠, 7♣, 8♥, \dots, A♥, A♦, A♠, A♣\}$.

On gagne :

- 10 euros si la carte tirée est l'as de cœur ;
- 5 euros si la carte tirée est un autre as ;
- 2 euros si la carte tirée est un valet, une dame ou un roi ;
- -1 euro sinon. On perd donc !

I. Variables aléatoires

1. Définition

Exemple 1 :

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

L'univers est $\Omega = \{7♥, 7♦, 7♠, 7♣, 8♥, \dots, A♥, A♦, A♠, A♣\}$.

On gagne :

- 10 euros si la carte tirée est l'as de cœur ;
- 5 euros si la carte tirée est un autre as ;
- 2 euros si la carte tirée est un valet, une dame ou un roi ;
- -1 euro sinon. On perd donc !

On peut modéliser le gain par une variable aléatoire

$$X : \begin{cases} \Omega & \mapsto & \mathbb{R} \\ A♥ & \rightarrow & 10 \\ A♦ & \rightarrow & 5 \\ \dots & \rightarrow & \dots \\ 7♣ & \rightarrow & -1 \end{cases}$$

I. Variables aléatoires

1. Définition

Exemple 1 :

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

L'univers est $\Omega = \{7♥, 7♦, 7♠, 7♣, 8♥, \dots, A♥, A♦, A♠, A♣\}$.

On gagne :

- 10 euros si la carte tirée est l'as de cœur ;
- 5 euros si la carte tirée est un autre as ;
- 2 euros si la carte tirée est un valet, une dame ou un roi ;
- -1 euro sinon. On perd donc !

On peut modéliser le gain par une variable aléatoire

$$\mathbb{X} : \begin{cases} \Omega & \mapsto & \mathbb{R} \\ A♥ & \rightarrow & 10 \\ A♦ & \rightarrow & 5 \\ \dots & \rightarrow & \dots \\ 7♣ & \rightarrow & -1 \end{cases}$$

En particulier, $\mathbb{X}(\Omega) = \{-1, 2, 5, 10\}$ et $\mathbb{X}^{-1}(5) = \{A♦, A♠, A♣\}$.

I. Variables aléatoires

2. Image d'une variable aléatoire, Image réciproque

Définition 2 :

Soit X une variable aléatoire sur Ω .

- L'ensemble $X(\Omega)$, image directe de Ω par X , est appelé **support** de la variable aléatoire.



I. Variables aléatoires

2. Image d'une variable aléatoire, Image réciproque

Définition 2 :

Soit X une variable aléatoire sur Ω .

- L'ensemble $X(\Omega)$, image directe de Ω par X , est appelé **support** de la variable aléatoire.
- Soit A une partie de E .



I. Variables aléatoires

2. Image d'une variable aléatoire, Image réciproque

Définition 2 :

Soit \mathcal{X} une variable aléatoire sur Ω .

- L'ensemble $\mathcal{X}(\Omega)$, image directe de Ω par \mathcal{X} , est appelé **support** de la variable aléatoire.
- Soit A une partie de E .
 - L'événement $\mathcal{X}^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega / \mathcal{X}(\omega) \in A\}$, image réciproque de A par \mathcal{X} , est habituellement et abusivement noté $(\mathcal{X} \in A)$.
Dans le cas où A est un singleton $\{x\}$ où $x \in E$, on emploie plutôt les notations $(\mathcal{X} = x)$ au lieu de $(\mathcal{X} \in \{x\})$.



I. Variables aléatoires

2. Image d'une variable aléatoire, Image réciproque

Définition 2 :

Soit \mathcal{X} une variable aléatoire sur Ω .

- L'ensemble $\mathcal{X}(\Omega)$, image directe de Ω par \mathcal{X} , est appelé **support** de la variable aléatoire.
- Soit A une partie de E .
 - L'événement $\mathcal{X}^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega / \mathcal{X}(\omega) \in A\}$, image réciproque de A par \mathcal{X} , est habituellement et abusivement noté $(\mathcal{X} \in A)$.
Dans le cas où A est un singleton $\{x\}$ où $x \in E$, on emploie plutôt les notations $(\mathcal{X} = x)$ au lieu de $(\mathcal{X} \in \{x\})$.
 - La probabilité $P(\mathcal{X}^{-1}(A))$ de l'événement $(\mathcal{X} \in A)$ est notée $P(\mathcal{X} \in A)$, celle de $(\mathcal{X} = x)$, $P(\mathcal{X} = x)$.
Dans le cas de v.a.r , on note $P(\mathcal{X} \leq x)$ au lieu de $P(\mathcal{X} \in]-\infty; x])$.



I. Variables aléatoires

2. Image d'une variable aléatoire, Image réciproque

Exemple 2 :

Dans l'exemple (1) ,

- le support de la variable aléatoire X est $X(\Omega) = \{-1, 2, 5, 10\}$.



I. Variables aléatoires

2. Image d'une variable aléatoire, Image réciproque

Exemple 2 :

Dans l'exemple (1) ,

- le **support** de la variable aléatoire X est $X(\Omega) = \{-1, 2, 5, 10\}$.
- $(X \leq 12)$ est l'événement certain et $(X = 7)$ est l'événement impossible.



I. Variables aléatoires

2. Image d'une variable aléatoire, Image réciproque

Exemple 2 :

Dans l'exemple (1) ,

- le **support** de la variable aléatoire X est $X(\Omega) = \{-1, 2, 5, 10\}$.
- $(X \leq 12)$ est l'événement certain et $(X = 7)$ est l'événement impossible.
- $(X = 5)$ désigne l'événement : $\{A\spadesuit, A\heartsuit, A\clubsuit\}$.

On peut aussi le lire : « Gagner 5 euros », et on a

$$P(X = 5) = P(\{A\spadesuit, A\heartsuit, A\clubsuit\}) = \frac{3}{32}.$$



I. Variables aléatoires

2. Image d'une variable aléatoire, Image réciproque

Exemple 3 :

On lance deux fois un dé bien équilibré à 6 faces.

- L'univers de cette expérience aléatoire est l'ensemble des couples de $\llbracket 1; 6 \rrbracket^2$ donc $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket^2$.

I. Variables aléatoires

2. Image d'une variable aléatoire, Image réciproque

Exemple 3 :

On lance deux fois un dé bien équilibré à 6 faces.

- L'univers de cette expérience aléatoire est l'ensemble des couples de $\llbracket 1; 6 \rrbracket^2$ donc $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket^2$.
- Le dé étant bien équilibré, la probabilité sur Ω est uniforme.

I. Variables aléatoires

2. Image d'une variable aléatoire, Image réciproque

Exemple 3 :

On lance deux fois un dé bien équilibré à 6 faces.

- L'univers de cette expérience aléatoire est l'ensemble des couples de $\llbracket 1; 6 \rrbracket^2$ donc $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket^2$.
- Le dé étant bien équilibré, la probabilité sur Ω est uniforme.
- On peut définir la fonction S sur Ω qui donne la somme des valeurs obtenues lors des deux lancers.

S est une v.a.r sur Ω de support $S(\Omega) = \llbracket 2; 12 \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } S : \llbracket 1; 6 \rrbracket^2 &\longrightarrow \llbracket 2; 12 \rrbracket \\ (i; j) &\longmapsto i + j. \end{aligned}$$

On peut alors remarquer que les événements $(S = k)_{2 \leq k \leq 12}$ forment un système complet d'événements de Ω .

I. Variables aléatoires

2. Image d'une variable aléatoire, Image réciproque

Exemple 3 :

On lance deux fois un dé bien équilibré à 6 faces.

- L'univers de cette expérience aléatoire est l'ensemble des couples de $\llbracket 1; 6 \rrbracket^2$ donc $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket^2$.
- Le dé étant bien équilibré, la probabilité sur Ω est uniforme.
- On peut définir la fonction S sur Ω qui donne la somme des valeurs obtenues lors des deux lancers.

S est une v.a.r sur Ω de support $S(\Omega) = \llbracket 2; 12 \rrbracket$.

Ainsi, $S : \llbracket 1; 6 \rrbracket^2 \rightarrow \llbracket 2; 12 \rrbracket$

$$(i; j) \mapsto i + j.$$

- $(S = 2) = \{(1; 1)\}$.

On peut alors remarquer que les événements $(S = k)_{2 \leq k \leq 12}$ forment un système complet d'événements de Ω .

I. Variables aléatoires

2. Image d'une variable aléatoire, Image réciproque

Exemple 3 :

On lance deux fois un dé bien équilibré à 6 faces.

- L'univers de cette expérience aléatoire est l'ensemble des couples de $\llbracket 1; 6 \rrbracket^2$ donc $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket^2$.
- Le dé étant bien équilibré, la probabilité sur Ω est uniforme.
- On peut définir la fonction S sur Ω qui donne la somme des valeurs obtenues lors des deux lancers.

S est une v.a.r sur Ω de support $S(\Omega) = \llbracket 2; 12 \rrbracket$.

Ainsi, $S : \llbracket 1; 6 \rrbracket^2 \rightarrow \llbracket 2; 12 \rrbracket$

$$(i; j) \mapsto i + j.$$

- $(S = 2) = \{(1; 1)\}.$
- $(S = 3) = \{(1; 2), (2; 1)\}.$

...

On peut alors remarquer que les événements $(S = k)_{2 \leq k \leq 12}$ forment un système complet d'événements de Ω .

I. Variables aléatoires

2. Image d'une variable aléatoire, Image réciproque

Exemple 3 :

On lance deux fois un dé bien équilibré à 6 faces.

- L'univers de cette expérience aléatoire est l'ensemble des couples de $\llbracket 1; 6 \rrbracket^2$ donc $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket^2$.
- Le dé étant bien équilibré, la probabilité sur Ω est uniforme.
- On peut définir la fonction S sur Ω qui donne la somme des valeurs obtenues lors des deux lancers.

S est une v.a.r sur Ω de support $S(\Omega) = \llbracket 2; 12 \rrbracket$.

Ainsi, $S : \llbracket 1; 6 \rrbracket^2 \rightarrow \llbracket 2; 12 \rrbracket$

$$(i; j) \mapsto i + j.$$

- $(S = 2) = \{(1; 1)\}.$
- $(S = 3) = \{(1; 2), (2; 1)\}.$
- ...
- $(S = 7) = \{(1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2), (6; 1)\}.$
- ...

On peut alors remarquer que les événements $(S = k)_{2 \leq k \leq 12}$ forment un système complet d'événements de Ω .

I. Variables aléatoires

2. Image d'une variable aléatoire, Image réciproque

Exemple 3 :

On lance deux fois un dé bien équilibré à 6 faces.

- L'univers de cette expérience aléatoire est l'ensemble des couples de $\llbracket 1; 6 \rrbracket^2$ donc $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket^2$.
- Le dé étant bien équilibré, la probabilité sur Ω est uniforme.
- On peut définir la fonction S sur Ω qui donne la somme des valeurs obtenues lors des deux lancers.

S est une v.a.r sur Ω de support $S(\Omega) = \llbracket 2; 12 \rrbracket$.

Ainsi, $S : \llbracket 1; 6 \rrbracket^2 \rightarrow \llbracket 2; 12 \rrbracket$

$$(i; j) \mapsto i + j.$$

- $(S = 2) = \{(1; 1)\}.$
- $(S = 3) = \{(1; 2), (2; 1)\}.$
- ...
- $(S = 7) = \{(1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2), (6; 1)\}.$
- ...
- $(S = 12) = \{(6; 6)\}.$

On peut alors remarquer que les événements $(S = k)_{2 \leq k \leq 12}$ forment un système complet d'événements de Ω .

I. Variables aléatoires

2. Image d'une variable aléatoire, Image réciproque

Théorème 1 :

Soit $\mathcal{X} : \Omega \mapsto E$ une variable aléatoire de support $\mathcal{X}(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_k \in E$.

Les événements $(\mathcal{X} = x_1), (\mathcal{X} = x_2), \dots, (\mathcal{X} = x_n)$ forment un système complet d'événements de Ω appelé le système complet d'événements associé à \mathcal{X} .



I. Variables aléatoires

2. Image d'une variable aléatoire, Image réciproque

Théorème I :

Soit $\mathcal{X} : \Omega \mapsto E$ une variable aléatoire de support $\mathcal{X}(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_k \in E$.

Les événements $(\mathcal{X} = x_1), (\mathcal{X} = x_2), \dots, (\mathcal{X} = x_n)$ forment un système complet d'événements de Ω appelé le système complet d'événements associé à \mathcal{X} .

En particulier, si on pose pour tout entier $k \in \llbracket 1; n \rrbracket, p_k = P(\mathcal{X} = x_k)$ alors :

$$p_k \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n p_k = 1.$$



I. Variables aléatoires

3. Fonction d'une variable aléatoire

Une variable aléatoire réelle est une fonction.

- On peut donc, grâce à deux variables aléatoires réelles X, Y , définir leur somme $X + Y$, leur produit XY , le produit par un scalaire λX qui sont de nouvelles variables aléatoires.

Par exemple,



I. Variables aléatoires

3. Fonction d'une variable aléatoire

Une variable aléatoire réelle est une fonction.

- On peut donc, grâce à deux variables aléatoires réelles X, Y , définir leur somme $X + Y$, leur produit XY , le produit par un scalaire λX qui sont de nouvelles variables aléatoires.

Par exemple,

Définition 3 (Somme de variables aléatoires) :

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur l'univers Ω et $\lambda \in \mathbb{R}$.



I. Variables aléatoires

3. Fonction d'une variable aléatoire

Une variable aléatoire réelle est une fonction.

- On peut donc, grâce à deux variables aléatoires réelles X, Y , définir leur somme $X + Y$, leur produit XY , le produit par un scalaire λX qui sont de nouvelles variables aléatoires.

Par exemple,

Définition 3 (Somme de variables aléatoires) :

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur l'univers Ω et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- On appelle somme des variables aléatoires, notée $Z = X + Y$, la variable aléatoire définie sur Ω par :

$$\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega).$$



I. Variables aléatoires

3. Fonction d'une variable aléatoire

Une variable aléatoire réelle est une fonction.

- On peut donc, grâce à deux variables aléatoires réelles X, Y , définir leur somme $X + Y$, leur produit XY , le produit par un scalaire λX qui sont de nouvelles variables aléatoires.

Par exemple,

Définition 3 (Somme de variables aléatoires) :

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur l'univers Ω et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- On appelle somme des variables aléatoires, notée $Z = X + Y$, la variable aléatoire définie sur Ω par :

$$\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega).$$

- On appelle produit des variables aléatoires, notée $Z = XY$, la variable aléatoire définie sur Ω par :

$$\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = X(\omega) \times Y(\omega).$$



I. Variables aléatoires

3. Fonction d'une variable aléatoire

Une variable aléatoire réelle est une fonction.

- On peut donc, grâce à deux variables aléatoires réelles X, Y , définir leur somme $X + Y$, leur produit XY , le produit par un scalaire λX qui sont de nouvelles variables aléatoires.

Par exemple,

Définition 3 (Somme de variables aléatoires) :

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur l'univers Ω et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- On appelle somme des variables aléatoires, notée $Z = X + Y$, la variable aléatoire définie sur Ω par :

$$\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega).$$

- On appelle produit des variables aléatoires, notée $Z = XY$, la variable aléatoire définie sur Ω par :

$$\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = X(\omega) \times Y(\omega).$$

- Pour une v.a.r X , on appelle produit par un scalaire, notée $Z = \lambda X$, la variable aléatoire définie sur Ω par :

$$\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = \lambda X(\omega).$$



I. Variables aléatoires

3. Fonction d'une variable aléatoire

Exemple 4 :

- On lance cinq dés équilibrés et on compte la somme des nombres obtenus. Soit X la variable aléatoire correspondant à cette somme.

Alors, on peut écrire X sous la forme $X = X_1 + \dots + X_5$ où, pour tout $k \in \llbracket 1; 5 \rrbracket$, X_k correspond au résultat du dé numéro k .



I. Variables aléatoires

3. Fonction d'une variable aléatoire

Exemple 4 :

- On lance cinq dés équilibrés et on compte la somme des nombres obtenus. Soit X la variable aléatoire correspondant à cette somme.

Alors, on peut écrire X sous la forme $X = X_1 + \dots + X_5$ où, pour tout $k \in \llbracket 1; 5 \rrbracket$, X_k correspond au résultat du dé numéro k .

ATTENTION

$X \neq 5 \times X_1$. L'ensemble des valeurs prises par X est $\{5; 6; 7; 8; 9; \dots; 30\}$ (somme possible des 5 dés) alors que $5 \times X_1$ ne peut prendre que les valeurs 5, 10, 15, 20, 25 et 30.



I. Variables aléatoires

3. Fonction d'une variable aléatoire

Exemple 4 :

- On lance cinq dés équilibrés et on compte la somme des nombres obtenus. Soit X la variable aléatoire correspondant à cette somme.

Alors, on peut écrire X sous la forme $X = X_1 + \dots + X_5$ où, pour tout $k \in \llbracket 1; 5 \rrbracket$, X_k correspond au résultat du dé numéro k .

ATTENTION

$X \neq 5 \times X_1$. L'ensemble des valeurs prises par X est $\{5; 6; 7; 8; 9; \dots; 30\}$ (somme possible des 5 dés) alors que $5 \times X_1$ ne peut prendre que les valeurs 5, 10, 15, 20, 25 et 30.

- On lance 20 fois une pièce de monnaie et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de pile obtenu. On peut écrire la variable aléatoire X sous la forme $X = X_1 + X_2 \dots + X_{20}$ où, pour tout $k \in \llbracket 1; 20 \rrbracket$, $X_k = 1$ si on a obtenu pile au $k^{\text{ème}}$ lancer et $X_k = 0$ sinon.



I. Variables aléatoires

3. Fonction d'une variable aléatoire

Exercice 1 :

Lors d'une soirée au casino, Nadège décide de tester différents jeux : une fois la roulette et deux fois les machines à sous.

Elle note X la variable aléatoire correspondant au gain total remporté.

- ④ Pour faciliter l'étude, elle écrit $X = X_1 + X_2 + X_3$.
À quoi les variables aléatoires X_1 , X_2 et X_3 peuvent-elles alors correspondre ?



I. Variables aléatoires

3. Fonction d'une variable aléatoire

Exercice 1 :

Lors d'une soirée au casino, Nadège décide de tester différents jeux : une fois la roulette et deux fois les machines à sous.

Elle note X la variable aléatoire correspondant au gain total remporté.

- 1 Pour faciliter l'étude, elle écrit $X = X_1 + X_2 + X_3$.
À quoi les variables aléatoires X_1 , X_2 et X_3 peuvent-elles alors correspondre ?
- 2 Yvann souhaite écrire X sous la forme $X = X_1 + 2X_2$.
A-t-il raison ? Justifier.



I. Variables aléatoires

3. Fonction d'une variable aléatoire

Une variable aléatoire réelle est une fonction.

- On peut également composer la variable aléatoire réelle $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ par une fonction réelle $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. On obtient alors une nouvelle variable aléatoire

$$f \circ X : \Omega \mapsto \mathbb{R}.$$



I. Variables aléatoires

3. Fonction d'une variable aléatoire

Une variable aléatoire réelle est une fonction.

- On peut également composer la variable aléatoire réelle $\mathcal{X} : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ par une fonction réelle $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. On obtient alors une nouvelle variable aléatoire

$$f \circ \mathcal{X} : \Omega \mapsto \mathbb{R}.$$

Exemple 5 :

Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine. Alors $f(\mathcal{X}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ notée

$$\omega \mapsto a\omega + b$$

$$f(\mathcal{X}) = a\mathcal{X} + b.$$



I. Variables aléatoires

3. Fonction d'une variable aléatoire

Une variable aléatoire réelle est une fonction.

- On peut également composer la variable aléatoire réelle $\mathcal{X} : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ par une fonction réelle $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. On obtient alors une nouvelle variable aléatoire

$$f \circ \mathcal{X} : \Omega \mapsto \mathbb{R}.$$

Exemple 5 :

Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine. Alors $f(\mathcal{X}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ notée

$$\omega \mapsto a\omega + b$$

$$f(\mathcal{X}) = a\mathcal{X} + b.$$

ATTENTION

Cette variable aléatoire est généralement notée $f(\mathcal{X})$ mais il faudra bien comprendre $f \circ \mathcal{X}$.



I. Variables aléatoires

4. Loi d'une variable aléatoire

Une variable X aléatoire étant donnée, on cherche à déterminer la probabilité d'obtenir un élément de $X(\Omega)$.

Dans l' **exemple (1)** :

| | | | | |
|------------|---------------|---------------|----------------|----------------|
| x | -1 | 2 | 5 | 10 |
| $P(X = x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{32}$ | $\frac{1}{32}$ |



I. Variables aléatoires

4. Loi d'une variable aléatoire

Une variable \mathcal{X} aléatoire étant donnée, on cherche à déterminer la probabilité d'obtenir un élément de $\mathcal{X}(\Omega)$.

Dans l' **exemple (1)** :

| | | | | |
|----------------------|---------------|---------------|----------------|----------------|
| x | -1 | 2 | 5 | 10 |
| $P(\mathcal{X} = x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{32}$ | $\frac{1}{32}$ |

Mais on peut aussi définir $P(\mathcal{X} \in \{2, 5, 10\}) = \frac{1}{2}$.



I. Variables aléatoires

4. Loi d'une variable aléatoire

Une variable \mathcal{X} aléatoire étant donnée, on cherche à déterminer la probabilité d'obtenir un élément de $\mathcal{X}(\Omega)$.

Dans l' **exemple (1)** :

| | | | | |
|----------------------|---------------|---------------|----------------|----------------|
| x | -1 | 2 | 5 | 10 |
| $P(\mathcal{X} = x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{32}$ | $\frac{1}{32}$ |

Mais on peut aussi définir $P(\mathcal{X} \in \{2, 5, 10\}) = \frac{1}{2}$.

La loi de probabilité de \mathcal{X} , notée $P_{\mathcal{X}}$ associe à toute partie A de $\mathcal{X}(\Omega)$ la probabilité $P(\mathcal{X} \in A)$.



I. Variables aléatoires

4. Loi d'une variable aléatoire

Définition 4 :

Soit $X : \Omega \mapsto E$ une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini (Ω, P) .

On appelle **loi de probabilité** de X , notée P_X , l'application

$$\begin{aligned} P_X : X(\Omega) &\longrightarrow [0; 1] \\ x &\longmapsto P(X = x). \end{aligned}$$



I. Variables aléatoires

4. Loi d'une variable aléatoire

Exercice 2 :

Un sac contient 6 jetons : deux numérotés 1, trois numérotés 2 et un numéroté 3. Chaque jeton apparaît avec la même probabilité. On tire simultanément trois jetons. On note X la somme des numéros portés sur les trois jetons.

Déterminer la loi de X .



I. Variables aléatoires

4. Loi d'une variable aléatoire

Proposition 2 :

Soit $X : \Omega \mapsto E$ une variable aléatoire de loi de probabilité P_X .

L'application P_X définit une probabilité sur Ω et on a :

$$\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)), P(X \in A) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \in A}} P(X = x) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \in A}} P_X(x).$$



I. Variables aléatoires

4. Loi d'une variable aléatoire

Proposition 2 :

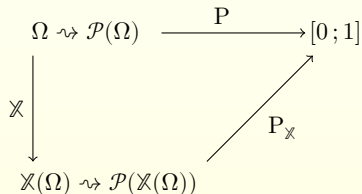
Soit $X : \Omega \mapsto E$ une variable aléatoire de loi de probabilité P_X .

L'application P_X définit une probabilité sur Ω et on a :

$$\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)), P(X \in A) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \in A}} P(X = x) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \in A}} P_X(x).$$

Remarques :

- 1 Dit autrement : on a changé d'univers ! Au lieu de considérer l'univers entier, on travaille désormais avec un univers constitué seulement du support de X .



I. Variables aléatoires

4. Loi d'une variable aléatoire

Proposition 2 :

Soit $\mathcal{X} : \Omega \mapsto E$ une variable aléatoire de loi de probabilité $P_{\mathcal{X}}$.

L'application $P_{\mathcal{X}}$ définit une probabilité sur Ω et on a :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathcal{X}(\Omega)), P(\mathcal{X} \in A) = \sum_{\substack{x \in \mathcal{X}(\Omega) \\ x \in A}} P(\mathcal{X} = x) = \sum_{\substack{x \in \mathcal{X}(\Omega) \\ x \in A}} P_{\mathcal{X}}(x).$$

Remarques :

- 2 La donnée des $P(\mathcal{X} = x)$ pour tout $x \in \mathcal{X}(\Omega)$ suffit à définir $P_{\mathcal{X}}$.
On se contente en général de ces « germes de probabilités ».
Dans certains ouvrages, on définit même :

$$P_{\mathcal{X}} : \mathcal{X}(\Omega) \mapsto [0; 1]$$

au lieu de

$$P_{\mathcal{X}} : \mathcal{P}(\mathcal{X}(\Omega)) \mapsto [0; 1]$$



I. Variables aléatoires

4. Loi d'une variable aléatoire

Exemple 6 :

Reprenons l'exemple (3)

$$\blacksquare P(S = 2) = \frac{\text{card}(S = 2)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{36}.$$

$$\blacksquare P(S = 3) = \frac{\text{card}(S = 3)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{18}.$$

■ ...

$$\blacksquare P(S = 7) = \frac{\text{card}(S = 7)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{6}.$$

■ ...

$$\blacksquare P(S = 12) = \frac{\text{card}(S = 12)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{36}.$$

I. Variables aléatoires

4. Loi d'une variable aléatoire

Exemple 6 :

Reprenons l'exemple (3)

$$\blacksquare P(S = 2) = \frac{\text{card}(S = 2)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{36}.$$

$$\blacksquare P(S = 3) = \frac{\text{card}(S = 3)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{18}.$$

■ ...

$$\blacksquare P(S = 7) = \frac{\text{card}(S = 7)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{6}.$$

■ ...

$$\blacksquare P(S = 12) = \frac{\text{card}(S = 12)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{36}.$$

L'application $P_S : \llbracket 2; 12 \rrbracket \rightarrow [0; 1]$ est la loi de probabilité de S .

$$k \mapsto P(S = k)$$

I. Variables aléatoires

4. Loi d'une variable aléatoire

Exemple 6 :

Reprenons l'exemple (3)

$$\blacksquare P(S = 2) = \frac{\text{card}(S = 2)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{36}.$$

$$\blacksquare P(S = 3) = \frac{\text{card}(S = 3)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{18}.$$

■ ...

$$\blacksquare P(S = 7) = \frac{\text{card}(S = 7)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{6}.$$

■ ...

$$\blacksquare P(S = 12) = \frac{\text{card}(S = 12)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{36}.$$

L'application $P_S : [2; 12] \rightarrow [0; 1]$ est la loi de probabilité de S .

$$k \mapsto P(S = k)$$

On peut regrouper les résultats dans un tableau :

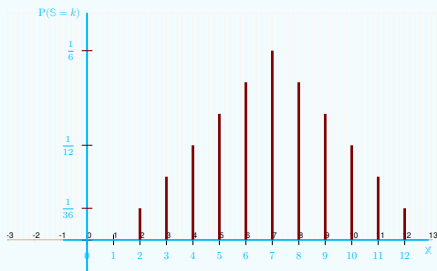
| | | | | | | | | | | | |
|------------|----------------|----------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|----------------|----------------|
| k | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| $P(S = k)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{36}$ |

I. Variables aléatoires

4. Loi d'une variable aléatoire

Exemple 6 :

Reprenons l'exemple (3) On peut aussi représenter la loi de S par un diagramme en bâtons :

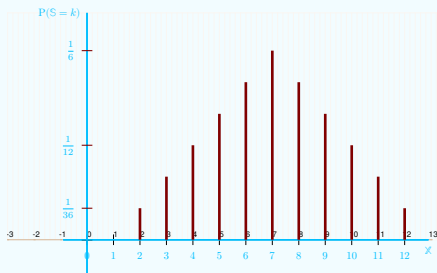


I. Variables aléatoires

4. Loi d'une variable aléatoire

Exemple 6 :

Reprenons l'exemple (3) On peut aussi représenter la loi de S par un diagramme en bâtons :



Pour toute partie A de $\mathcal{S}(\Omega) = \llbracket 2; 12 \rrbracket$, on peut alors calculer la probabilité de l'événement $(S \in A)$.

Par exemple, $P(S \in \{4, 6, 11\}) = P(S = 4) + P(S = 6) + P(S = 11)$

$$= P_S(4) + P_S(6) + P_S(11) = \frac{1}{12} + \frac{5}{36} + \frac{1}{18} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

II. Espérance d'une variable aléatoire réelle

- 1 Variables aléatoires
- 2 Espérance d'une variable aléatoire réelle**
 - Définition
 - Linéarité
 - Formule de transfert
- 3 Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle
- 4 Lois usuelles
- 5 Couple de variables aléatoires
- 6 Variables aléatoires indépendantes
- 7 Covariance de deux variables aléatoires



II. Espérance d'une variable aléatoire réelle

1. Définition

Définition 5 :

Soit $\mathcal{X} : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle** de support $\mathcal{X}(\Omega) = \{x_1, \dots, x_p\}$ où $p \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \llbracket 1 ; p \rrbracket, x_k \in \mathbb{R}$.

- On appelle **espérance** de \mathcal{X} , notée $E(\mathcal{X})$, le réel définit par :

$$E(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^p x_i P(\mathcal{X} = x_i) = \sum_{x \in \mathcal{X}(\Omega)} x P(\mathcal{X} = x).$$



II. Espérance d'une variable aléatoire réelle

1. Définition

Définition 5 :

Soit $\mathcal{X} : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle** de support $\mathcal{X}(\Omega) = \{x_1, \dots, x_p\}$ où $p \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, x_k \in \mathbb{R}$.

- On appelle **espérance** de \mathcal{X} , notée $E(\mathcal{X})$, le réel définit par :

$$E(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^p x_i P(\mathcal{X} = x_i) = \sum_{x \in \mathcal{X}(\Omega)} x P(\mathcal{X} = x).$$

- On dit que \mathcal{X} est une **variable centrée** si $E(\mathcal{X}) = 0$.



II. Espérance d'une variable aléatoire réelle

1. Définition

Remarques :

- 1 Dans les démonstrations et les résultats plus théoriques, on reviendra souvent à

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\}).$$



II. Espérance d'une variable aléatoire réelle

1. Définition

Remarques :

- ① Dans les démonstrations et les résultats plus théoriques, on reviendra souvent à

$$E(\mathbb{X}) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{X}(\omega)P(\{\omega\}).$$

- ② L'espérance correspond à la moyenne des valeurs prises par \mathbb{X} , pondérée par leur probabilité. C'est donc un indicateur de position.



II. Espérance d'une variable aléatoire réelle

1. Définition

Remarques :

- ① Dans les démonstrations et les résultats plus théoriques, on reviendra souvent à

$$E(\mathbb{X}) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{X}(\omega)P(\{\omega\}).$$

- ② L'espérance correspond à la moyenne des valeurs prises par \mathbb{X} , pondérée par leur probabilité. C'est donc un indicateur de position.
- ③ Plus particulièrement, chaque valeur de x , x décrivant $\mathbb{X}(\Omega)$, s'y trouve comptabilisé en proportion de sa probabilité d'occurrence $P(\mathbb{X} = x)$. Ainsi, plus $P(\mathbb{X} = x)$ est proche de 1, plus x a d'importance dans le calcul de $E(\mathbb{X})$.



II. Espérance d'une variable aléatoire réelle

1. Définition

Exemple 1 :

Reprenons l'exemple l' exemple (1)

| | | | | |
|------------|---------------|---------------|----------------|----------------|
| x | -1 | 2 | 5 | 10 |
| $P(X = x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{32}$ | $\frac{1}{32}$ |

L'espérance de X est $E(X) = (-1) \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{8} + 5 \times \frac{3}{32} + 10 \times \frac{1}{32} = \frac{33}{32} \simeq 1,03$ euros .

C'est la somme qu'on peut espérer gagner par partie en moyenne, en jouant de nombreuses fois.



II. Espérance d'une variable aléatoire réelle

1. Définition

Exemple 7 :

Reprenons l'exemple l' **exemple (1)**

| | | | | |
|------------|---------------|---------------|----------------|----------------|
| x | -1 | 2 | 5 | 10 |
| $P(X = x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{32}$ | $\frac{1}{32}$ |

L'espérance de X est $E(X) = (-1) \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{8} + 5 \times \frac{3}{32} + 10 \times \frac{1}{32} = \frac{33}{32} \simeq 1,03$ euros .

C'est la somme qu'on peut espérer gagner par partie en moyenne, en jouant de nombreuses fois.

Exemple 8 :

Et si nous reprenons l' **exemple (3)** ,

$$E(S) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{1}{12} + 4 \times \frac{1}{12} + \dots + 11 \times \frac{1}{18} + 12 \times \frac{1}{36} = 7.$$

II. Espérance d'une variable aléatoire réelle

2. Linéarité

Proposition 3 (Linéarité) :

Soient $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles sur Ω fini.

Linéarité : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$.

En particulier, $E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$



II. Espérance d'une variable aléatoire réelle

2. Linéarité

Proposition 3 (Linéarité) :

Soient $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles sur Ω fini.

Linéarité : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$.

En particulier, $E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$

Positivité : Si $X \geq 0$, alors $E(X) \geq 0$.



II. Espérance d'une variable aléatoire réelle

2. Linéarité

Proposition 3 (Linéarité) :

Soient $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles sur Ω fini.

Linéarité : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$.

En particulier, $E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$

Positivité : Si $X \geq 0$, alors $E(X) \geq 0$.

Croissance : Si $X \leq Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$.



II. Espérance d'une variable aléatoire réelle

2. Linéarité

Proposition 3 (Linéarité) :

Soient $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles sur Ω fini.

Linéarité : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$.

En particulier, $E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$

Positivité : Si $X \geq 0$, alors $E(X) \geq 0$.

Croissance : Si $X \leq Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$.

Inégalité triangulaire : $|E(X)| \leq E(|X|)$.



II. Espérance d'une variable aléatoire réelle

2. Linéarité

Proposition 3 (Linéarité) :

Soient $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles sur Ω fini.

Linéarité : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$.

En particulier, $E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$

Positivité : Si $X \geq 0$, alors $E(X) \geq 0$.

Croissance : Si $X \leq Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$.

Inégalité triangulaire : $|E(X)| \leq E(|X|)$.

ATTENTION

La notation $X \geq 0$ est un tantinet abusive et signifie que la fonction X prend des valeurs positives sur Ω *i.e.* $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0$.

De même $X \leq Y \iff \forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega)$.



II. Espérance d'une variable aléatoire réelle

2. Linéarité

Exercice 3 :

Un forain a construit un appareil de jeu contenant six boules blanches et trois boules rouges. Lorsqu'on introduit un jeton dans l'appareil, trois boules prises au hasard tombent dans un panier. Si les trois boules sont rouges, le joueur gagne 100 € ; si deux des boules sont rouges, il gagne 15€, si une seule est rouge, il gagne un lot de 5 €. Le prix du jeton est fixé à 8 €.

- 1 Soit X la variable aléatoire désignant la somme gagnée par le joueur. Déterminer la loi de X , et calculer son espérance. En déduire le gain moyen du forain.



II. Espérance d'une variable aléatoire réelle

2. Linéarité

Exercice 3 :

Un forain a construit un appareil de jeu contenant six boules blanches et trois boules rouges. Lorsqu'on introduit un jeton dans l'appareil, trois boules prises au hasard tombent dans un panier. Si les trois boules sont rouges, le joueur gagne 100 € ; si deux des boules sont rouges, il gagne 15€, si une seule est rouge, il gagne un lot de 5 €. Le prix du jeton est fixé à 8 €.

- 1 Soit X la variable aléatoire désignant la somme gagnée par le joueur. Déterminer la loi de X , et calculer son espérance. En déduire le gain moyen du forain.
- 2 L'appareil ne s'avérant pas suffisamment rentable, le forain envisage deux solutions : augmenter de 1 euro le pris du jeton ou bien ajouter une boule blanche dans l'urne. Quelle est la solution la plus rentable pour le forain ?



II. Espérance d'une variable aléatoire réelle

3. Formule de transfert

La **proposition (3)** permet déjà d'écrire que $E(aX + b) = aE(X) + b$ pour toute fonction affine $x \mapsto ax + b$. On peut aller plus loin :

Théorème 4 (Formule de transfert) :

Soit $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle** de support $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_p\}$ où $p \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, x_k \in \mathbb{R}$.

Soit $f : X(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ une application à valeurs réelles définie sur $X(\Omega)$.

Alors :

$$E(f(X)) = E(f \circ X) = \sum_{k=1}^p P(X = x_k) f(x_k).$$



II. Espérance d'une variable aléatoire réelle

3. Formule de transfert

La **proposition (3)** permet déjà d'écrire que $E(aX + b) = aE(X) + b$ pour toute fonction affine $x \mapsto ax + b$. On peut aller plus loin :

Théorème 4 (Formule de transfert) :

Soit $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle** de support $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_p\}$ où $p \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, x_k \in \mathbb{R}$.

Soit $f : X(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ une application à valeurs réelles définie sur $X(\Omega)$.

Alors :

$$E(f(X)) = E(f \circ X) = \sum_{k=1}^p P(X = x_k) f(x_k).$$

Remarque : Cette formule permet d'éviter le calcul de la loi de $f(X)$ qui peut être compliqué.



II. Espérance d'une variable aléatoire réelle

3. Formule de transfert

Exemple 9 :

On reprend l'exemple (3) où S est la variable aléatoire qui donne la somme des valeurs obtenues lors des deux lancers.

Par exemple, on a alors :

$$E(S^2) = \sum_{i=2}^{12} s^2 \times P(S = s) = 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{1}{18} + \dots + 12^2 \times \frac{1}{36} = \frac{329}{6}.$$



III. Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

- 1 Variables aléatoires
- 2 Espérance d'une variable aléatoire réelle
- 3 Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle**
 - Définitions
 - Inégalité de Markov et Bienaymé-Tchebychev
- 4 Lois usuelles
- 5 Couple de variables aléatoires
- 6 Variables aléatoires indépendantes
- 7 Covariance de deux variables aléatoires



III. Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

1. Définitions

Définition 6 (Variance) :

Soit $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

On appelle **variance** de X , notée $V(X)$, le réel :

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right).$$



III. Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

1. Définitions

Définition 6 (Variance) :

Soit $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

On appelle **variance** de X , notée $V(X)$, le réel :

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right).$$

Remarque : La variance est un *indicateur de dispersion* de la variable aléatoire autour de son espérance.



III. Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

1. Définitions

Définition 6 (Variance) :

Soit $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

On appelle **variance** de X , notée $V(X)$, le réel :

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right).$$

Remarque : La variance est un *indicateur de dispersion* de la variable aléatoire autour de son espérance.

Proposition 5 (Formule de König-Huygens) :

Soit $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

Alors :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$



III. Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

1. Définitions

Définition 6 (Variance) :

Soit $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

On appelle **variance** de X , notée $V(X)$, le réel :

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right).$$

Proposition 5 (Formule de König-Huygens) :

Soit $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

Alors :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Proposition 6 :

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X).$$



III. Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

1. Définitions

Comme $(X - m)^2 \geq 0$, la variance $V(X) = E((X - m)^2)$ est positive. Ce qui permet la définition suivante :

Définition 1 (Écart-type) :

Soit X une variable aléatoire réelle.

On appelle **écart-type** de X , noté $\sigma(X)$, le réel :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$



III. Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

1. Définitions

Comme $(X - m)^2 \geq 0$, la variance $V(X) = E((X - m)^2)$ est positive. Ce qui permet la définition suivante :

Définition 1 (Écart-type) :

Soit X une variable aléatoire réelle.

On appelle **écart-type** de X , noté $\sigma(X)$, le réel :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Remarque : Une v.a.r $Z : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ est dite **centrée** si $E(Z) = 0$ et **réduite** si $\sigma(Z) = 1$.

Par exemple, si $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ est une v.a.r telle que $\sigma(X) > 0$ alors $Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite



III. Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

2. Inégalité de Markov et Bienaymé-Tchebychev

Théorème 7 (Inégalité de Markov ^[1]) :

Soit $Z : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle **positive**.

Alors :

$$\forall a > 0, P(Z \geq a) \leq \frac{E(Z)}{a}.$$



III. Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

2. Inégalité de Markov et Bienaymé-Tchebychev

Théorème 7 (Inégalité de Markov^[1]) :

Soit $Z : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle **positive**.

Alors :

$$\forall a > 0, P(Z \geq a) \leq \frac{E(Z)}{a}.$$

L'inégalité de Markov donne une majoration de la probabilité qu'une variable aléatoire réelle à valeurs positives soit supérieure ou égale à une constante positive.



III. Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

2. Inégalité de Markov et Bienaymé-Tchebychev

Théorème 8 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) :

Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance m et d'écart-type σ .

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$



III. Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

2. Inégalité de Markov et Bienaymé-Tchebychev

Théorème 8 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) :

Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance m et d'écart-type σ .

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

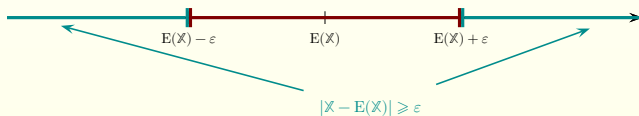


Figure 1 – L'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff confirme que la variance est un indicateur de dispersion.



III. Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

2. Inégalité de Markov et Bienaymé-Tchebychev

Théorème 8 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) :

Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance m et d'écart-type σ .

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Remarque : Cette formule fournit un majorant de l'erreur quand on estime que $X \in]m - \varepsilon, m + \varepsilon[$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|X - m| \geq \varepsilon)$ est la probabilité pour que X prenne des valeurs éloignées de $E(X)$ d'au moins ε . Cette probabilité est faible dès que $V(X)$ est petit et que ε est grand.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev vise donc à montrer que la variable aléatoire X prend des valeurs proches de $E(X)$ avec une grande probabilité, mais elle donne, en général une majoration assez grossière.



IV. Loix usuelles

- 1 Variables aléatoires
- 2 Espérance d'une variable aléatoire réelle
- 3 Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle
- 4 Loix usuelles**
 - Loi uniforme
 - Loi de Bernoulli
 - Loi binomiale
- 5 Couple de variables aléatoires
- 6 Variables aléatoires indépendantes
- 7 Covariance de deux variables aléatoires



IV. Lois usuelles

1. Loi uniforme

Définition 8 (Loi uniforme) :

Soient $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle** et $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_k \in \mathbb{R}$, un sous-ensemble fini non vide de \mathbb{R} .

On dit que X suit la **loi uniforme sur A** et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{U}(A)$ lorsque :

- $X(\Omega) = A$.



IV. Lois usuelles

1. Loi uniforme

Définition 8 (Loi uniforme) :

Soient $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle** et $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $x_k \in \mathbb{R}$, un sous-ensemble fini non vide de \mathbb{R} .

On dit que X suit la **loi uniforme sur A** et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{U}(A)$ lorsque :

- $X(\Omega) = A$.
- $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $P(X = x_k) = \frac{1}{n}$.



IV. Lois usuelles

1. Loi uniforme

Remarques :

- C'est en fait la loi d'équiprobabilité sur A .

| | | | | |
|------------|---------------|---------------|---------|---------------|
| x | x_1 | x_2 | \dots | x_n |
| $P(X = x)$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | \dots | $\frac{1}{n}$ |



IV. Loix usuelles

1. Loi uniforme

Remarques :

- C'est en fait la loi d'équiprobabilité sur A .

| | | | | |
|----------------------|---------------|---------------|---------|---------------|
| x | x_1 | x_2 | \dots | x_n |
| $P(\mathcal{X} = x)$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | \dots | $\frac{1}{n}$ |

- On retrouve souvent dans les exercices la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$:

| | | | | |
|----------------------|---------------|---------------|---------|---------------|
| x | 1 | 2 | \dots | n |
| $P(\mathcal{X} = x)$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | \dots | $\frac{1}{n}$ |

Par exemple, le résultat d'un lancer de dé supposé honnête suit la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$.



IV. Lois usuelles

2. Loi de Bernoulli

Définition 9 (Loi de Bernoulli) :

Soient $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle** et $p \in [0; 1]$.

On dit que X suit la **loi de Bernoulli de paramètre p** et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$ lorsque :

- $X(\Omega) = \{0, 1\}$



IV. Lois usuelles

2. Loi de Bernoulli

Définition 9 (Loi de Bernoulli) :

Soient $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle** et $p \in [0; 1]$.

On dit que X suit la **loi de Bernoulli de paramètre p** et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$ lorsque :

- $X(\Omega) = \{0, 1\}$
- $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$.



IV. Lois usuelles

2. Loi de Bernoulli

Définition 9 (Loi de Bernoulli) :

Soient $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle** et $p \in [0; 1]$.

On dit que X suit la **loi de Bernoulli de paramètre p** et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$ lorsque :

- $X(\Omega) = \{0, 1\}$
- $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$.

On pose souvent $q = 1 - p$.



IV. Lois usuelles

2. Loi de Bernoulli

Remarques :

- En résumé :

| | | |
|------------|---------|-----|
| x | 0 | 1 |
| $P(X = x)$ | $1 - p$ | p |



IV. Loix usuelles

2. Loi de Bernoulli

Remarques :

- En résumé :

| | | |
|----------------------|---------|-----|
| x | 0 | 1 |
| $P(\mathcal{X} = x)$ | $1 - p$ | p |

- Cette loi modélise le succès ($\mathcal{X} = 1$) ou l'échec ($\mathcal{X} = 0$) à une expérience aléatoire donnée. p est la probabilité de succès.
On dira donc qu'une expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli lorsqu'elle admet seulement deux issues possibles, moralement appelées échec et succès.



IV. Lois usuelles

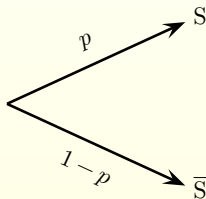
2. Loi de Bernoulli

Remarques :

- En résumé :

| | | |
|------------|---------|-----|
| x | 0 | 1 |
| $P(X = x)$ | $1 - p$ | p |

- Cette loi modélise le succès ($X = 1$) ou l'échec ($X = 0$) à une expérience aléatoire donnée. p est la probabilité de succès.
On dira donc qu'une expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli lorsqu'elle admet seulement deux issues possibles, moralement appelées échec et succès.
- L'arbre correspondant s'appelle une **épreuve de Bernoulli**.



IV. Lois usuelles

2. Loi de Bernoulli

Exemple 10 :

- Le jeu du pile ou face : On considère par exemple comme succès « obtenir pile » et comme échec « obtenir face ».

$$p = \frac{1}{2}.$$



IV. Lois usuelles

2. Loi de Bernoulli

Exemple 10 :

- Le jeu du pile ou face : On considère par exemple comme succès « obtenir pile » et comme échec « obtenir face ».

$$p = \frac{1}{2}.$$

- On lance un dé et on considère par exemple comme succès « obtenir un six » et comme échec « ne pas obtenir un six ».

$$p = \frac{1}{6}.$$



IV. Loix usuelles

2. Loi de Bernoulli

Exemple 10 :

- Le jeu du pile ou face : On considère par exemple comme succès « obtenir pile » et comme échec « obtenir face ».

$$p = \frac{1}{2}.$$

- On lance un dé et on considère par exemple comme succès « obtenir un six » et comme échec « ne pas obtenir un six ».

$$p = \frac{1}{6}.$$

- Interroger une personne dans la rue et lui demander si elle est gauchère est une épreuve de Bernoulli de succès S « la personne est gauchère ».

$$p \simeq 0,13.$$



IV. Lois usuelles

2. Loi de Bernoulli

Proposition 10 :

Si $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$ alors :

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1 - p).$$



IV. Lois usuelles

3. Loi binomiale

Définition 10 (Loi binomiale) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle **schéma de Bernoulli** (d'ordre n) toute répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

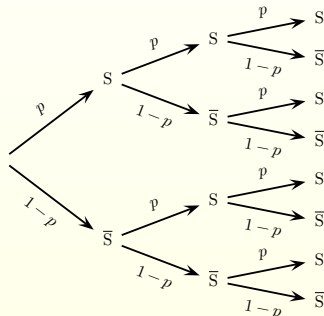


Figure 1 – Schéma de Bernoulli d'ordre 3.



IV. Loix usuelles

3. Loi binomiale

Exemple II :

- Soit n un entier naturel non nul.
Répéter n fois chacune des expériences de l' **exemple (10)** est un schéma de Bernoulli (d'ordre n).



IV. Lois usuelles

3. Loi binomiale

Exemple II :

- Soit n un entier naturel non nul.
Répéter n fois chacune des expériences de l' **exemple (10)** est un schéma de Bernoulli (d'ordre n).
- On peut aussi considérer une urne opaque dans laquelle ont été placées une boule verte et deux boules bleues, toutes indiscernables au toucher.



IV. Loix usuelles

3. Loi binomiale

Exemple II :

- Soit n un entier naturel non nul.
Répéter n fois chacune des expériences de l' **exemple (10)** est un schéma de Bernoulli (d'ordre n).
- On peut aussi considérer une urne opaque dans laquelle ont été placées une boule verte et deux boules bleues, toutes indiscernables au toucher.
 - ① On prélève alors une boule dans cette urne, on note sa couleur, puis on remet la boule dans l'urne.



IV. Loix usuelles

3. Loi binomiale

Exemple II :

- Soit n un entier naturel non nul.
Répéter n fois chacune des expériences de l' **exemple** (10) est un schéma de Bernoulli (d'ordre n).
- On peut aussi considérer une urne opaque dans laquelle ont été placées une boule verte et deux boules bleues, toutes indiscernables au toucher.
 - ① On prélève alors une boule dans cette urne, on note sa couleur, puis on remet la boule dans l'urne.
 - ② On répète ainsi dix fois l'expérience et on s'intéresse aux boules bleues obtenues.



IV. Loix usuelles

3. Loi binomiale

Exemple II :

- Soit n un entier naturel non nul.
Répéter n fois chacune des expériences de l' **exemple** (10) est un schéma de Bernoulli (d'ordre n).
- On peut aussi considérer une urne opaque dans laquelle ont été placées une boule verte et deux boules bleues, toutes indiscernables au toucher.
 - ❶ On prélève alors une boule dans cette urne, on note sa couleur, puis on remet la boule dans l'urne.
 - ❷ On répète ainsi dix fois l'expérience et on s'intéresse aux boules bleues obtenues.
 - ❸ Chaque tirage est une épreuve de Bernoulli de succès S : « La boule est bleue » dont la probabilité est $p = \frac{2}{3}$.



IV. Loix usuelles

3. Loi binomiale

Exemple II :

- Soit n un entier naturel non nul.
Répéter n fois chacune des expériences de l' **exemple** (10) est un schéma de Bernoulli (d'ordre n).
- On peut aussi considérer une urne opaque dans laquelle ont été placées une boule verte et deux boules bleues, toutes indiscernables au toucher.
 - ❶ On prélève alors une boule dans cette urne, on note sa couleur, puis on remet la boule dans l'urne.
 - ❷ On répète ainsi dix fois l'expérience et on s'intéresse aux boules bleues obtenues.
 - ❸ Chaque tirage est une épreuve de Bernoulli de succès S : « La boule est bleue » dont la probabilité est $p = \frac{2}{3}$.
 - ❹ Comme les dix tirages se font avec remise, les tirages sont identiques et indépendants : on a bien un schéma de Bernoulli (d'ordre $n = 10$).



IV. Lois usuelles

3. Loi binomiale

Définition II :

Soient $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle**, $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $p \in [0; 1]$.

On dit que X suit la **loi binomiale de paramètres n et p** et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$ lorsque :

- $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$.



IV. Lois usuelles

3. Loi binomiale

Définition II :

Soient $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle**, $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $p \in [0; 1]$.

On dit que X suit la **loi binomiale de paramètres n et p** et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$ lorsque :

- $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$.

- $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.



IV. Lois usuelles

3. Loi binomiale

Définition II :

Soient $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une variable aléatoire **réelle**, $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $p \in [0; 1]$.

On dit que X suit la **loi binomiale de paramètres n et p** et on note $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$ lorsque :

- $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$.
- $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

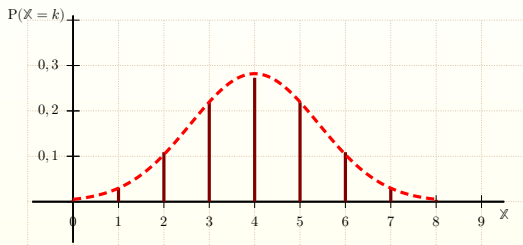
Remarque : On peut vérifier que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n P(X = k) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= [p + (1-p)]^n \\ &= 1. \end{aligned}$$



IV. Lois usuelles

3. Loi binomiale



$$P(X = k) = \binom{8}{k} 0,5^k 0,5^{8-k} = \binom{8}{k} 0,5^8.$$

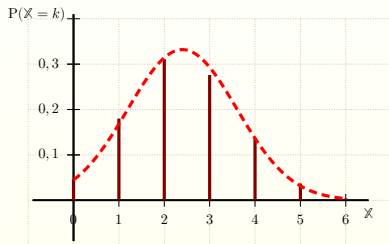
| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| P(X = k) | 0,004 | 0,031 | 0,109 | 0,219 | 0,273 | 0,219 | 0,109 | 0,031 | 0,004 |

Figure 2 – Représentation (symétrique) de $\mathcal{B}(8; 0,5)$.



IV. Lois usuelles

3. Loi binomiale



$$P(X = k) = \binom{6}{k} 0,4^k 0,6^{6-k}.$$

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| P(X = k) | 0,046 | 0,187 | 0,311 | 0,276 | 0,138 | 0,037 | 0,004 |

Figure 3 – Représentation (asymétrique) de $\mathcal{B}(6; 0,4)$.



IV. Lois usuelles

3. Loi binomiale

Exemple 12 (Classique) :

Une urne contient des boules blanches et noires avec une proportion p de boules blanches.

On pioche n boules avec remise et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches tirées après les n tirages.

X suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$.



IV. Loix usuelles

3. Loi binomiale

Exemple 12 (Classique) :

Une urne contient des boules blanches et noires avec une proportion p de boules blanches.

On pioche n boules avec remise et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches tirées après les n tirages.

X suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Exercice 4 :

Une personne sur 1500 est daltonienne. Combien de personnes doit-on choisir pour être sûr à 95% d'avoir au moins un daltonien ?



IV. Lois usuelles

3. Loi binomiale

Proposition II :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p .
Alors,

$$E(X) = np.$$



IV. Loix usuelles

3. Loi binomiale

Exercice 5 :

On considère qu'à un concours, un candidat a 20% de chances de réussir. On prend un groupe de 25 candidats au hasard.

- 1 Quelle est la probabilité qu'au moins un candidat réussisse ?



IV. Loix usuelles

3. Loi binomiale

Exercice 5 :

On considère qu'à un concours, un candidat a 20% de chances de réussir. On prend un groupe de 25 candidats au hasard.

- 1 Quelle est la probabilité qu'au moins un candidat réussisse ?
- 2 Quelle est la probabilité qu'au plus deux candidats réussissent ?



IV. Lois usuelles

3. Loi binomiale

Exercice 5 :

On considère qu'à un concours, un candidat a 20% de chances de réussir. On prend un groupe de 25 candidats au hasard.

- 1 Quelle est la probabilité qu'au moins un candidat réussisse ?
- 2 Quelle est la probabilité qu'au plus deux candidats réussissent ?
- 3 Quelle est la probabilité que dix candidats réussissent ?



V. Couple de variables aléatoires

- 1 Variables aléatoires
- 2 Espérance d'une variable aléatoire réelle
- 3 Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle
- 4 Lois usuelles
- 5 Couple de variables aléatoires**
 - Lois conjointe et marginale
 - Loi conditionnelle
- 6 Variables aléatoires indépendantes
- 7 Covariance de deux variables aléatoires



V. Couple de variables aléatoires

1. Introduction

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.

- On en tire une et on note son numéro X .



V. Couple de variables aléatoires

1. Introduction

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.

- On en tire une et on note son numéro X .
- On retire alors toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à X .



V. Couple de variables aléatoires

1. Introduction

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.

- On en tire une et on note son numéro X .
- On retire alors toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à X .
- On tire une nouvelle boule dont le numéro est Y .



V. Couple de variables aléatoires

1. Introduction

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.

- On en tire une et on note son numéro X .
- On retire alors toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à X .
- On tire une nouvelle boule dont le numéro est Y .

Le support de chacune de ces variables aléatoires réelles est

$X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1 ; 6 \rrbracket$. Ω désignant l'ensemble des tirages sans remise de l'urne.



V. Couple de variables aléatoires

1. Introduction

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.

- On en tire une et on note son numéro X .
- On retire alors toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à X .
- On tire une nouvelle boule dont le numéro est Y .

Le support de chacune de ces variables aléatoires réelles est

$X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1 ; 6 \rrbracket$. Ω désignant l'ensemble des tirages sans remise de l'urne. Ω est donc l'ensemble des 2-arrangements de l'ensemble formé des 6 boules de l'urne.



V. Couple de variables aléatoires

1. Introduction

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.

- On en tire une et on note son numéro X .
- On retire alors toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à X .
- On tire une nouvelle boule dont le numéro est Y .

Le support de chacune de ces variables aléatoires réelles est

$X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1 ; 6 \rrbracket$. Ω désignant l'ensemble des tirages sans remise de l'urne. Ω est donc l'ensemble des 2-arrangements de l'ensemble formé des 6 boules de l'urne.

Le couple (X, Y) est une nouvelle variable aléatoire de support $\llbracket 1 ; 6 \rrbracket \times \llbracket 1 ; 6 \rrbracket$.



V. Couple de variables aléatoires

1. Introduction

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.

- On en tire une et on note son numéro X .
- On retire alors toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à X .
- On tire une nouvelle boule dont le numéro est Y .

Le support de chacune de ces variables aléatoires réelles est

$X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1; 6 \rrbracket$. Ω désignant l'ensemble des tirages sans remise de l'urne. Ω est donc l'ensemble des 2-arrangements de l'ensemble formé des 6 boules de l'urne.

Le couple (X, Y) est une nouvelle variable aléatoire de support $\llbracket 1; 6 \rrbracket \times \llbracket 1; 6 \rrbracket$.
On veut déterminer la loi de (X, Y) .



V. Couple de variables aléatoires

1. Introduction

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.

- On en tire une et on note son numéro \mathcal{X} .
- On retire alors toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à \mathcal{X} .
- On tire une nouvelle boule dont le numéro est \mathcal{Y} .

Le support de chacune de ces variables aléatoires réelles est

$\mathcal{X}(\Omega) = \mathcal{Y}(\Omega) = \llbracket 1 ; 6 \rrbracket$. Ω désignant l'ensemble des tirages sans remise de l'urne. Ω est donc l'ensemble des 2-arrangements de l'ensemble formé des 6 boules de l'urne.

Le couple $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ est une nouvelle variable aléatoire de support $\llbracket 1 ; 6 \rrbracket \times \llbracket 1 ; 6 \rrbracket$.

On veut déterminer la loi de $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Cela revient à chercher, pour tout couple $(i; j) \in \llbracket 1 ; 6 \rrbracket^2$,

$$P((\mathcal{X} = i) \cap (\mathcal{Y} = j)).$$



V. Couple de variables aléatoires

1. Introduction

Le couple (X, Y) est une nouvelle variable aléatoire de support $\llbracket 1; 6 \rrbracket \times \llbracket 1; 6 \rrbracket$.

On veut déterminer la loi de (X, Y) .

Cela revient à chercher, pour tout couple $(i; j) \in \llbracket 1; 6 \rrbracket^2$,

$$P((X = i) \cap (Y = j)).$$

$$\text{Or, } P((X = i) \cap (Y = j)) = P(X = i) \times P_{(X=i)}(Y = j) = \begin{cases} \frac{1}{6} \times \frac{1}{i} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases} .$$



V. Couple de variables aléatoires

1. Introduction

Le couple (X, Y) est une nouvelle variable aléatoire de support $\llbracket 1; 6 \rrbracket \times \llbracket 1; 6 \rrbracket$.

On veut déterminer la loi de (X, Y) .

Cela revient à chercher, pour tout couple $(i; j) \in \llbracket 1; 6 \rrbracket^2$,

$$P((X = i) \cap (Y = j)).$$

$$\text{Or, } P((X = i) \cap (Y = j)) = P(X = i) \times P_{(X=i)}(Y = j) = \begin{cases} \frac{1}{6} \times \frac{1}{i} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases} .$$

| $X \setminus Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Total |
|-----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|----------------|---------------|
| 1 | $\frac{1}{6}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 2 | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 3 | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{18}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 4 | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 5 | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{30}$ | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 6 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{6}$ |
| Total | $\frac{49}{120}$ | $\frac{29}{120}$ | $\frac{19}{120}$ | $\frac{37}{360}$ | $\frac{11}{180}$ | $\frac{1}{36}$ | 1 |



V. Couple de variables aléatoires

1. Introduction

| $X \backslash Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Total |
|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|----------------|---------------|
| 1 | $\frac{1}{6}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 2 | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 3 | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{18}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 4 | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 5 | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{30}$ | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 6 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{6}$ |
| Total | $\frac{49}{120}$ | $\frac{29}{120}$ | $\frac{19}{120}$ | $\frac{37}{360}$ | $\frac{11}{180}$ | $\frac{1}{36}$ | 1 |

Commentaires :

- Ce tableau donne la loi, dite **conjointe**, du couple (X, Y) .



V. Couple de variables aléatoires

1. Introduction

| $X \backslash Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Total |
|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|----------------|---------------|
| 1 | $\frac{1}{6}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 2 | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 3 | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{18}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 4 | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 5 | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{30}$ | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 6 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{6}$ |
| Total | $\frac{49}{120}$ | $\frac{29}{120}$ | $\frac{19}{120}$ | $\frac{37}{360}$ | $\frac{11}{180}$ | $\frac{1}{36}$ | 1 |

Commentaires :

- Ce tableau donne la loi, dite **conjointe**, du couple (X, Y) .
- Les marges (obtenues en sommant les valeurs) comportent les lois de X et de Y . On les appellera donc les lois **marginales**.



V. Couple de variables aléatoires

2. Lois conjointe et marginale

Définition 12 :

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers fini Ω à valeurs, respectivement, dans des ensembles E et F quelconques.

- Le couple (X, Y) est également une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans $E \times F$.



V. Couple de variables aléatoires

2. Lois conjointe et marginale

Définition 12 :

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers fini Ω à valeurs, respectivement, dans des ensembles E et F quelconques.

- Le couple (X, Y) est également une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans $E \times F$.
- La loi de probabilité du couple (X, Y) est appelée **loi conjointe** de X et Y .



V. Couple de variables aléatoires

2. Lois conjointe et marginale

Définition 12 :

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers fini Ω à valeurs, respectivement, dans des ensembles E et F quelconques.

- Le couple (X, Y) est également une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans $E \times F$.
- La loi de probabilité du couple (X, Y) est appelée **loi conjointe** de X et Y .
- Les lois de X et Y sont appelées **lois marginales** du couple (X, Y) .



V. Couple de variables aléatoires

2. Lois conjointe et marginale

Proposition 12 (Lois marginales et loi conjointe) :

Soient $X : \Omega \mapsto E$ et $Y : \Omega \mapsto F$ deux variables aléatoires sur des ensembles E et F quelconques.

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P((X = x) \cap (Y = y)).$$

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P((X = x) \cap (Y = y)).$$



V. Couple de variables aléatoires

2. Lois conjointe et marginale

Proposition 12 (Lois marginales et loi conjointe) :

Soient $X : \Omega \mapsto E$ et $Y : \Omega \mapsto F$ deux variables aléatoires sur des ensembles E et F quelconques.

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P((X = x) \cap (Y = y)).$$

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P((X = x) \cap (Y = y)).$$

Moralité : Si on connaît la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires (X, Y) , on peut déterminer les lois marginales.

En revanche, la réciproque est fautive : si on connaît les lois marginales, on ne peut déterminer la loi conjointe.



V. Couple de variables aléatoires

2. Lois conjointe et marginale

On représente souvent la loi de (X, Y) sous la forme d'un tableau à deux entrées donnant $P((X = x) \cap (Y = y))$ en fonction des valeurs possibles de $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$.



V. Couple de variables aléatoires

2. Lois conjointe et marginale

On représente souvent la loi de (X, Y) sous la forme d'un tableau à deux entrées donnant $P((X = x) \cap (Y = y))$ en fonction des valeurs possibles de $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$.

Le tableau ci-dessous illustre le calcul des lois marginales. On note :

- $X : \Omega \mapsto E$ une v.a de support $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$ où $m \in \mathbb{N}^*$ et, $\forall k \in \llbracket 1; m \rrbracket, x_k \in E$.



V. Couple de variables aléatoires

2. Lois conjointe et marginale

On représente souvent la loi de (X, Y) sous la forme d'un tableau à deux entrées donnant $P((X = x) \cap (Y = y))$ en fonction des valeurs possibles de $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$.

Le tableau ci-dessous illustre le calcul des lois marginales. On note :

- $X : \Omega \mapsto E$ une v.a de support $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$ où $m \in \mathbb{N}^*$ et, $\forall k \in \llbracket 1; m \rrbracket, x_k \in E$.
- $Y : \Omega \mapsto F$ une v.a de support $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et, $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, y_k \in F$.



V. Couple de variables aléatoires

2. Lois conjointe et marginale

On représente souvent la loi de (X, Y) sous la forme d'un tableau à deux entrées donnant $P((X = x) \cap (Y = y))$ en fonction des valeurs possibles de $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$.

Le tableau ci-dessous illustre le calcul des lois marginales. On note :

- $X : \Omega \mapsto E$ une v.a de support $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$ où $m \in \mathbb{N}^*$ et, $\forall k \in \llbracket 1; m \rrbracket, x_k \in E$.
- $Y : \Omega \mapsto F$ une v.a de support $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et, $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, y_k \in F$.

| $X \setminus Y$ | y_1 | y_2 | ... | y_n | Total |
|-----------------|-------------------------------------|-------------------------------------|----------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| x_1 | $p_{1,1}$ | $p_{1,2}$ | ... | $p_{1,n}$ | $P(X = x_1) = \sum_{j=1}^n p_{1,j}$ |
| x_2 | $p_{2,1}$ | $p_{2,2}$ | ... | $p_{2,n}$ | $P(X = x_2) = \sum_{j=1}^n p_{2,j}$ |
| \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \vdots | \vdots |
| x_m | $p_{m,1}$ | $p_{m,2}$ | ... | $p_{m,n}$ | $P(X = x_m) = \sum_{j=1}^n p_{m,j}$ |
| Total | $P(Y = y_1) = \sum_{i=1}^m p_{i,1}$ | $P(Y = y_2) = \sum_{i=1}^m p_{i,2}$ | ... | $P(Y = y_n) = \sum_{i=1}^m p_{i,n}$ | 1 |



V. Couple de variables aléatoires

3. Loi conditionnelle

Définition 13 :

Soient E et F deux ensembles quelconques.

Soient $X : \Omega \mapsto E$ et $Y : \Omega \mapsto F$ deux variables aléatoires. Soit $x \in X(\Omega)$.

On appelle **loi conditionnelle sachant que $(X = x)$** la loi définie par :

$$P_{(X=x)}(Y = y) = \frac{P((X = x) \cap (Y = y))}{P(X = x)} \quad \text{pour } y \in Y(\Omega)$$



V. Couple de variables aléatoires

3. Loi conditionnelle

Définition 13 :

Soient E et F deux ensembles quelconques.

Soient $X : \Omega \mapsto E$ et $Y : \Omega \mapsto F$ deux variables aléatoires. Soit $x \in X(\Omega)$.

On appelle **loi conditionnelle sachant que $(X = x)$** la loi définie par :

$$P_{(X=x)}(Y = y) = \frac{P((X = x) \cap (Y = y))}{P(X = x)} \quad \text{pour } y \in Y(\Omega)$$

De même, pour $y \in Y(\Omega)$, on définit la **loi conditionnelle sachant que $(Y = y)$** par :

$$P_{(Y=y)}(X = x) = \frac{P((X = x) \cap (Y = y))}{P(Y = y)} \quad \text{pour } x \in X(\Omega)$$



V. Couple de variables aléatoires

3. Loi conditionnelle

Exercice 6 :

On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire successivement 2 boules. On note X la variable aléatoire définie par $X = 0$ si la première boule est noire et $X = 1$ si elle est blanche. On définit Y de la même façon pour la deuxième boule.

- 1 On effectue les tirages avec remise. Déterminer la loi de probabilité du couple (X, Y) ainsi que les lois marginales de X et Y . Déterminer la loi de X conditionnée par Y ainsi que la loi de Y conditionnée par X .



VI. Variables aléatoires indépendantes

- 1 Variables aléatoires
- 2 Espérance d'une variable aléatoire réelle
- 3 Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle
- 4 Lois usuelles
- 5 Couple de variables aléatoires
- 6 Variables aléatoires indépendantes**
 - Caractérisation
 - Variables aléatoires mutuellement indépendantes
 - Application à la loi binomiale
 - Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes
- 7 Covariance de deux variables aléatoires



VI. Variables aléatoires indépendantes

Définition 14 :

Soit (Ω, \mathcal{P}) un espace probabilisé et X, Y deux variables aléatoires sur Ω .

On dit que les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), \quad P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x) \times P(Y = y)$$



VI. Variables aléatoires indépendantes

Exemple 13 :

| $X \setminus Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Total |
|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---------------|
| 1 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{6}$ |
| 2 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{6}$ |
| 3 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{6}$ |
| 4 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{6}$ |
| 5 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{6}$ |
| 6 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{6}$ |
| Total | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

X et Y sont indépendantes



VI. Variables aléatoires indépendantes

Exemple B :

| $X \setminus Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Total |
|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---------------|
| 1 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{6}$ |
| 2 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{6}$ |
| 3 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{6}$ |
| 4 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{6}$ |
| 5 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{6}$ |
| 6 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{6}$ |
| Total | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

X et Y sont indépendantes

| $X \setminus Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Total |
|-----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 1 | $\frac{1}{6}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 2 | 0 | $\frac{1}{6}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 3 | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 4 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |
| Total | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

X et Y ne sont pas indépendantes



VI. Variables aléatoires indépendantes

Exercice 7 :

Soient deux variables aléatoires X et Y dont les tableaux des lois conjointes sont donnés ci-dessous. Lequel correspond à des variables indépendantes ?

| $X \setminus Y$ | 1 | 2 | Total |
|-----------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 1 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $P(X=1) = \frac{2}{3}$ |
| 2 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $P(X=2) = \frac{1}{3}$ |
| Total | $P(Y=1) = \frac{2}{3}$ | $P(Y=2) = \frac{1}{3}$ | 1 |



VI. Variables aléatoires indépendantes

Exercice 7 :

Soient deux variables aléatoires X et Y dont les tableaux des lois conjointes sont donnés ci-dessous. Lequel correspond à des variables indépendantes ?

| $X \setminus Y$ | 1 | 2 | Total |
|-----------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 1 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $P(X=1) = \frac{2}{3}$ |
| 2 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $P(X=2) = \frac{1}{3}$ |
| Total | $P(Y=1) = \frac{2}{3}$ | $P(Y=2) = \frac{1}{3}$ | 1 |

| $X \setminus Y$ | 1 | 2 | Total |
|-----------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $P(X=1) = \frac{1}{2}$ |
| 2 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $P(X=2) = \frac{1}{2}$ |
| Total | $P(Y=1) = \frac{1}{2}$ | $P(Y=2) = \frac{1}{2}$ | 1 |



VI. Variables aléatoires indépendantes

1. Caractérisation

Proposition 13 :

Soient (Ω, P) un espace probabilisé et X, Y deux variables aléatoires sur Ω .

X et Y sont indépendantes si, et seulement si

$$\forall A \subset X(\Omega), \forall B \subset Y(\Omega), \quad P\left((X \in A) \cap (Y \in B)\right) = P(X \in A) \times P(Y \in B)$$



VI. Variables aléatoires indépendantes

1. Caractérisation

Proposition B :

Soient (Ω, P) un espace probabilisé et X, Y deux variables aléatoires sur Ω .

X et Y sont indépendantes si, et seulement si

$$\forall A \subset X(\Omega), \forall B \subset Y(\Omega), \quad P\left((X \in A) \cap (Y \in B)\right) = P(X \in A) \times P(Y \in B)$$

Corollaire I :

Si X, Y sont deux variables aléatoires indépendantes, et f, g sont deux applications définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.



VI. Variables aléatoires indépendantes

2. Variables aléatoires mutuellement indépendantes

Définition 15 :

Les variables aléatoires $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n$ sont dites **mutuellement indépendantes** si, pour toute famille $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{X}_1(\Omega) \times \mathcal{X}_2(\Omega) \times \dots \times \mathcal{X}_n(\Omega)$ les événements $(\mathcal{X}_1 = x_1), (\mathcal{X}_2 = x_2), \dots, (\mathcal{X}_n = x_n)$ sont mutuellement indépendants, *i.e.* si, et seulement si

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{X}_i(\Omega), \quad \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^n (\mathcal{X}_i = x_i) \right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\mathcal{X}_i = x_i).$$



VI. Variables aléatoires indépendantes

2. Variables aléatoires mutuellement indépendantes

Exemples 14 :

- Dans le cas d'un tirage avec remise dans une urne, si X_i est le numéro de la $i^{\text{ème}}$ boule tirée, X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes.



VI. Variables aléatoires indépendantes

2. Variables aléatoires mutuellement indépendantes

Exemples 4 :

- Dans le cas d'un tirage avec remise dans une urne, si X_i est le numéro de la $i^{\text{ème}}$ boule tirée, X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes.
- De manière plus générale, si on effectue n fois la même expérience, de manière indépendante, et si X_i est le résultat de la $i^{\text{ème}}$, X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes.



VI. Variables aléatoires indépendantes

2. Variables aléatoires mutuellement indépendantes

Proposition 14 :

Soient $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ des variables mutuellement indépendantes.

- ① $\forall (A_1, A_2, \dots, A_n) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(\mathcal{X}_i(\Omega))$, les événements $(\mathcal{X}_1 \in A_1), (\mathcal{X}_2 \in A_2), \dots, (\mathcal{X}_n \in A_n)$ sont mutuellement indépendants *i.e.*

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^n (\mathcal{X}_i \in A_i) \right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\mathcal{X}_i \in A_i).$$



VI. Variables aléatoires indépendantes

2. Variables aléatoires mutuellement indépendantes

Proposition 14 :

Soient $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ des variables mutuellement indépendantes.

- ❶ $\forall (A_1, A_2, \dots, A_n) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(\mathcal{X}_i(\Omega))$, les événements $(\mathcal{X}_1 \in A_1), (\mathcal{X}_2 \in A_2), \dots, (\mathcal{X}_n \in A_n)$ sont mutuellement indépendants *i.e.*

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^n (\mathcal{X}_i \in A_i) \right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\mathcal{X}_i \in A_i).$$

- ❷ Toute sous-famille de $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ est indépendante.



VI. Variables aléatoires indépendantes

2. Variables aléatoires mutuellement indépendantes

Proposition 14 :

Soient $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ des variables mutuellement indépendantes.

- ① $\forall (A_1, A_2, \dots, A_n) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(\mathcal{X}_i(\Omega))$, les événements $(\mathcal{X}_1 \in A_1), (\mathcal{X}_2 \in A_2), \dots, (\mathcal{X}_n \in A_n)$ sont mutuellement indépendants *i.e.*

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^n (\mathcal{X}_i \in A_i) \right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\mathcal{X}_i \in A_i).$$

- ② Toute sous-famille de $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ est indépendante.

En considérant toutes les sous-familles à deux éléments d'une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes, on en déduit aisément le résultat suivant :

Corollaire 2 :

Toute famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes sont deux à deux indépendantes.

VI. Variables aléatoires indépendantes

2. Variables aléatoires mutuellement indépendantes

Proposition 14 :

Soient $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ des variables mutuellement indépendantes.

- ❶ $\forall (A_1, A_2, \dots, A_n) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(\mathcal{X}_i(\Omega))$, les événements $(\mathcal{X}_1 \in A_1), (\mathcal{X}_2 \in A_2), \dots, (\mathcal{X}_n \in A_n)$ sont mutuellement indépendants *i.e.*

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^n (\mathcal{X}_i \in A_i) \right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\mathcal{X}_i \in A_i).$$

- ❷ Toute sous-famille de $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ est indépendante.

Corollaire 2 :

Toute famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes sont deux à deux indépendantes.

ATTENTION

Comme dans le cas des événements, la réciproque est fausse.



VI. Variables aléatoires indépendantes

2. Variables aléatoires mutuellement indépendantes

Proposition 15 (Lemme des coalitions) :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $p \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$.

Soient X_1, \dots, X_n une famille de n variables aléatoires mutuellement indépendantes sur Ω .

Pour toutes application $f : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{n-p} \mapsto \mathbb{R}$, $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.



VI. Variables aléatoires indépendantes

3. Application à la loi binomiale

Théorème 16 :

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes d'un espace probabilisé (Ω, \mathbb{P}) suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0; 1]$.

Alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p .



VI. Variables aléatoires indépendantes

3. Application à la loi binomiale

Théorème 16 :

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes d'un espace probabilisé (Ω, \mathbb{P}) suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0; 1]$.

Alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p .

Comme X_i comptabilise le succès ou l'échec à la $i^{\text{ème}}$ épreuve de Bernoulli, la variable aléatoire $X_1 + \dots + X_n$ représente le nombre de succès de n expériences indépendantes ayant probabilité p de réussir. Une telle variable suit une loi binomiale de paramètre n et p .



VI. Variables aléatoires indépendantes

4. Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes

Théorème 17 :

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes, alors

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$



VI. Variables aléatoires indépendantes

4. Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes

Théorème 17 :

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes, alors

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Corollaire 3 :

Si X_1, \dots, X_n sont des variables mutuellement indépendantes, alors

$$E(X_1, \dots, X_n) = E(X_1) \dots E(X_n).$$



VI. Variables aléatoires indépendantes

4. Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes

Théorème 17 :

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes, alors

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Corollaire 3 :

Si X_1, \dots, X_n sont des variables mutuellement indépendantes, alors

$$E(X_1, \dots, X_n) = E(X_1) \dots E(X_n).$$

ATTENTION

La réciproque est fautive en général.



VI. Variables aléatoires indépendantes

4. Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes

Contre-Exemple 15 :

Soient U et V deux urnes, que l'on remplit, de manière aléatoire avec deux boules.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules dans U , Y la variable aléatoire qui compte le nombre d'urnes vides.

| | $(X = 0)$ | $(X = 1)$ | $(X = 2)$ | Total |
|-----------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $(Y = 0)$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |
| $(Y = 1)$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |
| Total | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 |

| z | $P(XY = z)$ |
|-----|---------------|
| 0 | $\frac{1}{2}$ |
| 1 | $\frac{1}{2}$ |
| 2 | 0 |

Alors $P(X = 0) = P(X = 2) = \frac{1}{4}$, $P(X = 1) = \frac{1}{2}$ et $P(Y = 0) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}$.

On calcule $E(X) = 1$, $E(Y) = \frac{1}{2}$ d'où $E(XY) = \frac{1}{2} = E(X)E(Y)$ mais

$P((X = 0) \cap (Y = 0)) = 0 \neq \frac{1}{8} = P((X = 0))P((Y = 0))$. Les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

VII. Covariance de deux variables aléatoires

- 1 Variables aléatoires
- 2 Espérance d'une variable aléatoire réelle
- 3 Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle
- 4 Lois usuelles
- 5 Couple de variables aléatoires
- 6 Variables aléatoires indépendantes
- 7 Covariance de deux variables aléatoires**



VII. Covariance de deux variables aléatoires

Définition 16 :

Soient X et Y des variables aléatoires réelles.

On appelle **covariance** de X et Y , notée $Cov(X, Y)$, le réel

$$\begin{aligned}Cov(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right).\end{aligned}$$

On dit que X et Y sont **décorrélées** si $Cov(X, Y) = 0$.



VII. Covariance de deux variables aléatoires

Définition 16 :

Soient X et Y des variables aléatoires réelles.

On appelle **covariance** de X et Y , notée $Cov(X, Y)$, le réel

$$\begin{aligned}Cov(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right).\end{aligned}$$

On dit que X et Y sont **décorrélées** si $Cov(X, Y) = 0$.

La covariance est donc la moyenne des produits des écarts des valeurs à la moyenne de chaque série. Elle évalue la dépendance linéaire entre X et Y . D'après le **théorème (17)**, si X et Y sont indépendantes alors $Cov(X, Y) = 0$.



VII. Covariance de deux variables aléatoires

Définition 16 :

Soient X et Y des variables aléatoires réelles.

On appelle **covariance** de X et Y , notée $Cov(X, Y)$, le réel

$$\begin{aligned}Cov(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right).\end{aligned}$$

On dit que X et Y sont **décorrélées** si $Cov(X, Y) = 0$.

La covariance est donc la moyenne des produits des écarts des valeurs à la moyenne de chaque série. Elle évalue la dépendance linéaire entre X et Y . D'après le **théorème (17)**, si X et Y sont indépendantes alors $Cov(X, Y) = 0$.

ATTENTION

La réciproque est fausse.



VII. Covariance de deux variables aléatoires

Proposition 18 :

Soient X et Y des variables aléatoires réelles.

Alors,
$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y).$$

Si, X et Y sont décorrélées alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.



VII. Covariance de deux variables aléatoires

Corollaire 4 :

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes alors

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$



VII. Covariance de deux variables aléatoires

Corollaire 4 :

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes alors

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

Le corollaire (4) se généralise aisément au cas de n variables aléatoires mutuellement indépendantes :

Proposition 19 :

Si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes alors

$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n).$$

« La variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes est la somme de leur variance. »



VII. Covariance de deux variables aléatoires

Corollaire 5 :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p .
Alors,

$$V(X) = np(1 - p).$$



VII. Covariance de deux variables aléatoires

Corollaire 5 :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p .
Alors,

$$V(X) = np(1 - p).$$

Exercice 8 :

Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes de même loi, à valeurs dans $\{1, \dots, N\}$. On pose $X = U - V$ et $Y = U + V$.

Déterminer la covariance entre X et Y .



VII. Covariance de deux variables aléatoires

Un peu d'histoire : *Correlation vs Indépendance*

L'indépendance et la corrélation ou plus exactement la dépendance et la corrélation sont deux notions en statistique qui sont souvent confondues.



VII. Covariance de deux variables aléatoires

Un peu d'histoire : *Correlation vs Indépendance*

L'indépendance et la corrélation ou plus exactement la dépendance et la corrélation sont deux notions en statistique qui sont souvent confondues.

Formellement, l'indépendance entre deux variables X et Y indique que la connaissance de la réalisation de l'une des variables n'a aucune incidence sur la probabilité de réalisation de l'autre variable. La corrélation quant à elle renvoie à l'existence d'une liaison linéaire entre les deux variables.



VII. Covariance de deux variables aléatoires

Un peu d'histoire : *Correlation vs Indépendance*

L'indépendance et la corrélation ou plus exactement la dépendance et la corrélation sont deux notions en statistique qui sont souvent confondues.

Formellement, l'indépendance entre deux variables X et Y indique que la connaissance de la réalisation de l'une des variables n'a aucune incidence sur la probabilité de réalisation de l'autre variable. La corrélation quant à elle renvoie à l'existence d'une liaison linéaire entre les deux variables.

Donc l'indépendance est une notion liée à la « chance » de réalisation des évènements des variables X et Y tandis que la corrélation est une notion liée à la fonction linéaire qui existerait entre les valeurs des deux variables.



VII. Covariance de deux variables aléatoires

Un peu d'histoire : *Correlation vs Indépendance*

L'indépendance et la corrélation ou plus exactement la dépendance et la corrélation sont deux notions en statistique qui sont souvent confondues.

Formellement, l'indépendance entre deux variables X et Y indique que la connaissance de la réalisation de l'une des variables n'a aucune incidence sur la probabilité de réalisation de l'autre variable. La corrélation quant à elle renvoie à l'existence d'une liaison linéaire entre les deux variables.

Donc l'indépendance est une notion liée à la « chance » de réalisation des événements des variables X et Y tandis que la corrélation est une notion liée à la fonction linéaire qui existerait entre les valeurs des deux variables.

Il est théoriquement démontré que si deux variables sont indépendantes alors elles ne sont pas corrélées. Autrement dit, si les probabilités de réalisation des événements liés aux variables X et Y vérifient la condition d'indépendance alors les valeurs de ces variables n'ont pas de liaison linéaire entre elles. Par conséquent, si deux variables sont corrélées alors elles sont nécessairement dépendantes i.e. elles ne sont pas indépendantes.



VII. Covariance de deux variables aléatoires

Un peu d'histoire : *Correlation vs Indépendance*

L'indépendance et la corrélation ou plus exactement la dépendance et la corrélation sont deux notions en statistique qui sont souvent confondues.

Formellement, l'indépendance entre deux variables X et Y indique que la connaissance de la réalisation de l'une des variables n'a aucune incidence sur la probabilité de réalisation de l'autre variable. La corrélation quant à elle renvoie à l'existence d'une liaison linéaire entre les deux variables.

Donc l'indépendance est une notion liée à la « chance » de réalisation des évènements des variables X et Y tandis que la corrélation est une notion liée à la fonction linéaire qui existerait entre les valeurs des deux variables.

Il est théoriquement démontré que si deux variables sont indépendantes alors elles ne sont pas corrélées. Autrement dit, si les probabilités de réalisation des événements liés aux variables X et Y vérifient la condition d'indépendance alors les valeurs de ces variables n'ont pas de liaison linéaire entre elles. Par conséquent, si deux variables sont corrélées alors elles sont nécessairement dépendantes i.e. elles ne sont pas indépendantes.

Ce résultat laisse alors la possibilité aux situations où des variables seraient dépendantes sans être corrélées.

