Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral (admis) et montrer l'inégalité de Taylor-Lagrange.*

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et A, B deux sev de E.

On considère C un supplémentaire de $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ dans B. Montrer que $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\mathrm{A} \oplus \mathrm{C}$.

Exercice 2 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+n^2}$.

Exercice 3 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x+y, x-y) \end{array}$

Déterminer une base du noyau et de l'image de f et en déduire si f est injective, surjective, bijective.

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *L'ensemble des applications linéaires de* E *dans* F *est un espace vectoriel.*

Exercice 1 : On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Soient $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), AM = 0_2\}$ et $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), BM = 0_2\}$.

1. Montrer que F et G sont des sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $A + B$ est inversible. En déduire que F et G sont en somme directe.

   Sont-ils supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 2 : Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 3 : Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(-1), P(0), P(1)) \end{array}$

Déterminer une base du noyau et de l'image de f et en déduire si f est injective, surjective, bijective.

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité pour les applications linéaires. linéaire.*

Exercice 1 : Soit $\mathrm{F} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - 2y + z - t = 0\}$.
On considère $\mathrm{G} = \mathrm{vect}\,(u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1, 2, -1, 0)$, $u_2 = (3, 0, -1, 1)$ et $u_3 = (-1, 4, -1, -1)$.

1. Calculer $\dim \mathrm{F}$, $\dim \mathrm{G}$, $\dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})$, $\dim(\mathrm{F} + \mathrm{G})$.
2. F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 2 : Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{8k^3 + n^3}$.

Exercice 3 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, 0, x - 7y, x + y) \end{array}$

Déterminer une base du noyau et de l'image de f et en déduire si f est injective, surjective, bijective.

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Le noyau et l'image d'une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels.*

Exercice 1 : Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour lesquels : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (ax^2 + bx + c)\cos x$.

1. Montrer que E est sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de E et sa dimension.

Exercice 2 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+n^2}$.

Exercice 3 : Soit E un espace vectoriel et soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E, on définit l'application $f \colon E_1 \times E_2 \to E$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Que donne le théorème du rang ?

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral (admis) et montrer l'inégalité de Taylor-Lagrange.*

Exercice 1 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, $\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(1) = \mathrm{P}'(2) = 0\}$ et $\mathrm{G} = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(2) = \mathrm{P}'(1) = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont deux plans vectoriels
2. Montrer que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.

Exercice 2 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \sin \frac{k\pi}{n}$.

Exercice 3 : On pose $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f_1(x, y) = (2x + y, x - y)$

Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im}\,(f)$. En déduire si f est injective, surjective, bijective.

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Caractérisation des projecteurs.*

Exercice 1 :

1. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Montrer que toute famille de polynômes $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ avec $\deg P_i = i$ (pour $i = 0, 1, \dots, n$) forme une base de E.
2. Écrire le polynôme $F = 3X - X^2 + 8X^3$ sous la forme $F = a + b(1-X) + c(X - X^2) + d(X^2 - X^3)$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ puis sous la forme $F = \alpha + \beta(1 + X) + \gamma(1 + X + X^2) + \delta(1 + X + X^2 + X^3)$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R})$.

Exercice 2 :

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n+k}{n^2+k}$.

Exercice 3 :

On pose $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f_2(x, y, z) = (2x + y + z, y - z, x + y)$

Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im}(f)$. En déduire si f est injective, surjective, bijective.

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral (admis) et montrer l'inégalité de Taylor-Lagrange.*

Exercice 1 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^n$.

1. Montrer que $(f_0, \dots, f_n)$ est libre.
2. En déduire $\dim \mathrm{E}$.

Exercice 2 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$.

Exercice 3 : On pose $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $f_3(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y)$

Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im}\,(f)$. En déduire si f est injective, surjective, bijective.

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Sommes de Riemann.*

Exercice 1 : Projection et symétrie dans $\mathbb{K}^3$

Dans $\mathbb{K}^3$, on donne les sous espaces : $\begin{cases} \mathrm{H} = \{\overrightarrow{\mathrm{X}} = (x, y, z) \text{ tq } x + y + z = 0\} \\ \mathrm{K} = \mathrm{vect}(\overrightarrow{\mathrm{U}} = (1, 1, 2)). \end{cases}$

1. Déterminer $\dim \mathrm{H}$ et en donner une base.
2. Démontrer que $\mathrm{H} \oplus \mathrm{K} = \mathbb{K}^3$.
3. Donner les expressions analytiques des projection et symétrie associées : π_{H} et s_{H}.

Exercice 2 : Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=n}^{2n-1} \dfrac{1}{2k+1}$.

Exercice 3 : On pose $f_4 : \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}^3$, $f_4(\mathrm{P}) = (\mathrm{P}(-1), \mathrm{P}(0), \mathrm{P}(1))$

Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im}\,(f)$. En déduire si f est injective, surjective, bijective.

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité pour les applications linéaires. linéaire.*

Exercice 1 : ** Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soient $a_0,\dots, a_n$ $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts et $b_0,\dots, b_n$ $n+1$ nombres complexes.

1. Montrer qu'il existe une unique famille de $n+1$ polynômes à coefficients complexes de degré n exactement vérifiant $\forall\,(i,j) \in [\![0\,;n]\!]$, $\mathrm{L}_i(a_j) = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.
2. Montrer que la famille $(\mathrm{L}_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathscr{C}_n[\mathrm{X}]$.
3. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n vérifiant $\forall\, i \in [\![0\,;n]\!]$, $\mathrm{P}(a_i) = b_i$. Expliciter P puis déterminer tous les polynômes vérifiant les égalités précédentes.

Exercice 2 : Trouver $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn}$ pour k entier supérieur ou égal à 2 fixé.

Exercice 3 : Soient $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par : $f(e_1) = 2e_1 + e_3$, $f(e_2) = -e_2 + e_4$, $f(e_3) = e_1 + 2e_3$ et $f(e_4) = e_2 - e_4$.

Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Sommes de Riemann.*

Exercice 1 : Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E l'ensemble des suites réelles p périodiques i.e. l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = u_n$.

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et déterminer sa dimension.

Exercice 2 : Trouver $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{1(n-1)} + \sqrt{2(n-2)} + \cdots + \sqrt{(n-1)1}\right)$.

Exercice 3 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + a\bar{z} \end{array}$ où a est un nombre complexe donné non nul.

Montrer que f est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. f est-il un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$?

Déterminer le noyau et l'image de f.

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral (admis) et montrer l'inégalité de Taylor-Lagrange.*

Exercice 1 : Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les quatre vecteurs

$$v_1 = (1, 0, -1, 1), \quad v_2 = (2, 1, 0, 1), \quad v_3 = (1, 1, 1, 0), \quad v_4 = (3, 1, -1, 2).$$

Soit $\mathrm{V} = \mathrm{V}ect(v_1, v_2, v_3, v_4)$.
De plus, soit

$$\mathrm{H} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \quad -3x + y + 2z - t = 0\}.$$

1. Montrer que $\dim \mathrm{V} = 2$. Le système (v_1, v_2, v_3, v_4) est-il libre ? Est-il générateur de $\mathbb{R}^4$?
2. Donner une base de V, la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. Calculer des équations cartésiennes pour V.
4. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
5. Trouver une représentation paramétrique de H, et en déduire une base de H. Que vaut $\dim \mathrm{H}$?
6. Montrer que $v_3 \in \mathrm{H}$ et que $v_1 \notin \mathrm{H}$. En déduire $\dim(\mathrm{V} \cap \mathrm{H})$ et $\dim(\mathrm{V} + \mathrm{H})$.
7. Donner une base de $\mathrm{V} \cap \mathrm{H}$.

Exercice 2 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{(2n)!}{n! n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 3 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.
On considère $u, v \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et on suppose que $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\,(u) + \mathrm{Im}\,(v) = \ker(u) + \ker(v)$.
Montrer que ces sommes sont directes.

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Caractérisation des projecteurs.*

Exercice 1 : On considère p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur $\iff p\circ q = q\circ p = 0$.
2. Comparer $\ker(p+q)$ et $\ker p \cap \ker q$ lorsque $p+q$ est un projecteur.
3. Comparer $\operatorname{Im}(p+q)$ et $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ lorsque $p+q$ est un projecteur.

Exercice 2 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k}$.

Exercice 3 : On considère $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x-y) \end{array}$.

Déterminer $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$. En déduire si f est injective, surjective, bijective.

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Sommes de Riemann.*

Exercice 1 : Soit p et q deux projecteurs de E.

Montrer que : $p+q$ est un projecteur $\iff p\circ q = q\circ p = 0$.

Exercice 2 : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 3 : Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathscr{C}$ et E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies sur $\mathbb{K}$ et u et v deux applications linéaires de E dans F.

Montrer que :

$$|\mathrm{rg}u - \mathrm{rg}v| \leqslant \mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}u + \mathrm{rg}v.$$

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *L'ensemble des applications linéaires de* E *dans* F *est un espace vectoriel.*

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et p, q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$.

Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E.

Déterminer son image et son noyau.

Exercice 2 : Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n\sqrt[3]{n^3+k^3}}$.

Exercice 3 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Montrer que $i \iff iii$.

i. $\mathrm{E} = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$

iii. $\ker f = \ker f^2$

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité pour les applications linéaires. linéaire.*

Exercice 1 : Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et p un projecteur de E.

Montrer que u et p commutent $\iff$ $\operatorname{Im} p$ et $\ker p$ sont stables par u.

Exercice 2 : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1+\dfrac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 3 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Montrer que *ii* $\iff$ *iii*.

ii. $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$
iii. $\ker f = \ker f^2$

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Le noyau et l'image d'une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels.*

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un élément de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

1. Montrer que $[\ker f = \ker f^2 \Leftrightarrow \ker f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}]$ et $[\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Leftrightarrow \mathrm{E} = \ker f + \mathrm{Im} f]$ (où $f^2 = f \circ f$).
2. Par définition, un endomorphisme p de E est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$.

   Montrer que
   $$[p \text{ projecteur} \Leftrightarrow \mathrm{Id} - p \text{ projecteur}]$$
   puis que
   $$[p \text{ projecteur} \Rightarrow \mathrm{Im} p = \ker(\mathrm{Id} - p) \text{ et } \ker p = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p) \text{ et } \mathrm{E} = \ker p \oplus \mathrm{Im} p].$$
3. Soient p et q deux projecteurs, montrer que : $[\ker p = \ker q \Leftrightarrow p = p \circ q \text{ et } q = q \circ p]$.
4. p et q étant deux projecteurs vérifiant $p \circ q + q \circ p = 0$, montrer que $p \circ q = q \circ p = 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $p + q$ soit un projecteur lorsque p et q le sont. Dans ce cas, déterminer $\mathrm{Im}(p+q)$ et $\ker(p+q)$ en fonction de $\ker p$, $\ker q$, $\mathrm{Im} p$ et $\mathrm{Im} q$.

Exercice 2 : Déterminer $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \sin \frac{k\pi}{n}$.

Exercice 3 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

On considère $u, v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et on suppose que $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v = \ker u + \ker v$.

Montrer que ces sommes sont directes.

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral (admis) et montrer l'inégalité de Taylor-Lagrange.*

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et p, q deux projecteurs de E.

Caractériser, à l'aide des noyaux et des images les relations suivantes :

1. $p \circ q = p$;
2. $q \circ p = p$.

Exercice 2 : Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$.

Exercice 3 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E.
Montrer l'équivalence : $\ker f = \mathrm{Im} f \Leftrightarrow \left(f^2 = 0 \text{ et } n = 2\mathrm{rg}(f)\right)$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Sommes de Riemann.*

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et p, q deux projecteurs de E vérifiant $p \circ q = q \circ p$.
Montrer que $p \circ q$ est un projecteur, et déterminer son image et son noyau en fonction des images et des noyaux de p et q.

Exercice 2 : Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{\sqrt[n]{e^k}}$.

Exercice 3 : Soit E un espace vectoriel de dimension 3, $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E, et t un paramètre réel.

1. Démontrer que la donnée de $\left\{\begin{array}{lcl} \phi(e_1) & = & e_1 + e_2 \\ \phi(e_2) & = & e_1 - e_2 \\ \phi(e_3) & = & e_1 + te_3 \end{array}\right.$ définit une application linéaire ϕ de E dans E.
2. Écrire le transformée du vecteur $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$.
3. Comment choisir t pour que ϕ soit injective ? surjective ?

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral (admis) et montrer l'inégalité de Taylor-Lagrange.*

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et $p, q \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

1. Montrer que p et q sont deux projecteurs de même noyau $\iff$ $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.
2. Déterminer une CNS pour que p et q soient des projecteurs de même image.

Exercice 2 : Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n\sqrt[3]{n^3+k^3}}$.

Exercice 3 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel donné). Soit φ l'application définie par : $\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E},\ \varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X})$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $\ker\varphi$ et $\mathrm{Im}\varphi$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *L'ensemble des applications linéaires de* E *dans* F *est un espace vectoriel.*

Exercice 1 : Soit p et q deux projecteurs de E.
Montrer que $p+q$ est un projecteur $\iff p\circ q = q\circ p = 0$.

Exercice 2 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 3 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel donné). Soit φ l'application définie par : $\forall \mathrm{P}\in\mathrm{E},\ \varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1)-\mathrm{P}(\mathrm{X})$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $\ker\varphi$ et $\mathrm{Im}\varphi$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Intégration et Applications linéaires

Question de cours : *Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité pour les applications linéaires. linéaire.*

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et p, q deux projecteurs de E vérifiant $p \circ q = q \circ p$.

Montrer que $p \circ q$ est un projecteur, et déterminer son image et son noyau en fonction des images et des noyaux de p et q.

Exercice 2 : En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer un équivalent simple de $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

Exercice 3 : Soit E un espace vectoriel de dimension n et f une application linéaire de E dans lui-même.

Montrer que les deux assertions qui suivent sont équivalentes :

(i) $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$.

(ii) $f^2 = 0 \quad \text{et} \quad n = 2 \cdot \mathrm{rg}(f)$.