Fichiers Applications-Lineaires-Rang a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x-y) \end{array}$

Déterminer une base du noyau et de l'image de f et en déduire si f est injective, surjective, bijective.

Correction :

1. Calculons le noyau :

$$\begin{aligned} (x,y) \in \ker(f) &\iff f(x,y) = (0,0) \iff (2x+y, x-y) = (0,0) \\ &\iff \begin{cases} 2x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0) \end{aligned}$$

Ainsi $\ker(f) = \{(0,0)\}$ et donc f est injective. On sait déjà qu'elle est bijective d'après le théorème du rang.

2. Calculons l'image. Quels éléments (X,Y) peuvent s'écrire $f(x,y)$?

$$\begin{aligned} f(x,y) = (\mathrm{X},\mathrm{Y}) &\iff (2x+y, x-y) = (\mathrm{X},\mathrm{Y}) \\ &\iff \begin{cases} 2x+y=\mathrm{X} \\ x-y=\mathrm{Y} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}{3} \\ y = \dfrac{\mathrm{X}-2\mathrm{Y}}{3} \end{cases} \\ &\iff (x,y) = \left(\frac{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}{3}, \frac{\mathrm{X}-2\mathrm{Y}}{3}\right) \end{aligned}$$

Donc pour n'importe quel $(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in \mathbb{R}^2$ on trouve un antécédent $(x,y) = \left(\dfrac{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}{3}, \dfrac{\mathrm{X}-2\mathrm{Y}}{3}\right)$ qui vérifie donc $f(x,y) = (\mathrm{X},\mathrm{Y})$.

Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$. Ainsi f est surjective.

Remarque : Une autre méthode est d'extraire une base de l'image d'une base (la base canonique, par exemple) par f.

3. Conclusion : f est injective et surjective donc bijective.

Exercice 2 : Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \mathrm{P} & \longmapsto & (\mathrm{P}(-1), \mathrm{P}(0), \mathrm{P}(1)) \end{array}$

Déterminer une base du noyau et de l'image de f et en déduire si f est injective, surjective, bijective.

Correction : $f: \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] \longmapsto \mathbb{R}^3$ va d'un espace de dimension 4 vers un espace de dimension strictement plus petit et donc f ne peut être injective.

1. Calculons le noyau. Écrivons un polynôme P de degré $\leqslant 3$ sous la forme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = a\mathrm{X}^3 + b\mathrm{X}^2 + c\mathrm{X} + d$.

   Alors $\mathrm{P}(0) = d$, $\mathrm{P}(1) = a + b + c + d$, $\mathrm{P}(-1) = -a + b - c + d$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{X}) \in \ker(f) &\iff (\mathrm{P}(-1), \mathrm{P}(0), \mathrm{P}(1)) = (0,0,0) \\
&\iff (-a + b - c + d, d, a + b + c + d) = (0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} -a + b - c + d = 0 \\ d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases} \iff \cdots \\
&\iff \begin{cases} a = -c \\ b = 0 \\ d = 0 \end{cases} \\
&\iff (a,b,c,d) = (t, 0, -t, 0) \quad t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

   Ainsi le noyau $\ker(f) = \{t\mathrm{X}^3 - t\mathrm{X} \mid t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}\,\{\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}\}$. f n'est pas injective son noyau étant de dimension 1.

2. La formule du rang pour $f : \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] \longmapsto \mathbb{R}^3$ s'écrit $\dim\ker(f) + \dim\mathrm{Im}\,(f) = \dim\mathbb{R}_3[4]$.

   Autrement dit $1 + \dim\mathrm{Im}\,(f) = 4$.

   Donc $\dim\mathrm{Im}\,(f) = 3$.

   Ainsi $\mathrm{Im}\,(f)$ est un espace de dimension 3 dans $\mathbb{R}^3$ donc $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}^3$. Conclusion f est surjective.

Exercice 3 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y) & \longmapsto & (y, 0, x - 7y, x + y) \end{array}$

Déterminer une base du noyau et de l'image de f et en déduire si f est injective, surjective, bijective.

Correction : Sans aucun calcul on sait $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ ne peut être surjective car l'espace d'arrivée est de dimension strictement supérieure à l'espace de départ.

1. Calculons le noyau :

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \ker(f) &\iff f(x,y) = (0,0,0,0) \\
&\iff (y, 0, x - 7y, x + y) = (0,0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \\ x - 7y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff \cdots \\
&\iff (x,y) = (0,0)
\end{aligned}$$

   Ainsi $\ker(f) = \{(0,0)\}$ et donc f est injective.

2. La formule du rang appliquée à $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ s'écrit $\dim\ker(f) + \dim\mathrm{Im}\,(f) = \dim\mathbb{R}^2$.

   Donc $\dim\mathrm{Im}\,(f) = 2$.

   Ainsi $\mathrm{Im}\,(f)$ est un espace vectoriel de dimension 2 inclus dans $\mathbb{R}^3$, f n'est pas surjective.

   Par décrire $\mathrm{Im}\,(f)$ nous allons trouver deux vecteurs indépendants de $\mathrm{Im}\,(f)$.

   Il y a un nombre infini de choix : prenons par exemple $v_1 = f(1,0) = (0,0,1,1)$.

Pour v_2 on cherche (un peu à tâtons) un vecteur linéairement indépendant de v_1.

Essayons $v_2 = f(0,1) = (1,0,-7,1)$.

Par construction $v_1, v_2 \in \mathrm{Im}\,(f)$; ils sont clairement linéairement indépendants et comme $\dim \mathrm{Im}\,(f) = 2$ alors $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Ainsi $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{vect}\,\{v_1, v_2\} = \{\lambda(0,0,1,1) + \mu(1,0,-7,1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 4 : Soit E un espace vectoriel et soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E, on définit l'application $f\colon \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \to \mathrm{E}$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Que donne le théorème du rang ?

Correction :

1. Aucun problème...
2. Par définition de f et de ce qu'est la somme de deux sous-espaces vectoriels, l'image est

$$\mathrm{Im}\,(f) = \{f(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathrm{E}_1, x_2 \in \mathrm{E}_2\} = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in \mathrm{E}_1, x_2 \in \mathrm{E}_2\} = \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2.$$

Pour le noyau :

$$\ker f = \{(x_1, x_2) \mid f(x_1, x_2) = 0\} = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 0\}$$

Mais on peut aller un peu plus loin. En effet un élément $(x_1, x_2) \in \ker f$, vérifie $x_1 \in \mathrm{E}_1$, $x_2 \in \mathrm{E}_2$ et $x_1 = -x_2$. Donc $x_1 \in \mathrm{E}_2$. Donc $x_1 \in \mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$. Réciproquement si $x \in \mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$, alors $(x, -x) \in \ker f$. Donc

$$\ker f = \{(x, -x) \mid x \in \mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2\}.$$

De plus l'application $x \mapsto (x, -x)$ montre que $\ker f$ est isomorphe à $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$.

3. Le théorème du rang s'écrit :

$$\dim \ker f + \dim \mathrm{Im}\,(f) = \dim\,(\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2).$$

Compte tenu de l'isomorphisme entre $\ker f$ et $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$ on obtient :

$$\dim\,(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2) + \dim\,(\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2) = \dim\,(\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2).$$

Mais $\dim\,(\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2) = \dim \mathrm{E}_1 + \dim \mathrm{E}_2$, donc on retrouve ce que l'on appelle le théorème des quatre dimensions :

$$\dim\,(\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2) = \dim \mathrm{E}_1 + \dim \mathrm{E}_2 - \dim\,(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2).$$

Exercice 5 : On pose $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_1(x,y) = (2x+y, x-y)$

Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im}\,(f)$. En déduire si f est injective, surjective, bijective.

Correction : Calculer le noyau revient à résoudre un système linéaire, et calculer l'image aussi. On peut donc tout faire ``à la main''.

Mais on peut aussi appliquer un peu de théorie ! Noyau et image sont liés par la formule du rang :

$$\dim \ker f + \dim \mathrm{Im}\,(f) = \dim \mathrm{E}$$

pour $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$.

Donc si on a trouvé le noyau alors on connaît la dimension de l'image. Et il suffit alors de trouver autant de vecteur de l'image.

f_1 est injective, surjective (et donc bijective).

1 Faisons tout à la main. Calculons le noyau :

$$\begin{aligned}(x,y)\in\ker f_1 &\iff f_1(x,y)=(0,0) \iff (2x+y,x-y)=(0,0)\\ &\iff \begin{cases}2x+y=0\\ x-y=0\end{cases} \iff (x,y)=(0,0)\end{aligned}$$

Ainsi $\ker f_1=\{(0,0)\}$ et donc f_1 est injective.

2 Calculons l'image. Quels éléments (X,Y) peuvent s'écrire $f_1(x,y)$?

$$\begin{aligned}f_1(x,y)=(\mathrm{X},\mathrm{Y}) &\iff (2x+y,x-y)=(\mathrm{X},\mathrm{Y})\\ &\iff \begin{cases}2x+y=\mathrm{X}\\ x-y=\mathrm{Y}\end{cases} \iff \begin{cases}x=\dfrac{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}{3}\\ y=\dfrac{\mathrm{X}-2\mathrm{Y}}{3}\end{cases}\\ &\iff (x,y)=\left(\frac{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}{3},\frac{\mathrm{X}-2\mathrm{Y}}{3}\right)\end{aligned}$$

Donc pour n'importe quel $(\mathrm{X},\mathrm{Y})\in\mathbb{R}^2$ on trouve un antécédent $(x,y)=(\dfrac{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}{3},\dfrac{\mathrm{X}-2\mathrm{Y}}{3})$ qui vérifie donc $f_1(x,y)=(\mathrm{X},\mathrm{Y})$. Donc $\mathrm{Im}\,(f)_1=\mathbb{R}^2$. Ainsi f_1 est surjective.

3 Conclusion : f_1 est injective et surjective donc bijective.

Exercice 6 : On pose $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $f_2(x,y,z)=(2x+y+z,y-z,x+y)$

Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im}\,(f)$. En déduire si f est injective, surjective, bijective.

Correction : Calculer le noyau revient à résoudre un système linéaire, et calculer l'image aussi. On peut donc tout faire ``à la main''.

Mais on peut aussi appliquer un peu de théorie ! Noyau et image sont liés par la formule du rang :

$$\dim\ker f+\dim\mathrm{Im}\,(f)=\dim\mathrm{E}$$

pour $f:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$.

Donc si on a trouvé le noyau alors on connaît la dimension de l'image. Et il suffit alors de trouver autant de vecteur de l'image.

1 Calculons d'abord le noyau :

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in\ker f_2 &\iff f_2(x,y,z)=(0,0,0)\\ &\iff (2x+y+z,y-z,x+y)=(0,0,0)\\ &\iff \begin{cases}2x+y+z=0\\ y-z=0\\ x+y=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x=-z\\ y=z\end{cases}\\ &\iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-z\\z\\z\end{pmatrix}\\ &\iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\left\{\lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\mid \lambda\in\mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

Ainsi $\ker f_2=\mathrm{Vect}(-1,1,1)$ et donc f_2 n'est pas injective.

2 Maintenant nous allons utiliser que $\ker f_2=\mathrm{Vect}(-1,1,1)$, autrement dit $\dim\ker f_2=1$. La formule du rang, appliquée à $f_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ s'écrit $\dim\ker f_2+\dim\mathrm{Im}\,(f)_2=\dim\mathbb{R}^3$. Donc $\dim\mathrm{Im}\,(f)_2=2$. Nous allons trouver une base de $\mathrm{Im}\,(f)_2$. Il suffit donc de trouver deux vecteurs linéairement indépendants. Prenons par exemple $v_1=f_2(1,0,0)=(2,0,1)\in\mathrm{Im}\,(f)_2$ et $v_2=f_2(0,1,0)=(1,1,1)\in\mathrm{Im}\,(f)_2$. Par construction ces vecteurs sont dans l'image de f_2 et il est clair qu'ils sont linéairement indépendants. Donc $\{v_1,v_2\}$ est une base de $\mathrm{Im}\,(f)_2$.

3 f_2 n'est ni injective, ni surjective (donc pas bijective).

Exercice 7 : On pose $f_3:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4,\ f_3(x,y)=(y,0,x-7y,x+y)$
Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im}\,(f)$. En déduire si f est injective, surjective, bijective.

Correction : Calculer le noyau revient à résoudre un système linéaire, et calculer l'image aussi. On peut donc tout faire ``à la main''.

Mais on peut aussi appliquer un peu de théorie ! Noyau et image sont liés par la formule du rang :

$$\dim\ker f+\dim\mathrm{Im}\,(f)=\dim\mathrm{E}$$

pour $f:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$.

Donc si on a trouvé le noyau alors on connaît la dimension de l'image. Et il suffit alors de trouver autant de vecteur de l'image.

Sans aucun calcul on sait $f_3:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$ ne peut être surjective car l'espace d'arrivée est de dimension strictement supérieur à l'espace de départ.

1 Calculons le noyau :

$$\begin{aligned}(x,y)\in\ker f_3 &\iff f_3(x,y)=(0,0,0,0)\\ &\iff (y,0,x-7y,x+y)=(0,0,0,0)\\ &\iff \begin{cases} y=0\\ 0=0\\ x-7y=0\\ x+y=0\end{cases}\\ &\iff \cdots\\ &\iff (x,y)=(0,0)\end{aligned}$$

Ainsi $\ker f_3=\{(0,0)\}$ et donc f_3 est injective.

2 La formule du rang appliquée à $f_3:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$ s'écrit $\dim\ker f_3+\dim\operatorname{Im}(f)_3=\dim\mathbb{R}^2$. Donc $\dim\operatorname{Im}(f)_3=2$. Ainsi $\operatorname{Im}(f)_3$ est un espace vectoriel de dimension 2 inclus dans $\mathbb{R}^3$, f_3 n'est pas surjective.

Par décrire $\operatorname{Im}(f)_3$ nous allons trouver deux vecteurs indépendants de $\operatorname{Im}(f)_3$. Il y a un nombre infini de choix : prenons par exemple $v_1=f(1,0)=(0,0,1,1)$. Pour v_2 on cherche (un peu à tâtons) un vecteur linéairement indépendant de v_1. Essayons $v_2=f(0,1)=(1,0,-7,1)$. Par construction $v_1,v_2\in\operatorname{Im}(f)$; ils sont clairement linéairement indépendants et comme $\dim\operatorname{Im}(f)_3=2$ alors $\{v_1,v_2\}$ est une base de $\operatorname{Im}(f)_3$.

Ainsi $\operatorname{Im}(f)_3=\operatorname{Vect}\{v_1,v_2\}=\{\lambda(0,0,1,1)+\mu(1,0,-7,1)\mid\lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$.

Exercice 8 : On pose $f_4:\mathbb{R}_3[X]\to\mathbb{R}^3$, $f_4(P)=(P(-1),P(0),P(1))$

Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im}(f)$. En déduire si f est injective, surjective, bijective.

Correction : Calculer le noyau revient à résoudre un système linéaire, et calculer l'image aussi. On peut donc tout faire ``à la main''.

Mais on peut aussi appliquer un peu de théorie ! Noyau et image sont liés par la formule du rang :

$$\dim\ker f+\dim\operatorname{Im}(f)=\dim E$$

pour $f:E\to F$.

Donc si on a trouvé le noyau alors on connaît la dimension de l'image. Et il suffit alors de trouver autant de vecteur de l'image.

$f_4:\mathbb{R}_3[X]\to\mathbb{R}^3$ va d'un espace de dimension 4 vers un espace de dimension strictement plus petit et donc f_4 ne peut être injective.

1 Calculons le noyau. Ecrivons un polynôme P de degré $\leqslant 3$ sous la forme $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Alors $P(0) = d$, $P(1) = a + b + c + d$, $P(-1) = -a + b - c + d$.

$$\begin{aligned}
P(X) \in \ker f_4 &\iff (P(-1), P(0), P(1)) = (0,0,0) \\
&\iff (-a + b - c + d, d, a + b + c + d) = (0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} -a + b - c + d = 0 \\ d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases} \\
&\iff \cdots \\
&\iff \begin{cases} a = -c \\ b = 0 \\ d = 0 \end{cases} \\
&\iff (a,b,c,d) = (t, 0, -t, 0) \quad t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ainsi le noyau $\ker f_4 = \{tX^3 - tX \mid t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{X^3 - X\}$. f_4 n'est pas injective son noyau étant de dimension 1.

2 La formule du rang pour $f_4 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3$ s'écrit $\dim\ker f_4 + \dim \mathrm{Im}\,(f)_4 = \dim \mathbb{R}_3[4]$. Autrement dit $1 + \dim \mathrm{Im}\,(f)_4 = 4$. Donc $\dim \mathrm{Im}\,(f)_4 = 3$. Ainsi $\mathrm{Im}\,(f)_4$ est un espace de dimension 3 dans $\mathbb{R}^3$ donc $\mathrm{Im}\,(f)_4 = \mathbb{R}^3$. Conclusion f_4 est surjective.

Exercice 9 : Soient $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par : $f(e_1) = 2e_1 + e_3$, $f(e_2) = -e_2 + e_4$, $f(e_3) = e_1 + 2e_3$ et $f(e_4) = e_2 - e_4$.
Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$.

Correction : Soit $u = (x,y,z,t) = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 \in \mathbb{R}^4$. Alors,

$$\begin{aligned}
f(u) &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) + tf(e_4) = x(2e_1 + e_3) + y(-e_2 + e_4) + z(e_1 + 2e_3) + t(e_2 - e_4) \\
&= (2x + z)e_1 + (-y + t)e_2 + (x + 2z)e_3 + (y - t)e_4.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$u \in \ker f \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + z = 0 \\ -y + t = 0 \\ x + 2z = 0 \\ y - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z = 0 \\ y = t \end{cases}.$$

Donc, $\ker f = \{(0, y, 0, y),\ y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((0,1,0,1))$.

$$\ker f = \mathrm{Vect}((0,1,0,1)).$$

Soit $u' = (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4$.

$$u' = (x', y', z', t') \in \mathrm{Im}\ f \Leftrightarrow \exists (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} 2x + z = x' \\ -y + t = y' \\ x + 2z = z' \\ y - t = t' \end{cases} \Leftrightarrow \exists (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} x = \frac{1}{3}(2x' - z') \\ z = \frac{1}{3}(-x' + 2z') \\ t = y + y' \\ y' + t' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y' = -t'$$

(si $y' \neq -t'$, le système ci-dessus, d'inconnues x, y, z et t, n'a pas de solution et si $y' = -t'$, le système ci-dessus admet au moins une solution comme par exemple $(x, y, z, t) = \left(\frac{1}{3}(2x' - z'), 0, \frac{1}{3}(-x' + 2z'), y'\right)$.
Donc, $\mathfrak{Im}\ f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \ y+t = 0\} = \{(x, y, z, -y)/(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{xe_1+y(e_2-e_4)+ze_3,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^4\} = \mathrm{Vect}(e_1,$

$$\mathfrak{Im}\ f == \{(x, y, z, -y)/(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{Vect}(e_1, e_2 - e_4, e_3).$$

Autre solution pour la détermination de $\mathfrak{Im}\ f$. $\mathfrak{Im}\ f = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \mathrm{Vect}(2e_1+e_3, -e_2+e_4, e_1+2e_3, e_2-e_4$
Mais d'autre part, d'après le théorème du rang, dim $(\mathfrak{Im}\ f) = 4 - 1 = 3$. Donc, $(2e_1 + e_3, e_1 + 2e_3, e_2 - e_4)$ est une base de $\mathfrak{Im}\ f$.

Exercice 10 : Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + a\bar{z} \end{array}$ où a est un nombre complexe donné non nul.

Montrer que f est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. f est-il un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$?

Déterminer le noyau et l'image de f.

Correction : Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(\lambda z + \mu z') = (\lambda z + \mu z') + a(\overline{\lambda z + \mu z'}) = \lambda(z + a\bar{z}) + \mu(z' + a\overline{z'}) = \lambda f(z) + \mu f(z').$$

f est donc $\mathbb{R}$-linéaire. On note que $f(ia) = i(a - |a|^2)$ et que $if(a) = i(a + |a|^2)$. Comme $a \neq 0$, on a $f(ia) \neq if(a)$. f n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Posons $z = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z \in \ker\ f \Leftrightarrow z + a\bar{z} = 0 \Leftrightarrow e^{i\theta} + ae^{-i\theta} = 0 \Leftrightarrow e^{2i\theta} = -a.$$

1er cas. Si $|a| \neq 1$, alors, pour tout réel θ, $e^{2i\theta} \neq -a$. Dans ce cas, $\ker\ f = \{0\}$ et d'après le théorème du rang, $\mathfrak{Im}\ f = \mathbb{C}$. **2ème cas.** Si $|a| = 1$, posons $a = e^{i\alpha}$.

$$e^{2i\theta} = -a \Leftrightarrow e^{2i\theta} = e^{i(\alpha+\pi)} \Leftrightarrow 2\theta \in \alpha + \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \frac{\alpha + \pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

Dans ce cas, $\ker\ f = \mathrm{Vect}(e^{i(\alpha+\pi)/2})$. D'après le théorème du rang, $\mathfrak{Im}\ f$ est une droite vectorielle et pour déterminer $\mathfrak{Im}\ f$, il suffit d'en fournir un vecteur non nul, comme par exemple $f(1) = 1 + a$. Donc, si $a \neq -1$, $\mathfrak{Im}\ f = \mathrm{Vect}(1 + a)$. Si $a = -1$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = z - \bar{z} = 2i\mathfrak{Im}\ (z)$ et $\mathfrak{Im}\ f = i\mathbb{R}$.

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

On considère $u, v \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et on suppose que $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\,(u) + \mathrm{Im}\,(v) = \ker\,(u) + \ker\,(v)$.

Montrer que ces sommes sont directes.

Correction :

- $\dim\,(\mathrm{Im}\,(u) + \mathrm{Im}\,(v)) = \dim \mathrm{Im}\,(u) + \dim \mathrm{Im}\,(v) - \dim \mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v) = \dim\,(\mathrm{E})$.

  $\dim\,(\ker\,(u) + \ker\,(v)) = \dim \ker\,(u) + \dim \ker\,(v) - \dim \ker\,(u) \cap \ker\,(v) = \dim\,(\mathrm{E})$.

  En additionnant, d'après le théorème du rang :

  $\dim \mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v) + \dim \ker\,(u) \cap \ker\,(v) = 0$.

  Donc $\mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v) = \{0\}$ et $\ker\,(u) \cap \ker\,(v) = \{0\}$.

– $\dim(\mathrm{E}) = \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g)$
$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{E}) &= \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g)\\ &\leqslant \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Im} g)\\ &= 2\dim(\mathrm{E}) - \dim\ker f - \dim\ker g\\ &\leqslant 2\dim(\mathrm{E}) - \dim(\ker f + \ker g) = \dim(\mathrm{E}).\end{aligned}$$

Donc toutes les inégalités sont des égalités, et les sommes sont directes.

Exercice 2 : On considère $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x-y) \end{array}$.

Déterminer $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$. En déduire si f est injective, surjective, bijective.

Correction :

1. Calculons d'abord le noyau :

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in \ker(f) &\iff f(x,y,z) = (0,0,0)\\ &\iff (2x+y+z, y-z, x+y) = (0,0,0)\\ &\iff \begin{cases} 2x+y+z=0\\ y-z=0\\ x+y=0\end{cases} \iff \begin{cases} x=-z\\ y=z\end{cases}\\ &\iff \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z\\ z\\ z\end{pmatrix}\\ &\iff \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \operatorname{vect}\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} = \left\{\lambda\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \mid \lambda\in\mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

Ainsi $\ker(f) = \operatorname{vect}(-1,1,1)$ et donc f n'est pas injective.

2. Maintenant nous allons utiliser que $\ker(f) = \operatorname{vect}(-1,1,1)$, autrement dit $\dim\ker(f) = 1$.

La formule du rang appliquée à $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ s'écrit $\dim\ker(f) + \dim\operatorname{Im}(f) = \dim\mathbb{R}^3$.

Donc $\dim\operatorname{Im}(f) = 2$.

Nous allons trouver une base de $\operatorname{Im}(f)$. Il suffit donc de trouver deux vecteurs linéairement indépendants.

Prenons par exemple $v_1 = f(1,0,0) = (2,0,1) \in \operatorname{Im}(f)$ et $v_2 = f(0,1,0) = (1,1,1) \in \operatorname{Im}(f)$.

Par construction ces vecteurs sont dans l'image de f et il est clair qu'ils sont linéairement indépendants.

Donc $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\operatorname{Im}(f)$.

3. f n'est ni injective, ni surjective (donc pas bijective).

Exercice 3 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Montrer que $i \iff ii$

i. $\mathrm{E} = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$

ii. $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$

Exercice 4 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Montrer que $i \iff iii$.

i. $\mathrm{E} = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$

iii. $\ker f = \ker f^2$

Exercice 5 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Montrer que $ii \iff iii$.

ii. $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$
iii. $\ker f = \ker f^2$

Exercice 6 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

On considère $u, v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et on suppose que $\mathrm{E} = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v = \ker u + \ker v$.

Montrer que ces sommes sont directes.

Correction :

– $\dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) = \dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Im} v - \dim \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v = \dim \mathrm{E}$.
  $\dim(\ker u + \ker v) = \dim \ker u + \dim \ker v - \dim \ker u \cap \ker v = \dim \mathrm{E}$.
  En additionnant, d'après le théorème du rang :
  $\dim \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v + \dim \ker u \cap \ker v = 0$. Donc $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v = \{0\}$ et $\ker u \cap \ker v = \{0\}$.
– $\dim \mathrm{E} = \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) \leqslant \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Im} g) = 2\dim \mathrm{E} - \dim \ker f - \dim \ker g \leqslant 2\dim \mathrm{E} - \dim(\ker f + \ker g) =$ d
  Donc toutes les inégalités sont des égalités, et les sommes sont directes.

Exercice 7 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E.

Montrer l'équivalence : $\ker f = \operatorname{Im} f \Leftrightarrow (f^2 = 0 \text{ et } n = 2\mathrm{rg}(f))$.

Exercice 8 : Soit E un espace vectoriel de dimension 3, $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E, et t un paramètre réel.

1. Démontrer que la donnée de $\begin{cases} \phi(e_1) &= e_1 + e_2 \\ \phi(e_2) &= e_1 - e_2 \\ \phi(e_3) &= e_1 + te_3 \end{cases}$ définit une application linéaire ϕ de E dans E.
2. Écrire le transformée du vecteur $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$.
3. Comment choisir t pour que ϕ soit injective ? surjective ?

Correction :

1. Comment est définie ϕ à partir de la définition sur les éléments de la base ? Pour $x \in \mathrm{E}$ alors x s'écrit dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. Et ϕ est définie sur E par la formule

$$\phi(x) = \alpha_1 \phi(e_1) + \alpha_2 \phi(e_2) + \alpha_3 \phi(e_3).$$

Soit ici :

$$\phi(x) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)e_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)e_2 + t\alpha_3 e_3.$$

Cette définition rend automatiquement ϕ linéaire (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincu !).

2. On cherche à savoir si ϕ est injective. Soit $x \in \mathrm{E}$ tel que $\phi(x) = 0$ donc $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)e_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)e_2 + t\alpha_3 e_3 = 0$. Comme $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base alors tous les coefficients sont nuls :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad t\alpha_3 = 0.$$

Si $t \neq 0$ alors en résolvant le système on obtient $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Donc $x = 0$ et ϕ est injective.

Si $t = 0$, alors ϕ n'est pas injective, en résolvant le même système on obtient des solutions non triviales, par exemple $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -2$. Donc pour $x = e_1 + e_2 - 2e_3$ on obtient $\phi(x) = 0$.

3 Pour la surjectivité on peut soit faire des calculs, soit appliquer la formule du rang. Examinons cette deuxième méthode. ϕ est surjective si et seulement si la dimension de $\operatorname{Im}(\phi)$ est égale à la dimension de l'espace d'arrivée (ici E de dimension 3). Or on a une formule pour $\dim \operatorname{Im}(\phi)$:

$$\dim \ker \phi + \dim \operatorname{Im}(\phi) = \dim \mathrm{E}.$$

Si $t \neq 0$, ϕ est injective donc $\ker \phi = \{0\}$ est de dimension 0. Donc $\dim \operatorname{Im}(\phi) = 3$ et ϕ est surjective.

Si $t = 0$ alors ϕ n'est pas injective donc $\ker \phi$ est de dimension au moins 1 (en fait 1 exactement), donc $\dim \operatorname{Im}(\phi) \leqslant 2$. Donc ϕ n'est pas surjective.

On remarque que ϕ est injective si et seulement si elle est surjective. Ce qui est un résultat du cours pour les applications ayant l'espace de départ et d'arrivée de même dimension (finie).

Exercice 9 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel donné). Soit φ l'application définie par : $\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E},\ \varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1)-\mathrm{P}(\mathrm{X})$.

1 Vérifier que φ est un endomorphisme de E.

2 Déterminer $\ker\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$.

Correction :

1 Si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $\mathrm{P}(\mathrm{X}+1)-\mathrm{P}(\mathrm{X})$ est encore un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Par suite, φ est bien une application de E dans lui-même. Soient alors $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda\mathrm{P}+\mu\mathrm{Q}) &= (\lambda\mathrm{P}+\mu\mathrm{Q})(\mathrm{X}+1)-(\lambda\mathrm{P}+\mu\mathrm{Q})(\mathrm{X}) = \lambda(\mathrm{P}(\mathrm{X}+1)-\mathrm{P}(\mathrm{X}))+\mu(\mathrm{Q}(\mathrm{X}+1)-\mathrm{Q}(\mathrm{X}))\\ &= \lambda\varphi(\mathrm{P})+\mu\varphi(\mathrm{Q}).\end{aligned}$$

φ est linéaire de E vers lui-même et donc un endomorphisme de E.

2 Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$. $\mathrm{P} \in \ker \varphi \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x+1) = \mathrm{P}(x)$. Montrons alors que P est constant. Soit $\mathrm{Q} = \mathrm{P}-\mathrm{P}(0)$. Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à n s'annulant en les entiers naturels 0, 1, 2,... (car $\mathrm{P}(0) = \mathrm{P}(1) = \mathrm{P}(2) = \ldots$) et a ainsi une infinité de racines deux à deux distinctes. Q est donc le polynôme nul ou encore $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) = \mathrm{P}(0)$. Par suite, P est un polynôme constant. Réciproquement, les polynômes constants sont clairement dans $\ker \varphi$ et donc

$$\ker \varphi = \{\text{polynômes constants}\} = \mathbb{R}_0[\mathrm{X}].$$

Pour déterminer $\operatorname{Im} \varphi$, on note tout d'abord que si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $\varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1)-\mathrm{P}(\mathrm{X})$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. En effet, si $\mathrm{P} = a_n\mathrm{X}^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\mathrm{X}^k$ (avec a_n quelconque, éventuellement nul) alors

$$\begin{aligned}\varphi(\mathrm{P}) &= a_n((\mathrm{X}+1)^n-\mathrm{X}^n) + \text{termes de degré inférieur ou égal à } n-1\\ &= a_n(\mathrm{X}^n-\mathrm{X}^n) + \text{termes de degré inférieur ou égal à } n-1\\ &= \text{termes de degré inférieur ou égal à } n-1.\end{aligned}$$

Donc, $\operatorname{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. Mais d'après le théorème du rang,

$$\dim \operatorname{Im}(\varphi) = \dim \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] - \dim \ker(\varphi) = (n+1)-1 = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}] < +\infty,$$

et donc $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. (On peut noter que le problème difficile « soit $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. Existe-t-il $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X}+1)-\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{Q}$? » a été résolu simplement par le théorème du rang.)

Exercice 10 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel donné). Soit φ l'application définie par : $\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E},\ \varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X})$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $\ker\varphi$ et $\mathrm{Im}\varphi$.

Correction :

1. Si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $\mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X})$ est encore un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Par suite, φ est bien une application de E dans lui-même. Soient alors $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q}) &= (\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q})(\mathrm{X}+1) - (\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q})(\mathrm{X}) = \lambda(\mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X})) + \mu(\mathrm{Q}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{Q}(\mathrm{X})) \\ &= \lambda\varphi(\mathrm{P}) + \mu\varphi(\mathrm{Q}).\end{aligned}$$

φ est linéaire de E vers lui-même et donc un endomorphisme de E.

2. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$. $\mathrm{P} \in \ker\varphi \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x+1) = \mathrm{P}(x)$. Montrons alors que P est constant. Soit $\mathrm{Q} = \mathrm{P} - \mathrm{P}(0)$. Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à n s'annulant en les entiers naturels 0, 1, 2,... (car $\mathrm{P}(0) = \mathrm{P}(1) = \mathrm{P}(2) = \ldots$) et a ainsi une infinité de racines deux à deux distinctes. Q est donc le polynôme nul ou encore $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) = \mathrm{P}(0)$. Par suite, P est un polynôme constant. Réciproquement, les polynômes constants sont clairement dans $\ker\varphi$ et donc

$$\ker\varphi = \{\text{polynômes constants}\} = \mathbb{R}_0[\mathrm{X}].$$

Pour déterminer $\mathrm{Im}\,\varphi$, on note tout d'abord que si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $\varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X})$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. En effet, si $\mathrm{P} = a_n\mathrm{X}^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\mathrm{X}^k$ (avec a_n quelconque, éventuellement nul) alors

$$\begin{aligned}\varphi(\mathrm{P}) &= a_n((\mathrm{X}+1)^n - \mathrm{X}^n) + \text{termes de degré inférieur on égal à } n-1 \\ &= a_n(\mathrm{X}^n - \mathrm{X}^n) + \text{termes de degré inférieur on égal à } n-1 \\ &= \text{termes de degré inférieur on égal à } n-1.\end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{Im}\,(\varphi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. Mais d'après le théorème du rang,

$$\dim \mathrm{Im}\,(\varphi) = \dim \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] - \dim \ker\,(\varphi) = (n+1) - 1 = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}] < +\infty,$$

et donc $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. (On peut noter que le problème difficile « soit $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. Existe-t-il $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{Q}$? » a été résolu simplement par le théorème du rang.)

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Soit E un espace vectoriel de dimension n et f une application linéaire de E dans lui-même.

Montrer que les deux assertions qui suivent sont équivalentes :

(i) $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$.

(ii) $f^2 = 0$ et $n = 2 \cdot \mathrm{rg}(f)$.

Correction :

(i) $\Rightarrow$ **(ii)** Supposons $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$.

Soit $x \in \mathrm{E}$, alors $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ donc $f(x) \in \ker(f)$, cela entraîne $f(f(x)) = 0$ et donc $f^2 = 0$.

De plus, d'après la formule du rang $\dim\ker(f) + \mathrm{rg}(f) = n$, mais $\dim\ker(f) = \dim\mathrm{Im}(f) = \mathrm{rg}(f)$, ainsi $2\mathrm{rg}(f) = n$.

(ii) $\Rightarrow$ **(i)** Si $f^2 = 0$ alors $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$ car pour $y \in \mathrm{Im}(f)$ il existe x tel que $y = f(x)$ et $f(y) = f^2(x) = 0$.

De plus si $2\mathrm{rg}(f) = n$ alors la formule du rang donne $\dim\ker(f) = \mathrm{rg}(f)$ c'est-à-dire $\dim\ker(f) = \dim\mathrm{Im}(f)$.

Nous savons donc que $\mathrm{Im}(f)$ est inclus dans $\ker(f)$ mais ces espaces sont de même dimension donc sont égaux : $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 2 : Soient $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$f(e_1) = 2e_1 + e_3,\ f(e_2) = -e_2 + e_4,\ f(e_3) = e_1 + 2e_3 \ \text{ et } \ f(e_4) = e_2 - e_4.$$

Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Correction : Soit $u = (x, y, z, t) = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 \in \mathbb{R}^4$. Alors,

$$\begin{aligned} f(u) &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) + tf(e_4) = x(2e_1 + e_3) + y(-e_2 + e_4) + z(e_1 + 2e_3) + t(e_2 - e_4) \\ &= (2x + z)e_1 + (-y + t)e_2 + (x + 2z)e_3 + (y - t)e_4. \end{aligned}$$

Par suite,

$$u \in \ker(f) \iff \left\{\begin{array}{l} 2x + z = 0 \\ -y + t = 0 \\ x + 2z = 0 \\ y - t = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = z = 0 \\ y = t \end{array}\right. .$$

Donc, $\ker(f) = \{(0, y, 0, y),\ y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}((0, 1, 0, 1))$.

$$\ker(f) = \mathrm{vect}((0, 1, 0, 1)).$$

Soit $u' = (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} u' = (x', y', z', t') \in \mathrm{Im}(f) &\iff \exists (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \left\{\begin{array}{l} 2x + z = x' \\ -y + t = y' \\ x + 2z = z' \\ y - t = t' \end{array}\right. \\ &\iff \exists (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{3}(2x' - z') \\ z = \frac{1}{3}(-x' + 2z') \\ t = y + y' \\ y' + t' = 0 \end{array}\right. \\ &\iff y' = -t' \end{aligned}$$

(si $y' \neq -t'$, le système ci-dessus, d'inconnues x, y, z et t, n'a pas de solution et si $y' = -t'$, le système ci-dessus admet au moins une solution comme par exemple $(x, y, z, t) = \left(\frac{1}{3}(2x' - z'), 0, \frac{1}{3}(-x' + 2z'), y'\right)$.

Donc, $\mathrm{Im}(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \ y + t = 0\} = \{(x, y, z, -y)/(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{xe_1 + y(e_2 - e_4) + ze_3,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^4\}$.

$$\mathrm{Im}(f) = \{(x, y, z, -y)/(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{vect}(e_1, e_2 - e_4, e_3).$$

Autre solution pour la détermination de $\mathrm{Im}(f)$.

$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{vect}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \mathrm{vect}\,(2e_1+e_3, -e_2+e_4, e_1+2e_3, e_2-e_4) = \mathrm{vect}\,(2e_1+e_3, e_1+2e_3, e_2-e_4)$.

Mais d'autre part, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 4-1 = 3$.

Donc, $(2e_1+e_3, e_1+2e_3, e_2-e_4)$ est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

2

Exercice 3 : Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathscr{C}$ et E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies sur $\mathbb{K}$ et u et v deux applications linéaires de E dans F.

Montrer que :

$$|\mathrm{rg} u - \mathrm{rg} v| \leqslant \mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg} u + \mathrm{rg} v.$$

Correction : Par définition, $rg\ (u+v) = \dim\ \left(\mathrm{Im}\ (u+v)\right)$.

$$\mathrm{Im}\ (u+v) = \{u(x)+v(x),\ x \in \mathrm{E}\} \subset \{u(x)+v(y),\ (x,y) \in \mathrm{E}^2\} = \mathrm{Im}\ u + \mathrm{Im}\ v.$$

Donc,

$$\begin{aligned} rg(u+v) &= \dim\ \left(\mathrm{Im}\ (u+v)\right) \\ &\leqslant \dim\ (\mathrm{Im}\ u + \mathrm{Im}\ v) = \dim\ (\mathrm{Im}\ u) + \dim\ (\mathrm{Im}\ v) - \dim\ (\mathrm{Im}\ u \cap\ \mathrm{Im} v) \\ &\leqslant \dim\ (\mathrm{Im}\ u) + \dim\ (\mathrm{Im}\ v) = rg\ u + rg\ v. \end{aligned}$$

On a montré que :

$$\forall (u,v) \in (\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}))^2,\ rg\ (u+v) \leqslant rg\ u + rg\ v.$$

Ensuite,

$$rg\ u = rg\ (u+v-v) \leqslant rg\ (u+v) + rg\ (-v) = rg\ (u+v) + rg\ v,$$

(il est clair que $\mathrm{Im}\ (-v) = \mathrm{Im}\ v$) et donc $rg\ u - rg\ v \leqslant rg\ (u+v)$. En échangeant les rôles de u et v, on a aussi $rg\ v - rg\ u = rg\ (u+v)$ et finalement

$$\forall (u,v) \in (\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}))^2,\ |rg\ u - rg\ v| \leqslant rg\ (u+v).$$

Exercice 4 : Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ non nul tel que $f^2 = 0$.

Déterminer $\mathrm{rg}\,(f)$.

Exercice 5 : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F.

1. Montrer que $[(\forall g \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{E}),\ f \circ g \circ f = 0 \Rightarrow g = 0) \Rightarrow f \text{ bijective}]$.
2. On pose $\dim \mathrm{E} = p$, $\dim \mathrm{F} = n$ et $\mathrm{rg} f = r$. Calculer la dimension de $\{g \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{E}) /\ f \circ g \circ f = 0\}$.

Correction :

1. Si $\mathrm{N} = \ker f \neq \{0\}$, considérons g non nul tel que $\mathrm{Im} g \neq \{0\}$ et $\mathrm{Im} g \subset \ker f$.

   Pour un tel g, $f \circ g = 0$ puis $f \circ g \circ f = 0$ et donc $g = 0$ par hypothèse, contredisant g non nulle. Donc $\ker f = \{0\}$.

   Si $\mathrm{Im} f \neq \mathrm{F}$, on choisit g nulle sur $\mathrm{Im} f$ et non nulle sur un supplémentaire de $\mathrm{Im} f$ (dont l'existence est admise en dimension infinie). Alors, $g \circ f = 0$ puis $f \circ g \circ f = 0$ et donc $g = 0$ contredisant g non nulle. Donc $\mathrm{Im} f = \mathrm{F}$.

   Finalement, f est bien un isomorphisme de E sur F.

2 Soit $\mathrm{A} = \{g \in \mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{E}) / \ f \circ g \circ f = 0\}$. Tout d'abord A est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{E})$ car contient l'application nulle et est stable par combinaison linéaire (ou bien A est le noyau de l'application linéaire de $\mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{E})$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ qui à g associe $f \circ g \circ f$).

Soit J un supplémentaire de $\mathrm{I} = \mathrm{Im} f$ dans F. Un élément g de $\mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{E})$ est entièrement déterminé par ses restrictions à I et J.

$$f \circ g \circ f = 0 \Leftrightarrow (f \circ g)_{/\mathrm{I}} = 0 \text{ et } g_{/\mathrm{J}} \text{ est quelconque} \Leftrightarrow g(\mathrm{I}) \subset \mathrm{N}.$$

Pour être le plus méticuleux possible, on peut alors considérer l'application G de $\mathcal{L}(\mathrm{I},\mathrm{N}) \times \mathcal{L}(\mathrm{J},\mathrm{E})$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{E})$ qui à un couple (g_1, g_2) associe l'unique application linéaire g de F dans E telle que $g_{/\mathrm{I}} = g_1$ et $g_{/\mathrm{J}} = g_2$. G est linéaire et injective d'image A. Donc

$$\mathrm{dim} \mathrm{A} = \mathrm{dim}\mathcal{L}(\mathrm{I},\mathrm{N}) \times \mathrm{dim}\mathcal{L}(\mathrm{J},\mathrm{E}) = \mathrm{dim}\mathcal{L}(\mathrm{I},\mathrm{N}) + \mathrm{dim}\mathcal{L}(\mathrm{J},\mathrm{E}) = r(p-r) + (n-r)p = pn - r^2.$$

Exercice 6 : Soit E un espace vectoriel de dimension n et f une application linéaire de E dans lui-même. Montrer que les deux assertions qui suivent sont équivalentes :

(i) $\ker f = \mathrm{Im}\,(f)$

(ii) $f^2 = 0$ et $n = 2 \cdot \mathrm{rg}(f)$

Correction :

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons $\ker f = \mathrm{Im}\,(f)$. Soit $x \in \mathrm{E}$, alors $f(x) \in \mathrm{Im}\,(f)$ donc $f(x) \in \ker f$, cela entraîne $f(f(x)) = 0$; donc $f^2 = 0$.

De plus d'après la formule du rang $\dim \ker f + \mathrm{rg}(f) = n$, mais $\dim \ker f = \dim \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{rg} f$, ainsi $2\mathrm{rg}(f) = n$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si $f^2 = 0$ alors $\mathrm{Im}\,(f) \subset \ker f$ car pour $y \in \mathrm{Im}\,(f)$ il existe x tel que $y = f(x)$ et $f(y) = f^2(x) = 0$. De plus si $2\mathrm{rg}(f) = n$ alors la formule du rang donne $\dim \ker f = \mathrm{rg}(f)$ c'est-à-dire $\dim \ker f = \dim \mathrm{Im}\,(f)$. Nous savons donc que $\mathrm{Im}\,(f)$ est inclus dans $\ker f$ mais ces espaces sont de même dimension donc sont égaux :

$$\ker f = \mathrm{Im}\,(f).$$

Exercice 7 : Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1 Montrer que, pour tout endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$(\ker f = \mathrm{Im} f) \Leftrightarrow (f^2 = 0 \text{ et } n = 2\mathrm{rg} f) \Leftrightarrow (f^2 = 0 \text{ et } \exists g \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) / \ f \circ g + g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}).$$

2 On suppose $\ker f = \mathrm{Im} f$. Montrer qu'il existe une base $(u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_p)$ de E telle que :

$$\forall i \in \{1, ..., p\}, \ f(u_i) = 0 \text{ et } f(v_i) = u_i.$$

Correction :

1 • **(1)⇒(2)**. Si $\ker f = \mathrm{Im} f$, alors pour tout élément x de E, $f(x)$ est dans $\mathrm{Im} f = \ker f$ et donc $f(f(x)) = 0$. Par suite, $f^2 = 0$. De plus, d'après le théorème du rang, $n = \dim (\ker f) + \mathrm{rg} f = 2 \mathrm{rg} f$ ce qui montre que n est nécessairement pair et que $\mathrm{rg} f = \dfrac{n}{2}$. • **(2)⇒(3)**. Si $f^2 = 0$ et $n = 2 \mathrm{rg} f \ (\in 2\mathbb{N}_{n_0})$,

cherchons un endomorphisme g de E tel que $f \circ g + g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$. Posons $r = \mathrm{rg}\ f$ et donc $n = 2r$, puis $\mathrm{F} = \ker\ f = \mathrm{Im}\ f$ ($\dim \mathrm{F} = r$).
Soit G un supplémentaire de F dans E ($\dim \mathrm{G} = r$). Soit $(e'_1, \ldots, e'_r)$ une base de G. Pour $i \in [\![1\,;r]\!]$, on pose $e_i = f(e'_i)$. Montrons que la famille $(e_1, \ldots, e_r)$ est libre. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$.

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda e'_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e'_i \in \ker\ f \cap \mathrm{G} = \{0\} \Rightarrow \forall i \in \{1, \ldots, r\},\ \lambda_i = 0,$$

car la famille $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ est libre. $(e_1, \ldots, e_r)$ est une famille libre de $\mathrm{F} = \mathrm{Im}\ f$ de cardinal r et donc une base de $\mathrm{F} = \ker\ f = \mathrm{Im}\ f$. Au passage, puisque $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, $(e_1, \ldots, e_r, e'_1, \ldots, e'_r)$ est une base de E. Soit alors g l'endomorphisme de E défini par les égalités : $\forall i \in [\![1\,;r]\!]$, $g(e_i) = e'_i$ et $g(e'_i) = e_i$ (g est entièrement déterminé par les images des vecteurs d'une base de E). Pour i élément de $[\![1\,;r]\!]$, on a alors :

$$(f \circ g + g \circ f)(e_i) = f(e'_i) + g(0) = e_i + 0 = e_i,$$

et

$$(f \circ g + g \circ f)(e'_i) = f(e_i) + g(e_i) = 0 + e'_i = e'_i.$$

Ainsi, les endomorphismes $f \circ g + g \circ f$ et Id_{E} coïncident sur une base de E et donc $f \circ g + g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

- **(3)⇒(1).** Supposons que $f^2 = 0$ et qu'il existe $g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $f \circ g + g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$. Comme $f^2 = 0$, on a déjà $\mathrm{Im}\ f \subset \ker\ f$. D'autre part, si x est un élément de $\ker\ f$, alors $x = f(g(x)) + g(f(x)) = f(g(x)) \in \mathrm{Im}\ f$ et on a aussi $\ker\ f \subset \mathrm{Im}\ f$. Finalement, $\ker\ f = \mathrm{Im}\ f$.

2 L'existence d'une base $(e_1, \ldots, e_p, e'_1, \ldots, e'_p)$ de E vérifiant les conditions de l'énoncé a été établie au passage (avec $p = r = \mathrm{rg}\ f$).

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral (admis) et montrer l'inégalité de Taylor-Lagrange.*

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et A, B deux sev de E.
On considère C un supplémentaire de $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ dans B. Montrer que $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{A} \oplus \mathrm{C}$.

Exercice 2 : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{k^2+n^2}$.

Correction : Soit $u_n = n\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{k^2+n^2} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$. En posant $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ nous venons d'écrire la somme de Riemann correspondant à $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$. Cette intégrale se calcule facilement :

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

La somme de Riemann u_n convergeant vers $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ nous venons de montrer que (u_n) converge vers $\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 3 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x-y) \end{array}$

Déterminer une base du noyau et de l'image de f et en déduire si f est injective, surjective, bijective.

Correction :

1. Calculons le noyau :

$$\begin{aligned} (x,y) \in \ker(f) &\iff f(x,y) = (0,0) \iff (2x+y, x-y) = (0,0) \\ &\iff \begin{cases} 2x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0) \end{aligned}$$

Ainsi $\ker(f) = \{(0,0)\}$ et donc f est injective. On sait déjà qu'elle est bijective d'après le théorème du rang.

2. Calculons l'image. Quels éléments (X,Y) peuvent s'écrire $f(x,y)$?

$$\begin{aligned} f(x,y) = (X,Y) &\iff (2x+y, x-y) = (X,Y) \\ &\iff \begin{cases} 2x+y = X \\ x-y = Y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{X+Y}{3} \\ y = \dfrac{X-2Y}{3} \end{cases} \\ &\iff (x,y) = \left(\frac{X+Y}{3}, \frac{X-2Y}{3}\right) \end{aligned}$$

Donc pour n'importe quel $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ on trouve un antécédent $(x,y) = \left(\dfrac{X+Y}{3}, \dfrac{X-2Y}{3}\right)$ qui vérifie donc $f(x,y) = (X,Y)$.

Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$. Ainsi f est surjective.

Remarque : Une autre méthode est d'extraire une base de l'image d'une base (la base canonique, par exemple) par f.

3. Conclusion : f est injective et surjective donc bijective.

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *L'ensemble des applications linéaires de* E *dans* F *est un espace vectoriel.*

Exercice 1 : On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Soient $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), AM = 0_2\}$ et $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), BM = 0_2\}$.

1. Montrer que F et G sont des sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $A + B$ est inversible. En déduire que F et G sont en somme directe.

   Sont-ils supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 2 : Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Correction : *Posons* $p_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Alors, $s_n = \ln p_n = \dfrac{1}{n} \ln \dfrac{(2n)!}{n!n^n} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{k}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = 2\ln 2 - 1.$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{4}{e}$.

Exercice 3 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(-1), P(0), P(1)) \end{array}$

Déterminer une base du noyau et de l'image de f et en déduire si f est injective, surjective, bijective.

Correction : $f : \mathbb{R}_3[X] \longmapsto \mathbb{R}^3$ *va d'un espace de dimension* 4 *vers un espace de dimension strictement plus petit et donc* f *ne peut être injective.*

1. *Calculons le noyau. Écrivons un polynôme* P *de degré* $\leqslant 3$ *sous la forme* $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

Alors $P(0) = d$, $P(1) = a + b + c + d$, $P(-1) = -a + b - c + d$.

$$\begin{aligned}
P(X) \in \ker(f) &\iff (P(-1), P(0), P(1)) = (0,0,0)\\
&\iff (-a+b-c+d, d, a+b+c+d) = (0,0,0)\\
&\iff \begin{cases} -a+b-c+d = 0 \\ d = 0 \\ a+b+c+d = 0 \end{cases} \qquad \iff \cdots\\
&\iff \begin{cases} a = -c \\ b = 0 \\ d = 0 \end{cases}\\
&\iff (a,b,c,d) = (t, 0, -t, 0) \quad t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ainsi le noyau $\ker(f) = \{tX^3 - tX \mid t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}\,\{X^3 - X\}$. f n'est pas injective son noyau étant de dimension 1.

2 La formule du rang pour $f : \mathbb{R}_3[X] \longmapsto \mathbb{R}^3$ s'écrit $\dim\ker(f) + \dim\mathrm{Im}(f) = \dim\mathbb{R}_3[4]$.

Autrement dit $1 + \dim\mathrm{Im}(f) = 4$.

Donc $\dim\mathrm{Im}(f) = 3$.

Ainsi $\mathrm{Im}(f)$ est un espace de dimension 3 dans $\mathbb{R}^3$ donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. Conclusion f est surjective.

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité pour les applications linéaires. linéaire.*

Exercice 1 : Soit $\mathrm{F} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - 2y + z - t = 0\}$.

On considère $\mathrm{G} = \mathrm{vect}\,(u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1, 2, -1, 0)$, $u_2 = (3, 0, -1, 1)$ et $u_3 = (-1, 4, -1, -1)$.

1. Calculer $\dim \mathrm{F}$, $\dim \mathrm{G}$, $\dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})$, $\dim(\mathrm{F} + \mathrm{G})$.
2. F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 2 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{8k^3 + n^3}$.

Correction : $u_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(k/n)^2}{1 + 8(k/n)^3}$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{8x^3 + 1}\, dx = \left[\frac{1}{24} \ln|8x^3 + 1|\right]_0^1 = \frac{\ln 3}{12}$.

Exercice 3 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, 0, x - 7y, x + y) \end{array}$

Déterminer une base du noyau et de l'image de f et en déduire si f est injective, surjective, bijective.

Correction : Sans aucun calcul on sait $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ ne peut être surjective car l'espace d'arrivée est de dimension strictement supérieure à l'espace de départ.

1. Calculons le noyau :

$$\begin{aligned}
(x, y) \in \ker(f) &\iff f(x, y) = (0, 0, 0, 0) \\
&\iff (y, 0, x - 7y, x + y) = (0, 0, 0, 0) \\
&\iff \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \\ x - 7y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff \cdots \\
&\iff (x, y) = (0, 0)
\end{aligned}$$

Ainsi $\ker(f) = \{(0, 0)\}$ et donc f est injective.

2 La formule du rang appliquée à $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ s'écrit $\dim \ker(f) + \dim \operatorname{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^2$.

Donc $\dim \operatorname{Im}(f) = 2$.

Ainsi $\operatorname{Im}(f)$ est un espace vectoriel de dimension 2 inclus dans $\mathbb{R}^3$, f n'est pas surjective.

Par décrire $\operatorname{Im}(f)$ nous allons trouver deux vecteurs indépendants de $\operatorname{Im}(f)$.

Il y a un nombre infini de choix : prenons par exemple $v_1 = f(1,0) = (0,0,1,1)$.

Pour v_2 on cherche (un peu à tâtons) un vecteur linéairement indépendant de v_1.

Essayons $v_2 = f(0,1) = (1,0,-7,1)$.

Par construction $v_1, v_2 \in \operatorname{Im}(f)$; ils sont clairement linéairement indépendants et comme $\dim \operatorname{Im}(f) = 2$ alors $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\operatorname{Im}(f)$.

Ainsi $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{vect}\{v_1, v_2\} = \{\lambda(0,0,1,1) + \mu(1,0,-7,1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Le noyau et l'image d'une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels.*

Exercice 1 : Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour lesquels : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (ax^2 + bx + c)\cos x$.

1. Montrer que E est sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de E et sa dimension.

Exercice 2 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k^2+n^2}$.

Correction : Soit

$$u_n = n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k^2+n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

En posant $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ nous venons d'écrire la somme de Riemann correspondant à $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$. Cette intégrale se calcule facilement :

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

La somme de Riemann u_n convergeant vers $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ nous venons de montrer que (u_n) converge vers $\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 3 : Soit E un espace vectoriel et soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E, on définit l'application $f \colon E_1 \times E_2 \to E$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Que donne le théorème du rang ?

Correction :

1 Aucun problème...

2 Par définition de f et de ce qu'est la somme de deux sous-espaces vectoriels, l'image est

$$\mathrm{Im}\,(f) = \{f(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathrm{E}_1, x_2 \in \mathrm{E}_2\} = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in \mathrm{E}_1, x_2 \in \mathrm{E}_2\} = \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2.$$

Pour le noyau :

$$\ker f = \{(x_1, x_2) \mid f(x_1, x_2) = 0\} = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 0\}$$

Mais on peut aller un peu plus loin. En effet un élément $(x_1, x_2) \in \ker f$, vérifie $x_1 \in \mathrm{E}_1$, $x_2 \in \mathrm{E}_2$ et $x_1 = -x_2$. Donc $x_1 \in \mathrm{E}_2$. Donc $x_1 \in \mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$. Réciproquement si $x \in \mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$, alors $(x, -x) \in \ker f$. Donc

$$\ker f = \{(x, -x) \mid x \in \mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2\}.$$

De plus l'application $x \mapsto (x, -x)$ montre que $\ker f$ est isomorphe à $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$.

3 Le théorème du rang s'écrit :

$$\dim \ker f + \dim \mathrm{Im}\,(f) = \dim\,(\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2).$$

Compte tenu de l'isomorphisme entre $\ker f$ et $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$ on obtient :

$$\dim\,(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2) + \dim\,(\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2) = \dim\,(\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2).$$

Mais $\dim\,(\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2) = \dim \mathrm{E}_1 + \dim \mathrm{E}_2$, donc on retrouve ce que l'on appelle le théorème des quatre dimensions :

$$\dim\,(\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2) = \dim \mathrm{E}_1 + \dim \mathrm{E}_2 - \dim\,(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2).$$

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral (admis) et montrer l'inégalité de Taylor-Lagrange.*

Exercice 1 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, $\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(1) = \mathrm{P}'(2) = 0\}$ et $\mathrm{G} = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(2) = \mathrm{P}'(1) = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont deux plans vectoriels
2. Montrer que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.

Exercice 2 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \sin\frac{k\pi}{n}$.

Correction : Pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^2 \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}),$$

où $f(x) = x^2\sin(\pi x)$. u_n est donc une somme de Riemann à pas constant associée à la fonction continue f sur $[0,1]$. Quand n tend vers $+\infty$, le pas $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0 et on sait que u_n tend vers

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\sin(\pi x)\,dx &= \left[-\frac{1}{\pi}x^2\cos(\pi x)\right]_0^1 + \frac{2}{\pi}\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}(\left[\frac{1}{\pi}x\sin(\pi x)\right]_0^1 - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx)\\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi})\\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}.\end{aligned}$$

Exercice 3 : On pose $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f_1(x,y) = (2x+y, x-y)$

Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im}\,(f)$. En déduire si f est injective, surjective, bijective.

Correction : Calculer le noyau revient à résoudre un système linéaire, et calculer l'image aussi. On peut donc tout faire ``à la main''.

Mais on peut aussi appliquer un peu de théorie ! Noyau et image sont liés par la formule du rang :

$$\dim\ker f+\dim\mathrm{Im}\,(f)=\dim\mathrm{E}$$

pour $f:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$.

Donc si on a trouvé le noyau alors on connaît la dimension de l'image. Et il suffit alors de trouver autant de vecteur de l'image.

f_1 est injective, surjective (et donc bijective).

1. Faisons tout à la main. Calculons le noyau :

$$\begin{aligned}(x,y)\in\ker f_1 &\iff f_1(x,y)=(0,0) \iff (2x+y,x-y)=(0,0)\\ &\iff \begin{cases}2x+y=0\\ x-y=0\end{cases} \iff (x,y)=(0,0)\end{aligned}$$

Ainsi $\ker f_1=\{(0,0)\}$ et donc f_1 est injective.

2. Calculons l'image. Quels éléments (X,Y) peuvent s'écrire $f_1(x,y)$?

$$\begin{aligned}f_1(x,y)=(\mathrm{X},\mathrm{Y}) &\iff (2x+y,x-y)=(\mathrm{X},\mathrm{Y})\\ &\iff \begin{cases}2x+y=\mathrm{X}\\ x-y=\mathrm{Y}\end{cases} \iff \begin{cases}x=\dfrac{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}{3}\\ y=\dfrac{\mathrm{X}-2\mathrm{Y}}{3}\end{cases}\\ &\iff (x,y)=\left(\frac{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}{3},\frac{\mathrm{X}-2\mathrm{Y}}{3}\right)\end{aligned}$$

Donc pour n'importe quel $(\mathrm{X},\mathrm{Y})\in\mathbb{R}^2$ on trouve un antécédent $(x,y)=(\frac{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}{3},\frac{\mathrm{X}-2\mathrm{Y}}{3})$ qui vérifie donc $f_1(x,y)=(\mathrm{X},\mathrm{Y})$. Donc $\mathrm{Im}\,(f)_1=\mathbb{R}^2$. Ainsi f_1 est surjective.

3. Conclusion : f_1 est injective et surjective donc bijective.

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Caractérisation des projecteurs.*

Exercice 1 :

1. Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Montrer que toute famille de polynômes $\{\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_n\}$ avec $\deg \mathrm{P}_i = i$ (pour $i = 0, 1, \dots, n$) forme une base de E.
2. Écrire le polynôme $\mathrm{F} = 3\mathrm{X} - \mathrm{X}^2 + 8\mathrm{X}^3$ sous la forme $\mathrm{F} = a + b(1-\mathrm{X}) + c(\mathrm{X}-\mathrm{X}^2) + d(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X}^3)$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ puis sous la forme $\mathrm{F} = \alpha + \beta(1+\mathrm{X}) + \gamma(1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2) + \delta(1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2+\mathrm{X}^3)$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R})$.

Correction :

1. Tout d'abord la famille $\{\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \dots, \mathrm{P}_n\}$ contient $n+1$ vecteurs dans l'espace $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ de dimension $n+1$. Ici un vecteur est un polynôme : P_0 est un polynôme constant non nul, P_1 est un polynôme de degré exactement 1,... Rappelons que lorsque le nombre de vecteurs égal la dimension de l'espace nous avons les équivalences, entre être une famille libre et être une famille génératrice et donc aussi être une base.

   Nous allons donc montrer que $\{\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_n\}$ est une famille libre. Soit une combinaison linéaire nulle :
$$\lambda_0 \mathrm{P}_0 + \lambda_1 \mathrm{P}_1 + \cdots + \lambda_n \mathrm{P}_n = 0.$$
   Introduisons l'hypothèse concernant les degrés : $\deg \mathrm{P}_0 = 0$, $\deg \mathrm{P}_1 = 1$, ..., $\deg \mathrm{P}_n = n$. Définissons le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \lambda_0 \mathrm{P}_0 + \lambda_1 \mathrm{P}_1 + \cdots + \lambda_n \mathrm{P}_n$.

   Nous allons montrer successivement $\lambda_n = 0$ puis $\lambda_{n-1} = 0$,..., $\lambda_0 = 0$.

   Par l'absurde supposons $\lambda_n \neq 0$ et écrivons $\mathrm{P}_n(\mathrm{X}) = a_n \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_1 \mathrm{X} + a_0$, comme $\deg \mathrm{P}_n(\mathrm{X}) = n$ alors $a_n \neq 0$. Maintenant $\mathrm{P}(\mathrm{X})$ est aussi un polynôme de degré exactement n qui s'écrit
$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \lambda_n \cdot a_n \cdot \mathrm{X}^n + \text{termes de plus bas degré}$$
   La combinaison linéaire nulle implique que $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = 0$ (le polynôme nul). Donc en identifiant les coefficients devant X^n on obtient $\lambda_n \cdot a_n = 0$ On obtient $a_n = 0$ ou $\lambda_n = 0$. Ce qui est une contradiction. Conclusion $\lambda_n = 0$.

   Maintenant la combinaison linéaire nulle s'écrit $\lambda_0 \mathrm{P}_0 + \lambda_1 \mathrm{P}_1 + \cdots + \lambda_{n-1}\mathrm{P}_{n-1} = 0$. Par récurrence descendante on trouve $\lambda_{n-1} = 0$, ..., jusqu'à $\lambda_0 = 0$.

   Bilan : $\lambda_0 = 0$, ..., $\lambda_n = 0$ donc la famille $\{\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_n\}$ est libre, elle donc aussi génératrice ; ainsi $\{\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_n\}$ est une base de $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Un point que nous avons utilisé et qu'il est peut-être utile de détailler est le suivant : si un polynôme égal le polynôme nul alors tous ces coefficients sont nul.

Voici une justification : écrivons $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = 0$ et divisons par X^n :

$$a_n + \frac{a_{n-1}}{X} + \frac{a_{n-2}}{X^2} + \cdots + \frac{a_1}{X^{n-1}} + \frac{a_0}{X^n} = 0$$

Lorsque l'on fait tendre X vers $+\infty$ alors le terme de gauche tend vers a_n et celui de droite vaut 0 donc par unicité de la limite $a_n = 0$. On fait ensuite une récurrence descendante pour prouver $a_{n-1} = 0$,..., $a_0 = 0$.

Une conséquence est que si deux polynômes sont égaux alors leurs coefficients sont égaux. Et une autre formulation est de dire que $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2 On trouve $a = 10, b = -10, c = -7, d = -8$. Puis $\alpha = -3, \beta = 4, \gamma = -9, \delta = 8$.

Exercice 2 : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k}$.

Correction : Encore une fois, ce n'est pas une somme de Riemann. On tente un encadrement assez large : pour $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\frac{n+k}{n^2+n} \leqslant \frac{n+k}{n^2+k} \leqslant \frac{n+k}{n^2}.$$

En sommant ces inégalités, il vient

$$\frac{1}{n^2+n}\sum_{k=1}^{n}(n+k) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k} \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(n+k),$$

et donc ((premier terme + dernier terme)×nombre de termes/2),

$$\frac{1}{n^2+n}\frac{((n+1)+2n)n}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}\frac{((n+1)+2n)n}{2},$$

et finalement, $\frac{3n+1}{2(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \frac{3n+1}{2n}$. Or, $\frac{3n+1}{2(n+1)}$ et $\frac{3n+1}{2n}$ tendent tous deux vers $\frac{3}{2}$. Donc, u_n tend vers $\frac{3}{2}$.

Exercice 3 : On pose $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f_2(x, y, z) = (2x + y + z, y - z, x + y)$

Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im}\,(f)$. En déduire si f est injective, surjective, bijective.

Correction : Calculer le noyau revient à résoudre un système linéaire, et calculer l'image aussi. On peut donc tout faire ``à la main''.

Mais on peut aussi appliquer un peu de théorie ! Noyau et image sont liés par la formule du rang :

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im}(f) = \dim \mathrm{E}$$

pour $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$.

Donc si on a trouvé le noyau alors on connaît la dimension de l'image. Et il suffit alors de trouver autant de vecteur de l'image.

1. Calculons d'abord le noyau :

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \ker f_2 &\iff f_2(x,y,z) = (0,0,0) \\
&\iff (2x+y+z, y-z, x+y) = (0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ y-z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x=-z \\ y=z \end{cases} \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

   Ainsi $\ker f_2 = \operatorname{Vect}(-1,1,1)$ et donc f_2 n'est pas injective.

2. Maintenant nous allons utiliser que $\ker f_2 = \operatorname{Vect}(-1,1,1)$, autrement dit $\dim \ker f_2 = 1$. La formule du rang appliquée à $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ s'écrit $\dim \ker f_2 + \dim \operatorname{Im}(f)_2 = \dim \mathbb{R}^3$. Donc $\dim \operatorname{Im}(f)_2 = 2$. Nous allons trouver une base de $\operatorname{Im}(f)_2$. Il suffit donc de trouver deux vecteurs linéairement indépendants. Prenons par exemple $v_1 = f_2(1,0,0) = (2,0,1) \in \operatorname{Im}(f)_2$ et $v_2 = f_2(0,1,0) = (1,1,1) \in \operatorname{Im}(f)_2$. Par construction ces vecteurs sont dans l'image de f_2 et il est clair qu'ils sont linéairement indépendants. Donc $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\operatorname{Im}(f)_2$.

3. f_2 n'est ni injective, ni surjective (donc pas bijective).

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral (admis) et montrer l'inégalité de Taylor-Lagrange.*

Exercice 1 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^n$.

1. Montrer que $(f_0, \dots, f_n)$ est libre.
2. En déduire $\dim \mathrm{E}$.

Exercice 2 : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$.

Correction : Tout d'abord

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}),$$

où $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in [0,1[$. u_n est donc effectivement une somme de Riemann à pas constant associée à la fonction f mais malheureusement, cette fonction n'est pas continue sur $[0,1]$, ou même prolongeable par continuité en 1. On s'en sort néanmoins en profitant du fait que f est croissante sur $[0,1[$.

Puisque f est croissante sur $[0,1[$, pour $1 \leqslant k \leqslant n-2$, on a $\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, et pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} \geqslant \int_{(k-1)/n}^{k/n} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_{(k-1)/n}^{k/n} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(1-\frac{1}{n}),$$

et

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \\ &= \arcsin(1-\frac{1}{n}) - \arcsin\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{2n-1}}. \end{aligned}$$

Quand n tend vers $+\infty$, les deux membres de cet encadrement tendent vers $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, et donc u_n tend vers $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 3 : On pose $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $f_3(x, y) = (y, 0, x - 7y, x + y)$

Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im}\,(f)$. En déduire si f est injective, surjective, bijective.

Correction : Calculer le noyau revient à résoudre un système linéaire, et calculer l'image aussi. On peut donc tout faire ``à la main''.

Mais on peut aussi appliquer un peu de théorie ! Noyau et image sont liés par la formule du rang :

$$\dim \ker f + \dim \mathrm{Im}\,(f) = \dim \mathrm{E}$$

pour $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$.

Donc si on a trouvé le noyau alors on connaît la dimension de l'image. Et il suffit alors de trouver autant de vecteur de l'image.

Sans aucun calcul on sait $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ ne peut être surjective car l'espace d'arrivée est de dimension strictement supérieur à l'espace de départ.

1. Calculons le noyau :

$$\begin{aligned}
(x, y) \in \ker f_3 &\iff f_3(x, y) = (0, 0, 0, 0) \\
&\iff (y, 0, x - 7y, x + y) = (0, 0, 0, 0) \\
&\iff \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \\ x - 7y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \\
&\iff \cdots \\
&\iff (x, y) = (0, 0)
\end{aligned}$$

Ainsi $\ker f_3 = \{(0, 0)\}$ et donc f_3 est injective.

2. La formule du rang, appliquée à $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ s'écrit $\dim \ker f_3 + \dim \mathrm{Im}\,(f)_3 = \dim \mathbb{R}^2$. Donc $\dim \mathrm{Im}\,(f)_3 = 2$. Ainsi $\mathrm{Im}\,(f)_3$ est un espace vectoriel de dimension 2 inclus dans $\mathbb{R}^3$, f_3 n'est pas surjective.

Par décrire $\mathrm{Im}\,(f)_3$ nous allons trouver deux vecteurs indépendants de $\mathrm{Im}\,(f)_3$. Il y a un nombre infini de choix : prenons par exemple $v_1 = f(1, 0) = (0, 0, 1, 1)$. Pour v_2 on cherche (un peu à tâtons) un vecteur linéairement indépendant de v_1. Essayons $v_2 = f(0, 1) = (1, 0, -7, 1)$. Par construction $v_1, v_2 \in \mathrm{Im}\,(f)$; ils sont clairement linéairement indépendants et comme $\dim \mathrm{Im}\,(f)_3 = 2$ alors $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathrm{Im}\,(f)_3$.

Ainsi $\mathrm{Im}\,(f)_3 = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\} = \{\lambda(0, 0, 1, 1) + \mu(1, 0, -7, 1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Sommes de Riemann.*

Exercice 1 : Projection et symétrie dans K^3

Dans K^3, on donne les sous espaces : $\begin{cases} \mathrm{H} = \{\overrightarrow{\mathrm{X}} = (x,y,z) \text{ tq } x+y+z=0\} \\ \mathrm{K} = \mathrm{vect}(\overrightarrow{\mathrm{U}} = (1,1,2)). \end{cases}$

1. Déterminer $\dim \mathrm{H}$ et en donner une base.
2. Démontrer que $\mathrm{H} \oplus \mathrm{K} = \mathrm{K}^3$.
3. Donner les expressions analytiques des projection et symétrie associées : π_{H} et s_{H}.

Correction :

3. π_{H} :

$$\begin{cases} 4x' = 3x - y - z \\ 4y' = -x + 3y - z \\ 4z' = -2x - 2y + 2z, \end{cases}$$

s_{H} :

$$\begin{cases} 2x' = x - y - z \\ 2y' = -x + y - z \\ 2z' = -2x - 2y. \end{cases}$$

Exercice 2 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$.

Correction : $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2(k+n)+1} = \frac{1}{2}\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2+\frac{2k+1}{n}}$ tend vers $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{2+x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 2) = \ln 2.$

Exercice 3 : On pose $f_4 : \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}^3$, $f_4(\mathrm{P}) = (\mathrm{P}(-1), \mathrm{P}(0), \mathrm{P}(1))$

Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im}\,(f)$. En déduire si f est injective, surjective, bijective.

Correction : Calculer le noyau revient à résoudre un système linéaire, et calculer l'image aussi. On peut donc tout faire ``à la main''.

Mais on peut aussi appliquer un peu de théorie ! Noyau et image sont liés par la formule du rang :

$$\dim\ker f + \dim \operatorname{Im}(f) = \dim \mathrm{E}$$

pour $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$.

Donc si on a trouvé le noyau alors on connaît la dimension de l'image. Et il suffit alors de trouver autant de vecteur de l'image.

$f_4 : \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}^3$ va d'un espace de dimension 4 vers un espace de dimension strictement plus petit et donc f_4 ne peut être injective.

1 Calculons le noyau. Ecrivons un polynôme P de degré $\leqslant 3$ sous la forme $\mathrm{P(X)} = a\mathrm{X}^3 + b\mathrm{X}^2 + c\mathrm{X} + d$. Alors $\mathrm{P}(0) = d$, $\mathrm{P}(1) = a+b+c+d$, $\mathrm{P}(-1) = -a+b-c+d$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P(X)} \in \ker f_4 &\iff (\mathrm{P}(-1), \mathrm{P}(0), \mathrm{P}(1)) = (0,0,0)\\
&\iff (-a+b-c+d, d, a+b+c+d) = (0,0,0)\\
&\iff \begin{cases} -a+b-c+d = 0\\ d = 0\\ a+b+c+d = 0\end{cases}\\
&\iff \cdots\\
&\iff \begin{cases} a = -c\\ b = 0\\ d = 0\end{cases}\\
&\iff (a,b,c,d) = (t, 0, -t, 0) \quad t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ainsi le noyau $\ker f_4 = \{t\mathrm{X}^3 - t\mathrm{X} \mid t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}\}$. f_4 n'est pas injective son noyau étant de dimension 1.

2 La formule du rang pour $f_4 : \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}^3$ s'écrit $\dim\ker f_4 + \dim\operatorname{Im}(f)_4 = \dim \mathbb{R}_3[4]$. Autrement dit $1 + \dim\operatorname{Im}(f)_4 = 4$. Donc $\dim\operatorname{Im}(f)_4 = 3$. Ainsi $\operatorname{Im}(f)_4$ est un espace de dimension 3 dans $\mathbb{R}^3$ donc $\operatorname{Im}(f)_4 = \mathbb{R}^3$. Conclusion f_4 est surjective.

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité pour les applications linéaires. linéaire.*

Exercice 1 : ** Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soient $a_0,\dots, a_n$ $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts et $b_0,\dots, b_n$ $n+1$ nombres complexes.

1. Montrer qu'il existe une unique famille de $n+1$ polynômes à coefficients complexes de degré n exactement vérifiant $\forall\,(i,j) \in [\![0\,;n]\!]$, $\mathrm{L}_i(a_j) = 1$ si $i=j$ et 0 sinon.
2. Montrer que la famille $(\mathrm{L}_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathscr{C}_n[\mathrm{X}]$.
3. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n vérifiant $\forall\, i \in [\![0\,;n]\!]$, $\mathrm{P}(a_i) = b_i$. Expliciter P puis déterminer tous les polynômes vérifiant les égalités précédentes.

Correction :

1. **Unicité.** Soit $i \in [\![0\,;n]\!]$. L_i doit admettre les n racines deux à deux distinctes a_j où j est différent de i et donc L_i est divisible par le polynôme $\prod_{j\neq i}(\mathrm{X}-a_j)$. L_i doit être de degré n et donc il existe un réel non nul λ tel que $\mathrm{L}_i = \lambda\prod_{j\neq i}(\mathrm{X}-a_j)$. Enfin $\mathrm{L}_i(a_i)=1$ fournit $\lambda = \dfrac{1}{\prod_{j\neq i}(a_i-a_j)}$. Ainsi nécessairement $\mathrm{L}_i = \prod_{j\neq i}\dfrac{\mathrm{X}-a_j}{a_i-a_j}$.

   Existence. Les L_i ainsi définis conviennent.

$$\boxed{\forall\, i \in [\![0\,;n]\!]\,,\ \mathrm{L}_i = \prod_{j\neq i}\frac{\mathrm{X}-a_j}{a_i-a_j}.}$$

2. Montrons que la famille $(\mathrm{L}_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est libre.

   Soient $\lambda_0,\dots, \lambda_n$ $n+1$ nombres complexes tels que $\lambda_0\mathrm{L}_0+\dots+\lambda_n\mathrm{L}_n = 0$. En particulier, pour un indice i de $[\![0\,;n]\!]$ donné, $\sum_{j=0}^{n}\lambda_j\mathrm{L}_j(a_i) = 0$ et donc $\lambda_i = 0$ au vu des égalités définissant les L_j. La famille $(\mathrm{L}_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est libre.

   De plus les L_i sont tous dans $\mathscr{C}_n[\mathrm{X}]$ et vérifient $\mathrm{card}(\mathrm{L}_i)_{0\leqslant i\leqslant n} = n+1 = \dim\mathscr{C}_n[\mathrm{X}] < +\infty$. Donc la famille $(\mathrm{L}_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathscr{C}_n[\mathrm{X}]$.
3. Soit P un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à n.

   On écrit P dans la base $(\mathrm{L}_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$: $\mathrm{P} = \sum_{j=0}^{n}\lambda_j\mathrm{L}_j$. En prenant la valeur en a_i, i donné dans $[\![0\,;n]\!]$, on obtient $\lambda_i = \mathrm{P}(a_i)$. D'où l'écriture générale d'un polynôme de degré inférieur ou égal à n dans la base $(\mathrm{L}_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$:

$$\boxed{\forall\, \mathrm{P} \in \mathscr{C}_n[\mathrm{X}],\ \mathrm{P} = \mathrm{P}(a_0)\mathrm{L}_0 + \ldots + \mathrm{P}(a_n)\mathrm{L}_n.}$$

Mais alors : $(\forall\, i \in [\![0\,;n]\!]\,,\ \mathrm{P}(a_i) = b_i) \Rightarrow \mathrm{P} = b_0\mathrm{L}_0 + \ldots + b_n\mathrm{L}_n$.
Réciproquement le polynôme $\mathrm{P} = b_0\mathrm{L}_0 + \ldots + b_n\mathrm{L}_n$ vérifie bien sûr les égalités demandées et est de degré inférieur ou égal à n.

Ainsi, il existe un et un seul polynôme de degré inférieur ou égal à n vérifiant $\forall\, i \in [\![0\,;n]\!]$, $\mathrm{P}(a_i) = b_i$ à savoir $\mathrm{P}_0 = \sum_{i=0}^{n} b_i\mathrm{L}_i$.

Soient $\mathrm{P} \in \mathscr{C}[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{R} = (\mathrm{X} - a_0)\ldots(\mathrm{X} - a_n)$ $(\deg(\mathrm{R}) = n + 1)$.

$$\begin{aligned}(\forall\, i \in [\![0\,;n]\!]\ \mathrm{P}(a_i) = b_i) &\Leftrightarrow (\forall\, i \in [\![0\,;n]\!]\ \mathrm{P}(a_i) = \mathrm{P}_0(a_i))\\ &\Leftrightarrow \mathrm{P} - \mathrm{P}_0 \text{ admet les } n+1 \text{ racines deux à deux distinctes } a_0, \ldots, a_n\\ &\Leftrightarrow \mathrm{P} - \mathrm{P}_0 \text{ est divisible par } \mathrm{R} \Leftrightarrow \exists \mathrm{Q} \in \mathscr{C}[\mathrm{X}]/\ \mathrm{P} = \mathrm{P}_0 + \mathrm{QR}.\end{aligned}$$

Les polynômes cherchés sont les $\mathrm{P}_0 + \mathrm{QR}$ où Q décrit $\mathscr{C}[\mathrm{X}]$.

Exercice 2 : Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{kn}$ pour k entier supérieur ou égal à 2 fixé.

Exercice 3 : Soients $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par : $f(e_1) = 2e_1 + e_3$, $f(e_2) = -e_2 + e_4$, $f(e_3) = e_1 + 2e_3$ et $f(e_4) = e_2 - e_4$.
Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$.

Correction : Soit $u = (x, y, z, t) = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 \in \mathbb{R}^4$. Alors,

$$\begin{aligned}f(u) &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) + tf(e_4) = x(2e_1 + e_3) + y(-e_2 + e_4) + z(e_1 + 2e_3) + t(e_2 - e_4)\\ &= (2x + z)e_1 + (-y + t)e_2 + (x + 2z)e_3 + (y - t)e_4.\end{aligned}$$

Par suite,

$$u \in \ker f \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + z = 0\\ -y + t = 0\\ x + 2z = 0\\ y - t = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = z = 0\\ y = t\end{array}\right..$$

Donc, $\ker f = \{(0, y, 0, y),\ y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((0, 1, 0, 1))$.

$$\ker f = \mathrm{Vect}((0, 1, 0, 1)).$$

Soit $u' = (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4$.

$$u' = (x', y', z', t') \in \mathcal{I}m\ f \Leftrightarrow \exists (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} 2x + z = x' \\ -y + t = y' \\ x + 2z = z' \\ y - t = t' \end{cases} \Leftrightarrow \exists (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} x = \dfrac{1}{3}(2x' - z') \\ z = \dfrac{1}{3}(-x' + 2z') \\ t = y + y' \\ y' + t' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y' = -t'$$

(si $y' \neq -t'$, le système ci-dessus, d'inconnues x, y, z et t, n'a pas de solution et si $y' = -t'$, le système ci-dessus admet au moins une solution comme par exemple $(x, y, z, t) = \left(\dfrac{1}{3}(2x' - z'), 0, \dfrac{1}{3}(-x' + 2z'), y'\right)$. Donc, $\mathcal{I}m\ f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \ y+t = 0\} = \{(x, y, z, -y)/(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{xe_1+y(e_2-e_4)+ze_3,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^4\} = \mathrm{Vect}(e_1, e_2-e_4,$

$$\mathcal{I}m\ f == \{(x, y, z, -y)/(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{Vect}(e_1, e_2 - e_4, e_3).$$

Autre solution pour la détermination de $\mathcal{I}m\ f$. $\mathcal{I}m\ f = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \mathrm{Vect}(2e_1+e_3, -e_2+e_4, e_1+2e_3, e_2-e_4)$
Mais d'autre part, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathcal{I}m\ f) = 4 - 1 = 3$. Donc, $(2e_1 + e_3, e_1 + 2e_3, e_2 - e_4)$ est une base de $\mathcal{I}m\ f$.

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Sommes de Riemann.*

Exercice 1 : Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E l'ensemble des suites réelles p périodiques i.e. l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = u_n$.

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et déterminer sa dimension.

Exercice 2 : Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}\left(\sqrt{1(n-1)} + \sqrt{2(n-2)} + \cdots + \sqrt{(n-1)1}\right)$.

Correction : $\ln k$.

Exercice 3 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + a\bar{z} \end{array}$ où a est un nombre complexe donné non nul.

Montrer que f est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. f est-il un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$?

Déterminer le noyau et l'image de f.

Correction : Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(\lambda z + \mu z') = (\lambda z + \mu z') + a(\overline{\lambda z + \mu z'}) = \lambda(z + a\bar{z}) + \mu(z' + a\overline{z'}) = \lambda f(z) + \mu f(z').$$

f est donc $\mathbb{R}$-linéaire. On note que $f(ia) = i(a - |a|^2)$ et que $if(a) = i(a + |a|^2)$. Comme $a \neq 0$, on a $f(ia) \neq if(a)$. f n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Posons $z = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z \in \ker f \Leftrightarrow z + a\bar{z} = 0 \Leftrightarrow e^{i\theta} + ae^{-i\theta} = 0 \Leftrightarrow e^{2i\theta} = -a.$$

1er cas. Si $|a| \neq 1$, alors, pour tout réel θ, $e^{2i\theta} \neq -a$. Dans ce cas, $\ker f = \{0\}$ et d'après le théorème du rang, $\operatorname{Im} f = \mathbb{C}$. **2ème cas.** Si $|a| = 1$, posons $a = e^{i\alpha}$.

$$e^{2i\theta} = -a \Leftrightarrow e^{2i\theta} = e^{i(\alpha+\pi)} \Leftrightarrow 2\theta \in \alpha + \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \frac{\alpha+\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

Dans ce cas, $\ker f = \operatorname{Vect}(e^{i(\alpha+\pi)/2})$. D'après le théorème du rang, $\operatorname{Im} f$ est une droite vectorielle et pour déterminer $\operatorname{Im} f$, il suffit d'en fournir un vecteur non nul, comme par exemple $f(1) = 1 + a$. Donc, si $a \neq -1$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(1 + a)$. Si $a = -1$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$ et $\operatorname{Im} f = i\mathbb{R}$.

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral (admis) et montrer l'inégalité de Taylor-Lagrange.*

Exercice 1 : Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les quatre vecteurs

$$v_1 = (1, 0, -1, 1), \quad v_2 = (2, 1, 0, 1), \quad v_3 = (1, 1, 1, 0), \quad v_4 = (3, 1, -1, 2).$$

Soit $\mathrm{V} = \mathrm{V}ect(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

De plus, soit

$$\mathrm{H} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \quad -3x + y + 2z - t = 0\}.$$

1. Montrer que $\dim \mathrm{V} = 2$. Le système (v_1, v_2, v_3, v_4) est-il libre ? Est-il générateur de $\mathbb{R}^4$?
2. Donner une base de V, la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. Calculer des équations cartésiennes pour V.
4. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
5. Trouver une représentation paramétrique de H, et en déduire une base de H. Que vaut $\dim \mathrm{H}$?
6. Montrer que $v_3 \in \mathrm{H}$ et que $v_1 \notin \mathrm{H}$. En déduire $\dim(\mathrm{V} \cap \mathrm{H})$ et $\dim(\mathrm{V} + \mathrm{H})$.
7. Donner une base de $\mathrm{V} \cap \mathrm{H}$.

Correction :

1. On observe que $v_3 = v_2 - v_1$ et que $v_4 = v_1 + v_2$ donc $\mathrm{V} = \mathrm{V}ect(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathrm{V}ect(v_1, v_2)$. Comme de plus v_1 et v_2 sont linéairement indépendants, (v_1, v_2) est une base de V. Donc $\dim(\mathrm{V}) = 2$. Le système n'est pas libre car par exemple $v_3 = v_2 - v_1$ est une relation de dépendance linéaire non triviale. Le système n'est pas générateur de $\mathbb{R}^4$ car $\dim(\mathrm{V}) = 2 < 4$ donc $\mathrm{V}ect(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathrm{V} \neq \mathbb{R}^4$.
2. Comme nous l'avons vu dans la question 1, (v_1, v_2) est une base de V. On échelonne la matrice dont les lignes sont les vecteurs v_1 et v_2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Maintenant on voit que l'on peut compléter la base (v_1, v_2) en une base de $\mathbb{R}^4$ en ajoutant les vecteurs $(0, 0, 1, 0)$ et $(0, 0, 0, 1)$ car la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang 4.

3 $V = Vect(v_1, v_2)$. Maintenant soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. $(x, y, z, t) \in V$ si et seulement si $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $(x, y, z, t) = \lambda v_1 + \mu v_2$. Il nous suffit donc de voir pour quelles valeurs de (x, y, z, t) ce système d'équations a une solution. Le système s'écrit :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & y \\ -1 & 0 & z \\ 1 & 1 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 2 & z+x \\ 0 & -1 & t-x \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z+x-2y \\ 0 & 0 & t-x+y \end{array}\right)$$

Le système a donc une solution si et seulement si $z + x - 2y = 0$ et $t - x + y = 0$,ce sont des équations cartesiennes pour V, c'est à dire que

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ \ x - 2y + z = 0 \quad et \quad -x + y + t = 0\}.$$

4 H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ car c'est l'ensemble des solutions d'une équation linéaire et homogène.

5

$$\begin{array}{rcl} H & = & \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ \ -3x + y + 2z - t = 0\} \\ & = & \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ \ y = 3x - 2z + t\} \\ & = & \{(x, 3x - 2z + t, z, t) \ / \ \ x, z, t \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{x(1, 3, 0, 0) + z(0, -2, 1, 0) + t(0, 1, 0, 1) \ / \ \ x, z, t \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

On a donc $H = Vect((1, 3, 0, 0), (0, -2, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$. De plus le système $((1, 3, 0, 0), (0, -2, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$ est une base de H car

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3.$$

Et donc $\dim(H) = 3$.

6 $v_3 \in H$ car $-3 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times 1 - 1 \times 0 = 0$. Mais $v_1 \notin H$ car $-3 \times 1 + 1 \times 0 + 2 \times -1 - 1 \times 1 = -6 \neq 0$.

Comme $v_3 \in V$ et que l'on vient de voir que $v_3 \in H$, on en déduit que $v_3 \in V \cap H$ et donc que $Vect(v_3) \subseteq V \cap H$. On a donc obtenu que $\dim(V \cap H) \geqslant 1$. Comme de plus $V \cap H \subseteq V$ on sait que $\dim(V \cap H) \leqslant 2$. Maintenant si on avait $\dim(V \cap H) = 2$ cela impliquerait que $V \cap H = V$ et donc que $V \subseteq H$, ce qui est faux car $v_1 \in V$ mais $v_1 \notin H$. On obtient donc $\dim(V \cap H) = 1$.

En utilisant la formule de Grassmann on obtient alors que

$$\dim(V + H) = \dim(V) + \dim(H) - \dim(V \cap H) = 2 + 3 - 1 = 4.$$

7 On a vu que $\dim(V \cap H) = 1$ et que $Vect(v_3) \in V \cap H$ donc on obtient $Vect(v_3) = V \cap H$ et donc (v_3) est une base de $V \cap H$.

Exercice 2 : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Correction : $p_n=\left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

$s_n=\ln p_n=\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{(2n)!}{n!n^n}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\displaystyle\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x=2\ln 2-1.$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}p_n=\frac{4}{e}}$$

Exercice 3 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

On considère $u,v\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$ et on suppose que $\mathrm{E}=\mathrm{Im}\,(u)+\mathrm{Im}\,(v)=\ker\,(u)+\ker\,(v)$.

Montrer que ces sommes sont directes.

Correction :

- $\dim\,(\mathrm{Im}\,(u)+\mathrm{Im}\,(v))=\dim\mathrm{Im}\,(u)+\dim\mathrm{Im}\,(v)-\dim\mathrm{Im}\,(u)\cap\mathrm{Im}\,(v)=\dim\,(\mathrm{E})$.

  $\dim\,(\ker\,(u)+\ker\,(v))=\dim\ker\,(u)+\dim\ker\,(v)-\dim\ker\,(u)\cap\ker\,(v)=\dim\,(\mathrm{E})$.

  En additionnant, d'après le théorème du rang :

  $\dim\mathrm{Im}\,(u)\cap\mathrm{Im}\,(v)+\dim\ker\,(u)\cap\ker\,(v)=0$.

  Donc $\mathrm{Im}\,(u)\cap\mathrm{Im}\,(v)=\{0\}$ *et* $\ker\,(u)\cap\ker\,(v)=\{0\}$.
- $$\begin{aligned}\dim\,(\mathrm{E})&=\dim\,(\mathrm{Im}\,f+\mathrm{Im}\,g)\\&\leqslant\dim\,(\mathrm{Im}\,f)+\dim\,(\mathrm{Im}\,g)\\&=2\dim\,(\mathrm{E})-\dim\ker f-\dim\ker g\\&\leqslant 2\dim\,(\mathrm{E})-\dim\,(\ker f+\ker g)=\dim\,(\mathrm{E})\,.\end{aligned}$$

  Donc toutes les inégalités sont des égalités, et les sommes sont directes.

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Caractérisation des projecteurs.*

Exercice 1 : On considère p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur $\iff$ $p\circ q = q\circ p = 0$.
2. Comparer $\ker(p+q)$ et $\ker p \cap \ker q$ lorsque $p+q$ est un projecteur.
3. Comparer $\operatorname{Im}(p+q)$ et $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ lorsque $p+q$ est un projecteur.

Correction :

1. $\Leftarrow$
   - p et q étant des projecteurs, on a $p+q \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.
   - $(p+q)\circ(p+q) = p\circ(p+q) + q\circ(p+q) = p^2 + p\circ q + q\circ p + q^2 = p+q$ par hypothèse.

   Donc $p+q$ est un projecteur.

   $\Rightarrow$ Supposons que $p+q$ soit un projecteur. On a $(p+q)^2 = p+q$ donc $p\circ q + q\circ p = 0$ (1)

   En composant, on a $\begin{cases} p\circ q + p\circ q\circ p = 0 \\ q\circ p\circ q + q\circ p = 0 \end{cases}$, et par soustraction, $p\circ q = q\circ p$ (2).

   D'après (1) et (2), on a bien $p\circ q = q\circ p = 0$.

2. Montrons que $\ker(p+q) = \ker p \cap \ker q$ lorsque $p+q$ est un projecteur.

   $\supset$ immédiat

   $\subset$ Si $u \in \ker(p+q)$, alors $p(u)+q(u) = 0$. En composant par p, on obtient $p(u)+p\circ q(u) = 0$.

   Or on a vu que $p\circ q = 0$. Donc $p(u) = 0$ et $u \in \ker p$. De même, $u \in \ker q$. Donc $u \in \ker p \cap \ker q$.

3. Montrons que $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ lorsque $p+q$ est un projecteur.

   $\subset$ immédiat

   $\supset$ Soit $u \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$. On peut donc écrire $u = p(a) + q(b)$.

   En composant par p, sachant que $p\circ q = 0$, on obtient $p(u) = p(a)$.

   De même, $q(u) = q(a)$.

   Finalement, $u = p(u) + q(u) = (p+q)(u) \in \operatorname{Im}(p+q)$.

Exercice 2 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k}$.

Correction : Ce n'est pas une somme de Riemann.

On tente un encadrement assez large : pour $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\frac{n+k}{n^2+n} \leqslant \frac{n+k}{n^2+k} \leqslant \frac{n+k}{n^2}.$$

En sommant ces inégalités, il vient

$$\frac{1}{n^2+n}\sum_{k=1}^{n}(n+k) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k} \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(n+k),$$

et donc ((premier terme + dernier terme)×nombre de termes/2),

$$\frac{1}{n^2+n}\frac{((n+1)+2n)n}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}\frac{((n+1)+2n)n}{2},$$

et finalement, $\dfrac{3n+1}{2(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3n+1}{2n}$.

Or, $\dfrac{3n+1}{2(n+1)}$ et $\dfrac{3n+1}{2n}$ tendent tous deux vers $\dfrac{3}{2}$.

Donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k} = \frac{3}{2}$.

Exercice 3 : On considère $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x-y) \end{array}$.

Déterminer $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$. En déduire si f est injective, surjective, bijective.

Correction :

1. Calculons d'abord le noyau :

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \ker(f) &\iff f(x,y,z) = (0,0,0) \\
&\iff (2x+y+z, y-z, x+y) = (0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ y-z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-z \\ y=z \end{cases} \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

Ainsi $\ker(f) = \operatorname{vect}(-1,1,1)$ et donc f n'est pas injective.

2. Maintenant nous allons utiliser que $\ker(f) = \operatorname{vect}(-1,1,1)$, autrement dit $\dim\ker(f) = 1$.

La formule du rang, appliquée à $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ s'écrit $\dim\ker(f) + \dim \operatorname{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^3$.

Donc $\dim \operatorname{Im}(f) = 2$.

Nous allons trouver une base de $\operatorname{Im}(f)$. Il suffit donc de trouver deux vecteurs linéairement indépendants.

Prenons par exemple $v_1 = f(1,0,0) = (2,0,1) \in \operatorname{Im}(f)$ et $v_2 = f(0,1,0) = (1,1,1) \in \operatorname{Im}(f)$.

Par construction ces vecteurs sont dans l'image de f et il est clair qu'ils sont linéairement indépendants.

Donc $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\operatorname{Im}(f)$.

3 f n'est ni injective, ni surjective (donc pas bijective).

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Sommes de Riemann.*

Exercice 1 : Soit p et q deux projecteurs de E.

Montrer que : $p+q$ est un projecteur $\iff p\circ q = q\circ p = 0$.

Correction :

$\Leftarrow$
- p et q étant des projecteurs, on a $p+q \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.
- $(p+q)\circ(p+q) = p\circ(p+q) + q\circ(p+q) = p^2 + p\circ q + q\circ p + q^2 = p+q$ par hypothèse.

Donc $p+q$ est un projecteur.

$\Rightarrow$ Supposons que $p+q$ soit un projecteur. On a $(p+q)^2 = p+q$ donc $p\circ q + q\circ p = 0$ (1)

En composant, on a $\begin{cases} p\circ q + p\circ q\circ p = 0 \\ q\circ p\circ q + q\circ p = 0 \end{cases}$, et par soustraction, $p\circ q = q\circ p$ (2).

D'après (1) et (2), on a bien $p\circ q = q\circ p = 0$.

Exercice 2 : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Correction : Posons $p_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Alors, $s_n = \ln p_n = \dfrac{1}{n}\ln\dfrac{(2n)!}{n!n^n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

Exercice 3 : Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathscr{C}$ et E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies sur $\mathbb{K}$ et u et v deux applications linéaires de E dans F.

Montrer que :

$$|\mathrm{rg} u - \mathrm{rg} v| \leqslant \mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg} u + \mathrm{rg} v.$$

Correction : Par définition, $\mathrm{rg}\,(u+v) = \dim\,\big(\mathrm{Im}\,(u+v)\big)$.

$$\mathrm{Im}\,(u+v) = \{u(x)+v(x),\ x\in\mathrm{E}\} \subset \{u(x)+v(y),\ (x,y)\in\mathrm{E}^2\} = \mathrm{Im}\,u + \mathrm{Im}\,v.$$

Donc,

$$\begin{aligned} rg(u+v) &= \dim\ \big(\mathrm{Im}\ (u+v)\big) \\ &\leqslant \dim\ (\mathrm{Im}\ u + \mathrm{Im}\ v) = \dim\ (\mathrm{Im}\ u) + \dim\ (\mathrm{Im}\ v) - \dim\ (\mathrm{Im}\ u \cap\ \mathrm{Im} v) \\ &\leqslant \dim\ (\mathrm{Im}\ u) + \dim\ (\mathrm{Im}\ v) = \mathrm{rg}\ u + \mathrm{rg}\ v. \end{aligned}$$

On a montré que :

$$\forall (u,v) \in (\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}))^2,\ \mathrm{rg}\ (u+v) \leqslant \mathrm{rg}\ u + \mathrm{rg}\ v.$$

Ensuite,

$$\mathrm{rg}\ u = \mathrm{rg}\ (u+v-v) \leqslant \mathrm{rg}\ (u+v) + \mathrm{rg}\ (-v) = \mathrm{rg}\ (u+v) + \mathrm{rg}\ v,$$

(il est clair que $\mathrm{Im}\ (-v) = \mathrm{Im}\ v$) et donc $\mathrm{rg}\ u - \mathrm{rg}\ v \leqslant \mathrm{rg}\ (u+v)$. En échangeant les rôles de u et v, on a aussi $\mathrm{rg}\ v - \mathrm{rg}\ u = \mathrm{rg}\ (u+v)$ et finalement

$$\forall (u,v) \in (\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}))^2,\ |\mathrm{rg}\ u - \mathrm{rg}\ v| \leqslant \mathrm{rg}\ (u+v).$$

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *L'ensemble des applications linéaires de E dans F est un espace vectoriel.*

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et p, q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$.

Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E.

Déterminer son image et son noyau.

Correction :

- $(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ (q \circ p) \circ q = p \circ (p \circ q) \circ q = p \circ q$.

  $p \circ q$ étant linéaire, il s'agit bien d'un projecteur.

- On a $\begin{cases} \operatorname{Im}(p \circ q) \subset \operatorname{Im} p \\ \operatorname{Im}(q \circ p) \subset \operatorname{Im} q \end{cases}$ donc $\operatorname{Im}(p \circ q) \subset \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.

  Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$. Alors $p(x) = x$ et $q(x) = x$. De ce fait, $p \circ q(x) = x$ et $x \in \operatorname{Im}(p \circ q)$.

  Bilan : $\boxed{\operatorname{Im}(p \circ q) = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q}$.

- On a $\begin{cases} \ker p \subset \ker(q \circ p) \\ \ker q \subset \ker(p \circ q) \end{cases}$ donc $\ker p + \ker q \subset \ker(p \circ q)$.

  Réciproquement, soit $x \in \ker(q \circ p)$. On a $x = \underbrace{p(x)}_{\in \ker q} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \ker p}$. On a donc $x \in \ker p + \ker q$.

  Bilan : $\boxed{\ker(p \circ q) = \ker p + \ker q}$.

Exercice 2 : Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n\sqrt[3]{n^3 + k^3}}$.

Correction : Posons $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n\sqrt[3]{n^3 + k^3}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\sqrt[3]{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^3}}$.

D'où, $\dfrac{1}{n} u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1 + x^3}}\, dx = \frac{\sqrt[3]{4} - 1}{2}$, et $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt[3]{4} - 1}{2} n$.

Exercice 3 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Montrer que $i \iff iii$.

i. $\mathrm{E} = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$
iii. $\ker f = \ker f^2$

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité pour les applications linéaires. linéaire.*

Exercice 1 : Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et p un projecteur de E.

Montrer que u et p commutent $\iff \operatorname{Im} p$ et $\ker p$ sont stables par u.

Correction :

$\Leftarrow$ On a $\mathrm{E} = \ker \oplus \operatorname{Im} p$.

Soit $x \in \mathrm{E}$. On pose $x = x' + x''$ avec $x' \in \ker p$ et $x'' \in \operatorname{Im} p$.

Par hypothèse, $u(x') \in \ker p$ et $u(x'') \in \operatorname{Im} p$.

Or $u(x) = u(x') + u(x'')$ d'où

$$\begin{aligned} p \circ u(x) &= u(x') + u(x'') \\ &= 0 + p(u(x'')) \quad \text{car } u(x') \in \ker p \\ &= u(x'') \quad \text{car } u(x'') \in \operatorname{Im} p \\ &= u(p(x)) \quad \text{par définition de } p \end{aligned}$$

Donc $p \circ u = u \circ p$.

$\Rightarrow$
- Soit $x \in \operatorname{Im} p$. Il existe $a \in \mathrm{E}$ tel que $p(a) = x$.

  On a $u(x) = u(p(a)) = u \circ p(a) = p \circ u(a) \in \operatorname{Im} p$.
- Soit $x \in \ker p$. On a donc $p(x) = 0_{\mathrm{E}}$.

  On a $p(u(x)) = p \circ u(x) = u \circ p(x) = u(p(x)) = u(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{E}}$ car u est linéaire. Donc $u(x) \in \ker p$.

Exercice 2 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Correction : Soit $v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$, notons

$$w_n = \ln v_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right).$$

En posant $g(x) = \ln(1 + x^2)$ nous reconnaissons la somme de Riemann correspondant à $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 g(x)dx$.

Calculons cette intégrale :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \ln(1+x^2)dx \\
&= \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 x\frac{2x}{1+x^2}dx \quad \text{par intégration par parties} \\
&= \ln 2 - 2\int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \ln 2 - 2\left[x - \arctan x\right]_0^1 \\
&= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Nous venons de prouver que $w_n = \ln v_n$ converge vers $\mathrm{I} = \ln 2 - 2 + \dfrac{\pi}{2}$, donc $v_n = \exp w_n$ converge vers $\exp(\ln 2 - 2 + \dfrac{\pi}{2}) = 2e^{\frac{\pi}{2}-2}$. Bilan (v_n) a pour limite $2e^{\frac{\pi}{2}-2}$.

Exercice 3 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Montrer que *ii* $\iff$ *iii*.

ii. $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$
iii. $\ker f = \ker f^2$

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Le noyau et l'image d'une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels.*

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un élément de $\mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $[\ker f = \ker f^2 \Leftrightarrow \ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}]$ et $[\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Leftrightarrow E = \ker f + \operatorname{Im} f]$ (où $f^2 = f \circ f$).
2. Par définition, un endomorphisme p de E est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$.

   Montrer que
   $$[p \text{ projecteur} \Leftrightarrow \mathrm{Id} - p \text{ projecteur}]$$
   puis que
   $$[p \text{ projecteur} \Rightarrow \operatorname{Im} p = \ker(\mathrm{Id} - p) \text{ et } \ker p = \operatorname{Im}(\mathrm{Id} - p) \text{ et } E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p].$$
3. Soient p et q deux projecteurs, montrer que : $[\ker p = \ker q \Leftrightarrow p = p \circ q \text{ et } q = q \circ p]$.
4. p et q étant deux projecteurs vérifiant $p \circ q + q \circ p = 0$, montrer que $p \circ q = q \circ p = 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $p + q$ soit un projecteur lorsque p et q le sont. Dans ce cas, déterminer $\operatorname{Im}(p+q)$ et $\ker(p+q)$ en fonction de $\ker p$, $\ker q$, $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} q$.

Correction :

1. On a toujours $\ker f \subset \ker f^2$.

   En effet, si x est un vecteur de $\ker f$, alors $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$ (car f est linéaire) et x est dans $\ker f^2$.

   Montrons alors que : $[\ker f = \ker f^2 \Leftrightarrow \ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}]$. Supposons que $\ker f = \ker f^2$ et montrons que $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

   Soit $x \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$. Alors, d'une part $f(x) = 0$ et d'autre part, il existe y élément de E tel que $x = f(y)$. Mais alors, $f^2(y) = f(x) = 0$ et $y \in \ker f^2 = \ker f$. Donc, $x = f(y) = 0$. On a montré que $\ker f = \ker f^2 \Rightarrow \ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

   Supposons que $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ et montrons que $\ker f = \ker f^2$.

   Soit $x \in \ker f^2$. Alors $f(f(x)) = 0$ et donc $f(x) \in \ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$. Donc, $f(x) = 0$ et x est dans $\ker f$. On a ainsi montré que $\ker f^2 \subset \ker f$ et, puisque l'on a toujours $\ker f \subset \ker f^2$, on a finalement $\ker f = \ker f^2$. On a montré que $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\} \Rightarrow \ker f = \ker f^2$.

   On a toujours $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$. En effet : $y \in \operatorname{Im} f^2 \Rightarrow \exists x \in E / \ y = f^2(x) = f(f(x)) \Rightarrow y \in \operatorname{Im} f$.

   Supposons que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ et montrons que $\ker f + \operatorname{Im} f = E$. Soit $x \in E$. Puisque $f(x) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$, il existe $t \in E$ tel que $f(x) = f^2(t)$. Soit alors $z = f(t)$ et $y = x - f(t)$. On a bien $x = y + z$ et $z \in \operatorname{Im} f$. De plus, $f(y) = f(x) - f(f(t)) = 0$ et y est bien élément de $\ker f$. On a donc montré que $E = \ker f + \operatorname{Im} f$.

Supposons que $\ker f + \operatorname{Im} f = \mathrm{E}$ et montrons que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

Soit $x \in \mathrm{E}$. Il existe $(y, z) \in \ker f \times \operatorname{Im} f$ tel que $x = y + z$. Mais alors $f(x) = f(z) \in \operatorname{Im} f^2$ car z est dans $\operatorname{Im} f$. Ainsi, pour tout x de E, $f(x)$ est dans $\operatorname{Im} f^2$ ce qui montre que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f^2$ et comme on a toujours $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$, on a montré que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

2 $\mathrm{Id} - p$ projecteur $\Leftrightarrow (\mathrm{Id} - p)^2 = \mathrm{Id} - p \Leftrightarrow \mathrm{Id} - 2p + p^2 = \mathrm{Id} - p \Leftrightarrow p^2 = p \Leftrightarrow p$ projecteur.

Soit x un élément de E. $x \in \operatorname{Im} p \Rightarrow \exists y \in \mathrm{E}/\ x = p(y)$. Mais alors $p(x) = p^2(y) = p(y) = x$. Donc, $\forall\, x \in \mathrm{E},\ (x \in \operatorname{Im} p \Rightarrow p(x) = x)$.

Réciproquement, si $p(x) = x$ alors bien sûr, x est dans $\operatorname{Im} p$.

Finalement, pour tout vecteur x de E, $x \in \operatorname{Im} p \Leftrightarrow p(x) = x \Leftrightarrow (\mathrm{Id}-p)(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker(\mathrm{Id}-p)$. On a montré que $\operatorname{Im} p = \ker(\mathrm{Id} - p)$.

En appliquant ce qui précède à $\mathrm{Id} - p$ qui est également un projecteur, on obtient $\operatorname{Im}(\mathrm{Id} - p) = \ker(\mathrm{Id} - (\mathrm{Id} - p)) = \ker p$.

Enfin, puisque $p^2 = p$ et donc en particulier que $\ker p = \ker p^2$ et $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} p^2$, le 1) montre que $\mathrm{E} = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$.

3

$$\begin{aligned} p = p \circ q \text{ et } q = q \circ p &\Leftrightarrow p \circ (\mathrm{Id} - q) = 0 \text{ et } q \circ (\mathrm{Id} - p) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(\mathrm{Id} - q) \subset \ker p \text{ et } \operatorname{Im}(\mathrm{Id} - p) \subset \ker q \\ &\Leftrightarrow \ker q \subset \ker p \text{ et } \ker p \subset \ker q \text{ (d'après 2))} \\ &\Leftrightarrow \ker p = \ker q. \end{aligned}$$

4 $p\circ q + q\circ p = 0 \Rightarrow p\circ q = (p\circ p)\circ q = p\circ(p\circ q) = -p\circ(q\circ p)$ et de même, $q\circ p = q\circ p\circ p = -p\circ q\circ p$. En particulier, $p \circ q = q \circ p$ et donc $0 = p \circ q + q \circ p = 2p \circ q = 2q \circ p$ puis $p \circ q = q \circ p = 0$.

La réciproque est immédiate.

$p+q$ projecteur $\Leftrightarrow (p+q)^2 = p+q \Leftrightarrow p^2 + pq + qp + q^2 = p+q \Leftrightarrow pq + qp = 0 \Leftrightarrow pq = qp = 0$ (d'après ci-dessus). Ensuite, $\operatorname{Im}(p+q) = \{p(x)+q(x),\ x \in \mathrm{E}\} \subset \{p(x)+q(y),\ (x,y) \in \mathrm{E}^2\} = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.

Réciproquement, soit z un élément de $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$. Il existe deux vecteurs x et y de E tels que $z = p(x) + q(y)$. Mais alors, $p(z) = p^2(x) + pq(y) = p(x)$ et $q(z) = qp(x) + q^2(y) = q(y)$ et donc

$$z = p(x) + p(y) = p(z) + q(z) = (p + q)(z) \in \operatorname{Im}(p + q).$$

Donc, $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im}(p + q)$ et finalement, $\operatorname{Im}(p + q) = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.

$\ker p \cap \ker q = \{x \in \mathrm{E}/\ p(x) = q(x) = 0\} \subset \{x \in \mathrm{E}/\ p(x) + q(x) = 0\} = \ker(p + q)$.

Réciproquement, si x est élément de $\ker(p + q)$ alors $p(x) + q(x) = 0$. Par suite, $p(x) = p^2(x) + pq(x) = p(p(x) + q(x)) = p(0) = 0$ et $q(x) = qp(x) + q^2(x) = q(0) = 0$. Donc, $p(x) = q(x) = 0$ et $x \in \ker p \cap \ker q$. Finalement, $\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q$.

Exercice 2 : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \sin\dfrac{k\pi}{n}$.

Correction : Pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^2 \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}),$$

où $f(x) = x^2\sin(\pi x)$. u_n est donc une somme de Riemann à pas constant associée à la fonction continue f sur $[0,1]$. Quand n tend vers $+\infty$, le pas $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0 et on sait que u_n tend vers

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2\sin(\pi x)\,dx &= \left[-\frac{1}{\pi}x^2\cos(\pi x)\right]_0^1 + \frac{2}{\pi}\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}(\left[\frac{1}{\pi}x\sin(\pi x)\right]_0^1 - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx)\\
&= \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi})\\
&= \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}.
\end{aligned}$$

Exercice 3 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

On considère $u, v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et on suppose que $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\,u + \mathrm{Im}\,v = \ker u + \ker v$.

Montrer que ces sommes sont directes.

Correction :

- $\dim(\mathrm{Im}\,u + \mathrm{Im}\,v) = \dim \mathrm{Im}\,u + \dim \mathrm{Im}\,v - \dim \mathrm{Im}\,u \cap \mathrm{Im}\,v = \dim \mathrm{E}$.

  $\dim(\ker u + \ker v) = \dim\ker u + \dim\ker v - \dim\ker u \cap \ker v = \dim \mathrm{E}$.

  En additionnant, d'après le théorème du rang :

  $\dim \mathrm{Im}\,u \cap \mathrm{Im}\,v + \dim\ker u \cap \ker v = 0$. Donc $\mathrm{Im}\,u \cap \mathrm{Im}\,v = \{0\}$ et $\ker u \cap \ker v = \{0\}$.
- $\dim \mathrm{E} = \dim(\mathrm{Im}\,f + \mathrm{Im}\,g) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\,f) + \dim(\mathrm{Im}\,g) = 2\dim \mathrm{E} - \dim\ker f - \dim\ker g \leqslant 2\dim \mathrm{E} - \dim(\ker f + \ker g)$

  Donc toutes les inégalités sont des égalités, et les sommes sont directes.

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral (admis) et montrer l'inégalité de Taylor-Lagrange.*

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et p, q deux projecteurs de E.

Caractériser, à l'aide des noyaux et des images les relations suivantes :

1. $p \circ q = p$;
2. $q \circ p = p$.

Correction :

1. Montrons que $\boxed{p \circ q = p \iff \ker q \subset \ker p.}$

   $\Longrightarrow$ On a toujours $\ker q \subset \ker(p \circ q)$. D'où ici $\ker q \subset \ker p$.

   $\Leftarrow$ Supposons que $\ker q \subset \ker p$.

   Soit $u \in \mathrm{E}$. $p \circ q(u) = p(q(u)) = p(u + q(u) - u) = p(u) + p(\underbrace{q(u) - u}_{\in \ker q}) = p(u)$

2. Montrons que $\boxed{q \circ p = p \iff \operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} q.}$

   $\Longrightarrow$ On a toujours $\operatorname{Im}(q \circ p) \subset \operatorname{Im} q$. D'où ici $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} q$.

   $\Leftarrow$ Supposons que $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} q$.

   Soit $u \in \mathrm{E}$. $q \circ p(u) = q(\underbrace{p(u)}_{\in \operatorname{Im} p}) = q(\underbrace{p(u)}_{\in \operatorname{Im} q}) = p(u)$

Exercice 2 : Trouver $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right)}$.

Correction : $\frac{\pi}{8}$.

Exercice 3 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E.

Montrer l'équivalence : $\ker f = \operatorname{Im} f \Leftrightarrow (f^2 = 0 \text{ et } n = 2\operatorname{rg}(f))$.

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Sommes de Riemann.*

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et p, q deux projecteurs de E vérifiant $p \circ q = q \circ p$.

Montrer que $p \circ q$ est un projecteur, et déterminer son image et son noyau en fonction des images et des noyaux de p et q.

Correction :

- $(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ q$ donc $p \circ q$ est un projecteur.
- $\text{Im}\,(p \circ q) \subset \text{Im}\,p$ et $\text{Im}\,(p \circ q) = \text{Im}\,(q \circ p) \subset \text{Im}\,q$ donc $\text{Im}\,(p \circ q) \subset \text{Im}\,p \cap \text{Im}\,q$.

  Soit $x \in \text{Im}\,p \cap \text{Im}\,q$. Alors $x = p(x) = q(x)$.

  Par conséquent, $p \circ q(x) = p(q(x)) = p(x) = x$. Donc $x \in \text{Im}\,(p \circ q)$, et $\boxed{\text{Im}\,(p \circ q) = \text{Im}\,p \cap \text{Im}\,q}$.
- $\ker q \subset \ker\,(p \circ q)$ et $\ker p \subset \ker\,(q \circ p) = \ker\,(p \circ q)$ donc $\ker p + \ker q \subset \ker\,(p \circ q)$. Réciproquement, soit $x \in \ker\,(p \circ q)$. Alors $p(q(x)) = 0$.

  On a $x = q(x) + (x - q(x))$, avec par hypothèse, $q(x) \in \ker p$ et $x - q(x) \in \ker q$. Donc $x \in \ker p + \ker q$ et finalement, $\boxed{\ker\,(p \circ q) = \ker p + \ker q}$.

Exercice 2 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt[n]{e^k}}$.

Correction : $\displaystyle u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt[n]{e^k}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{e^{\frac{k}{n}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \frac{x}{e^x}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{2}{e}$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt[n]{e^k}} = 1 - \frac{2}{e}}.$$

Exercice 3 : Soit E un espace vectoriel de dimension 3, $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E, et t un paramètre réel.

1. Démontrer que la donnée de $\left\{\begin{array}{lll} \phi(e_1) & = & e_1 + e_2 \\ \phi(e_2) & = & e_1 - e_2 \\ \phi(e_3) & = & e_1 + te_3 \end{array}\right.$ définit une application linéaire ϕ de E dans E.
2. Écrire le transformée du vecteur $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$.

3 Comment choisir t pour que ϕ soit injective ? surjective ?

Correction :

1 Comment est définie ϕ à partir de la définition sur les éléments de la base ? Pour $x \in \mathrm{E}$ alors x s'écrit dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. Et ϕ est définie sur E par la formule

$$\phi(x) = \alpha_1 \phi(e_1) + \alpha_2 \phi(e_2) + \alpha_3 \phi(e_3).$$

Soit ici :

$$\phi(x) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)e_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)e_2 + t\alpha_3 e_3.$$

Cette définition rend automatiquement ϕ linéaire (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincu !).

2 On cherche à savoir si ϕ est injective. Soit $x \in \mathrm{E}$ tel que $\phi(x) = 0$ donc $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)e_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)e_2 + t\alpha_3 e_3 = 0$. Comme $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base alors tous les coefficients sont nuls :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad t\alpha_3 = 0.$$

Si $t \neq 0$ alors en résolvant le système on obtient $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Donc $x = 0$ et ϕ est injective.

Si $t = 0$, alors ϕ n'est pas injective, en résolvant le même système on obtient des solutions non triviales, par exemple $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -2$. Donc pour $x = e_1 + e_2 - 2e_3$ on obtient $\phi(x) = 0$.

3 Pour la surjectivité on peut soit faire des calculs, soit appliquer la formule du rang. Examinons cette deuxième méthode. ϕ est surjective si et seulement si la dimension de $\mathrm{Im}\,(\phi)$ est égale à la dimension de l'espace d'arrivée (ici E de dimension 3). Or on a une formule pour $\dim \mathrm{Im}\,(\phi)$:

$$\dim \ker \phi + \dim \mathrm{Im}\,(\phi) = \dim \mathrm{E}.$$

Si $t \neq 0$, ϕ est injective donc $\ker \phi = \{0\}$ est de dimension 0. Donc $\dim \mathrm{Im}\,(\phi) = 3$ et ϕ est surjective.

Si $t = 0$ alors ϕ n'est pas injective donc $\ker \phi$ est de dimension au moins 1 (en fait 1 exactement), donc $\dim \mathrm{Im}\,(\phi) \leqslant 2$. Donc ϕ n'est pas surjective.

On remarque que ϕ est injective si et seulement si elle est surjective. Ce qui est un résultat du cours pour les applications ayant l'espace de départ et d'arrivée de même dimension (finie).

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral (admis) et montrer l'inégalité de Taylor-Lagrange.*

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et $p, q \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

1. Montrer que p et q sont deux projecteurs de même noyau $\iff p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.
2. Déterminer une CNS pour que p et q soient des projecteurs de même image.

Correction :

1. $\Rightarrow$ Supposons que p et q soient des projecteurs tels que $\ker p = \ker q$.

   Soit $x \in \mathrm{E}$. $x - p(x) \in \ker p = \ker q$ alors $q(x) - q \circ p(x) =$. D'où $q \circ p = q$. Même démonstration pour $p \circ q = p$.

   $\Leftarrow$ Supposons que $p \circ q = p$ (1) et $q \circ p = q$ (2).

   D'après (2), on a $p \circ q \circ p = p \circ q$. Donc $(p \circ q) \circ p = p \circ q$, et en utilisant (1), $p \circ p = p$: p est bien un projecteur. Idem pour q.

   Soit maintenant $x \in \ker p$. On a $q(x) = q \circ p(x) = q(0) = 0$ donc $x \in \ker q$. Idem dans l'autre sens, donc $\ker p = \ker q$.

2. Montrons que p et q sont deux projecteurs de même image $\iff p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.

   $\Rightarrow$ Supposons que p et q soient des projecteurs tels que $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q$.

   Soit $x \in \mathrm{E}$. $q(x) \in \operatorname{Im} q = \operatorname{Im} p$ alors $p(q(x)) = q(x)$. D'où $p \circ q = q$. Même démonstration pour $q \circ p = p$.

   $\Leftarrow$ Supposons que $p \circ q = q$ (1) et $q \circ p = p$ (2).

   D'après (1), on a $q \circ p \circ q = q \circ q$. Donc $(q \circ p) \circ q = q \circ q$ et en utilisant (1), $p \circ q = q^2$ et à nouveau d'après (1), $q = q^2$: q est bien un projecteur. Idem pour p.

   On a $\operatorname{Im}(p \circ q) \subset \operatorname{Im} p$ donc d'après (1), $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} p$. Et par symétrie, $\operatorname{Im} q = \operatorname{Im} p$.

   NB : $p \circ q = q \iff p \circ q - q = 0 \iff (p - \mathrm{Id}) \circ q = 0 \iff \operatorname{Im} q \subset \ker(p - \mathrm{Id}) \iff \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} p$

Exercice 2 : Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n\sqrt[3]{n^3+k^3}}$.

Correction : $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n\sqrt[3]{n^3+k^3}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\sqrt[3]{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}}$.

Donc $\displaystyle\frac{1}{n}u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^3}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt[3]{4}-1}{2}$, et $\boxed{u_n \sim \dfrac{\sqrt[3]{4}-1}{2}n}$.

Exercice 3 : Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel donné). Soit φ l'application définie par : $\forall P \in E,\ \varphi(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $\ker\varphi$ et $\mathrm{Im}\varphi$.

Correction :

1. Si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $P(X+1) - P(X)$ est encore un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Par suite, φ est bien une application de E dans lui-même. Soient alors $(P, Q) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) = \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X))\\ &= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q).\end{aligned}$$

φ est linéaire de E vers lui-même et donc un endomorphisme de E.

2. Soit $P \in E$. $P \in \ker\varphi \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1) = P(x)$. Montrons alors que P est constant. Soit $Q = P - P(0)$. Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à n s'annulant en les entiers naturels 0, 1, 2,... (car $P(0) = P(1) = P(2) = \ldots$) et a ainsi une infinité de racines deux à deux distinctes. Q est donc le polynôme nul ou encore $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = P(0)$. Par suite, P est un polynôme constant. Réciproquement, les polynômes constants sont clairement dans $\ker\varphi$ et donc

$$\ker\varphi = \{\text{polynômes constants}\} = \mathbb{R}_0[X].$$

Pour déterminer $\mathrm{Im}\,\varphi$, on note tout d'abord que si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. En effet, si $P = a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ (avec a_n quelconque, éventuellement nul) alors

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= a_n((X+1)^n - X^n) + \text{termes de degré inférieur ou égal à } n-1\\ &= a_n(X^n - X^n) + \text{termes de degré inférieur ou égal à } n-1\\ &= \text{termes de degré inférieur ou égal à } n-1.\end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{Im}\,(\varphi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Mais d'après le théorème du rang,

$$\dim \mathrm{Im}\,(\varphi) = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \ker(\varphi) = (n+1) - 1 = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] < +\infty,$$

et donc $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. (On peut noter que le problème difficile « soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Existe-t-il $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = Q$? » a été résolu simplement par le théorème du rang.)

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *L'ensemble des applications linéaires de E dans F est un espace vectoriel.*

Exercice 1 : Soit p et q deux projecteurs de E.

Montrer que $p+q$ est un projecteur $\iff p \circ q = q \circ p = 0$.

Correction :

$\Leftarrow$:

- p et q étant des projecteurs, on a $p+q \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
- $(p+q)\circ(p+q) = p\circ(p+q) + q\circ(p+q) = p^2 + p\circ q + q\circ p + q^2 = p+q$ par hypothèse.

Donc $p+q$ est un projecteur.

$\Rightarrow$: Supposons que $p+q$ soit un projecteur. On a $(p+q)^2 = p+q$ donc $p\circ q + q\circ p = 0$ (1)

En composant par p à gauche et q à droite, on a $\begin{cases} p\circ q + p\circ q\circ p = 0 \\ q\circ p\circ q + q\circ p = 0 \end{cases}$, et par soustraction, $p\circ q = q\circ p$ (2).

D'après (1) et (2), on a bien $p\circ q = q\circ p = 0$.

Exercice 2 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Correction : Soit $v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$, notons

$$w_n = \ln v_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right).$$

En posant $g(x) = \ln(1+x^2)$ nous reconnaissons la somme de Riemann correspondant à $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 g(x)dx$.

Calculons cette intégrale :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \ln(1+x^2)dx \\
&= [x\ln(1+x^2)]_0^1 - \int_0^1 x\frac{2x}{1+x^2}dx \quad \text{par intégration par parties} \\
&= \ln 2 - 2\int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \ln 2 - 2[x - \arctan x]_0^1 \\
&= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Nous venons de prouver que $w_n = \ln v_n$ converge vers $\mathrm{I} = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$, donc $v_n = \exp w_n$ converge vers $\exp(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}) = 2e^{\frac{\pi}{2}-2}$. Bilan (v_n) a pour limite $2e^{\frac{\pi}{2}-2}$.

Exercice 3 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel donné). Soit φ l'application définie par : $\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E},\ \varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X})$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $\ker\varphi$ et $\mathrm{Im}\varphi$.

Correction :

1. Si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $\mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X})$ est encore un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Par suite, φ est bien une application de E dans lui-même. Soient alors $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q}) &= (\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q})(\mathrm{X}+1) - (\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q})(\mathrm{X}) = \lambda(\mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X})) + \mu(\mathrm{Q}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{Q}(\mathrm{X})) \\
&= \lambda\varphi(\mathrm{P}) + \mu\varphi(\mathrm{Q}).
\end{aligned}$$

φ est linéaire de E vers lui-même et donc un endomorphisme de E.

2. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$. $\mathrm{P} \in \ker\varphi \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x+1) = \mathrm{P}(x)$. Montrons alors que P est constant. Soit $\mathrm{Q} = \mathrm{P} - \mathrm{P}(0)$. Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à n s'annulant en les entiers naturels 0, 1, 2,... (car $\mathrm{P}(0) = \mathrm{P}(1) = \mathrm{P}(2) = \ldots$) et a ainsi une infinité de racines deux à deux distinctes. Q est donc le polynôme nul ou encore $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) = \mathrm{P}(0)$. Par suite, P est un polynôme constant. Réciproquement, les polynômes constants sont clairement dans $\ker\varphi$ et donc

$$\ker\varphi = \{\text{polynômes constants}\} = \mathbb{R}_0[\mathrm{X}].$$

Pour déterminer $\mathrm{Im}\,\varphi$, on note tout d'abord que si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $\varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X})$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. En effet, si $\mathrm{P} = a_n\mathrm{X}^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\mathrm{X}^k$ (avec a_n quelconque, éventuellement nul) alors

$$\begin{aligned}\varphi(\mathrm{P}) &= a_n((\mathrm{X}+1)^n - \mathrm{X}^n) + \text{termes de degré inférieur ou égal à } n-1\\ &= a_n(\mathrm{X}^n - \mathrm{X}^n) + \text{termes de degré inférieur ou égal à } n-1\\ &= \text{termes de degré inférieur ou égal à } n-1.\end{aligned}$$

Donc, Im $(\varphi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. Mais d'après le théorème du rang,

$$\dim \operatorname{Im}(\varphi) = \dim \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] - \dim \ker(\varphi) = (n+1) - 1 = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}] < +\infty,$$

et donc Im $\varphi = \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. (On peut noter que le problème difficile « soit $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. Existe-t-il $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{Q}$? » a été résolu simplement par le théorème du rang.)

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité pour les applications linéaires. linéaire.*

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et p, q deux projecteurs de E vérifiant $p \circ q = q \circ p$.

Montrer que $p \circ q$ est un projecteur, et déterminer son image et son noyau en fonction des images et des noyaux de p et q.

Correction :

- $(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ q$ donc $p \circ q$ est un projecteur.
- $\mathrm{Im}\,(p \circ q) \subset \mathrm{Im}\,(p)$ et $\mathrm{Im}\,(p \circ q) = \mathrm{Im}\,(q \circ p) \subset \mathrm{Im}\,(q)$ donc $\mathrm{Im}\,(p \circ q) \subset \mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(q)$.

  Soit $x \in \mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(q)$. Alors $x = p(x) = q(x)$.

  Par conséquent, $p \circ q(x) = p(q(x)) = p(x) = x$.

  Donc $x \in \mathrm{Im}\,(p \circ q)$, et
  $$\mathrm{Im}\,(p \circ q) = \mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(q)\,.$$
- $\ker\,(q) \subset \ker\,(p \circ q)$ et $\ker\,(p) \subset \ker\,(q \circ p) = \ker\,(p \circ q)$ donc $\ker\,(p) + \ker\,(q) \subset \ker\,(p \circ q)$. Réciproquement, soit $x \in \ker\,(p \circ q)$. Alors $p(q(x)) = 0$.

  On a $x = q(x) + (x - q(x))$, avec par hypothèse, $q(x) \in \ker\,(p)$ et $x - q(x) \in \ker\,(q)$.

  Donc $x \in \ker\,(p) + \ker\,(q)$ et finalement,
  $$\ker\,(p \circ q) = \ker\,(p) + \ker\,(q)\,.$$

Exercice 2 : En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer un équivalent simple de $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

Correction : $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = n\sqrt{n} \times \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$.

Or $f : t \to \sqrt{t}$ est continue sur $[0, 1]$. D'où $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}$.

Donc $\mathrm{S}_n \sim \dfrac{2}{3} n\sqrt{n}$.

Exercice 3 : Soit E un espace vectoriel de dimension n et f une application linéaire de E dans lui-même.

Montrer que les deux assertions qui suivent sont équivalentes :

(i) $\ker(f) = \operatorname{Im}(f)$.

(ii) $f^2 = 0$ et $n = 2 \cdot \operatorname{rg}(f)$.

Correction :

(i) ⇒ (ii) Supposons $\ker(f) = \operatorname{Im}(f)$.

Soit $x \in E$, alors $f(x) \in \operatorname{Im}(f)$ donc $f(x) \in \ker(f)$, cela entraîne $f(f(x)) = 0$ et donc $f^2 = 0$.

De plus, d'après la formule du rang $\dim\ker(f) + \operatorname{rg}(f) = n$, mais $\dim\ker(f) = \dim\operatorname{Im}(f) = \operatorname{rg}(f)$, ainsi $2\operatorname{rg}(f) = n$.

(ii) ⇒ (i) Si $f^2 = 0$ alors $\operatorname{Im}(f) \subset \ker(f)$ car pour $y \in \operatorname{Im}(f)$ il existe x tel que $y = f(x)$ et $f(y) = f^2(x) = 0$.

De plus si $2\operatorname{rg}(f) = n$ alors la formule du rang donne $\dim\ker(f) = \operatorname{rg}(f)$ c'est-à-dire $\dim\ker(f) = \dim\operatorname{Im}(f)$.

Nous savons donc que $\operatorname{Im}(f)$ est inclus dans $\ker(f)$ mais ces espaces sont de même dimension donc sont égaux : $\ker(f) = \operatorname{Im}(f)$.