Matrices et applications linéaires

Exercice 1 : Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

Déterminer l'expression de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^4$ dont la matrice sur ces deux bases s'écrit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 : Soient E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension 2, et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ nilpotent d'indice 2 *i.e.* $u^2 = 0$ et $u \neq 0$.

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 : Déterminer la matrice relative aux bases canoniques des applications linéaires f suivantes :

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x+y\,;y-2x\,;-x+2y) \end{array}$
2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x, x+y, x-y, y) \end{array}$
3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) \end{array}$
4. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}' - n\mathrm{XP} \end{array}$
5. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_3[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{C}_3[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X}) \end{array}$

Exercice 4 : On donne l'endomorphisme $f : (x, y) \longmapsto (-13x + 6y, -9x + 8y)$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$.
2. Soient $u = (1, 3)$ et $v = (2, 1)$.

   Vérifier que $\mathcal{B}' = (u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Exercice 5 : Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ celle de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3\,;\mathbb{R}^2)$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

1. Soit $u = (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $f(u)$.
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 6 : Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

1. Soit $u = (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $f(u)$.
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 7 : E est un $\mathbb{K}$ev de dimension finie non nulle n. Soit f un endomorphisme de E.

1. On suppose que f est nilpotent d'indice p ($p \in \mathbb{N}^*$), c'est-à-dire :

$$f^p = 0 \text{ et } f^{p-1} \neq 0$$

Soit $x \in \mathrm{E}$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$.

Démontrer que $(x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{p-1}(x))$ est libre dans E.

En déduire que $p \leqslant n$.

2. On suppose désormais que $p = n$.

Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & 1 \quad 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 : Soit f et g les applications linéaires définies par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x-y\,;2x+z) \end{array} \qquad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x+y\,;3x-y\,;-x+2y) \end{array}$$

1. Déterminer A et B les matrices respectives de f et g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
2. En déduire l'expression de $g \circ f$.

Exercice 9 : Soit φ l'application linéaire définie par :

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_1[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[\mathrm{X}] \\ a\mathrm{X}+b & \longmapsto & -a\mathrm{X}+b-2a. \end{array}$$

Montrer que φ est une symétrie et déterminer sa base et sa direction.

Exercice 10 : On considère $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (4x+y\,;7x+2y) \end{array}$$

1. Écrire la matrice M de f relative à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\mathrm{M}^2 - 6\mathrm{M} + \mathrm{I}_2$ puis en déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $u = (x\,;y) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer $f^{-1}(u)$.

Exercice 11 : Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$

1. Déterminer l'endomorphisme φ de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ dont la matrice dans la base canonique $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \ldots, \mathrm{X}^n)$ est M.
2. Montrer que φ est un isomorphisme.

3. En déduire que M est inversible et déterminer M^{-1}.

Remarque : La matrice M étant une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont non nuls, l'inversibilité de M est assurée.

Exercice 12 : On se place dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^3$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1\,;\varepsilon_2\,;\varepsilon_3)$ la famille définie par :

$$\varepsilon_1 = (1\,;0\,;0)\,,\ \varepsilon_2 = (1\,;2\,;3)\ \text{ et } \varepsilon_3 = (2\,;1\,;2)\,.$$

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
3. Soit $u = (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les composantes de u dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 13 : Déterminer la matrice de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (5x+6y\,;-3x-4y) \end{array}$ dans $\mathcal{B}' = ((2\,;-1)\,;(1\,;-1))$.

Exercice 14 : On pose $v_1 = (1\,;0\,;0)$, $v_2 = (1\,;1\,;0)$ et $v_3 = (1\,;2\,;3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1\,;v_2\,;v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   On pose alors $F = \text{vect}\,(v_1\,;v_2)$ et $G = \text{vect}\,(v_3)$ de sorte que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
2. Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Déterminer $Mat_{\mathcal{B}}(s)$.
3. Déterminer la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. En déduire l'expression de s.

Exercice 15 : On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (10x-y-z\,;-6x+9y-3z\,;-2x-y+11z) \end{array}$$

1. Déterminer $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u)$, où $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((1\,;3\,;1)\,;(1\,;0\,;-2)\,;(0\,;1\,;-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   Déterminer $B = Mat_{\mathcal{B}}(u)$.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16 : On désigne par u, v, w les trois endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ définis par :

$$u : P \longmapsto P(X-1), \quad v : P \longmapsto P(X+1) \quad \text{et} \quad w : P \longmapsto P'.$$

On rapporte $\mathbb{R}_n[X]$ à sa base canonique $\mathcal{B}$.

1. Déterminer les matrices U, V, W de u, v, w dans la base $\mathcal{B}$.
2. Calculer U^p, V^p, W^p pour tout entier naturel p.
3. Montrer que U est inversible et donner U^{-1}.

Exercice 17 : Dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$, on considère :

$Q_0 = 1 + X + X^2 + X^3$, $Q_1 = X + X^2 + X^3$, $Q_2 = X^2 + X^3$, et $Q_3 = X^3$.

1. Démontrer que $\mathcal{C} = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ et $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.
3. Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3$.

   Déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathcal{C}$.

Exercice 18 : On rapporte $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ à sa base canonique $\mathcal{B}$.

Soient la droite $\mathrm{D} = \mathrm{vect}\,(1,2,1)$ et le plan $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + 5z = 0\}$.

1. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{D} \oplus \Pi$.
2. Soit p la projection vectorielle sur Π parallèlement à D.

   Écrire la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.
3. Écrire la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de :

   (a) la symétrie vectorielle par rapport à Π parallèlement à D ;
   (b) la projection sur D parallèlement à Π ;
   (c) la symétrie vectorielle par rapport à D parallèlement à Π.

Exercice 19 : Dans $\mathrm{E} = \mathbb{K}^4$ muni de sa base canonique, on définit :

— $\mathrm{F} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 / x = t = 0\}$.
— $\mathrm{G} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 / x + y = z + t = 0\}$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Écrire la matrice de la projection sur G parallèlement à F.

Exercice 20 : Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à $\mathrm{A} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 21 : Montrer que $\mathrm{A} = (\sin(i+j)) \in \mathscr{M}_n$ est de rang au plus 2.

Exercice 22 : Déterminer le rang des matrices suivantes :

1. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.
2. $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
3. $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.