Matrices et applications linéaires

Exercice 1 : Soient $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ et $\mathcal{C}=(f_1,f_2,f_3,f_4)$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

Déterminer l'expression de l'application linéaire $f:\mathbb{R}^3\longmapsto\mathbb{R}^4$ dont la matrice sur ces deux bases s'écrit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)=\begin{pmatrix}-3&2&-1\\0&1&-1\\0&0&0\\0&2&-1\end{pmatrix}.$$

Correction : Soit $u\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned}f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}&=f(xe_1+ye_2+ze_3)=xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)\\&=x(-3f_1)+y(2f_1+f_2+2f_4)+z(-f_1-f_2-f_4)\\&=(-3x+2y-z)f_1+(y-z)f_2+0f_3+(2y-z)f_4 \qquad =\begin{pmatrix}-3x+2y-z\\y-z\\0\\2y-z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exercice 2 : Soient E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension 2, et $u\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$ nilpotent d'indice 2 *i.e.* $u^2=0$ et $u\neq 0$.

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

Exercice 3 : Déterminer la matrice relative aux bases canoniques des applications linéaires f suivantes :

1. $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2&\longrightarrow&\mathbb{R}^3\\(x\,;y)&\longmapsto&(x+y\,;y-2x\,;-x+2y)\end{array}$
2. $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2&\longrightarrow&\mathbb{R}^4\\(x\,;y)&\longmapsto&(x,x+y,x-y,y)\end{array}$
3. $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]&\longrightarrow&\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]\\\mathrm{P}&\longmapsto&\mathrm{P}(\mathrm{X}+1)\end{array}$
4. $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]&\longrightarrow&\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]\\\mathrm{P}&\longmapsto&(\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}'-n\mathrm{XP}\end{array}$
5. $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{C}_3[\mathrm{X}]&\longrightarrow&\mathbb{C}_3[\mathrm{X}]\\\mathrm{P}&\longmapsto&\mathrm{P}(\mathrm{X}+1)-\mathrm{P}(\mathrm{X})\end{array}$

Exercice 4 : On donne l'endomorphisme $f:(x,y)\longmapsto(-13x+6y,-9x+8y)$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$.
2. Soient $u=(1,3)$ et $v=(2,1)$.

   Vérifier que $\mathcal{B}'=(u,v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Exercice 5 : Soit $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-2&1&2\end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ celle de $\mathbb{R}^2$ et $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3\,;\mathbb{R}^2)$ tel que $\mathrm{A}=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

1. Soit $u = (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $f(u)$.
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Correction :

1. $f(u) = \mathrm{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2y-z\\-2x+y+2z\end{pmatrix}$.

2. $u\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \ker(f) \iff f(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases}x+2y-z &= 0\\ -2x+y+2z &= 0\end{cases} \iff \begin{cases}x &= z\\ y &= 0\\ z &= z\end{cases}$

$$\ker(f) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

D'après le théorème du rang, f est donc de rang 2 dans $\mathbb{R}^2$ donc surjective et $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

Exercice 6 : Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

1. Soit $u = (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $f(u)$.
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Correction :

1. $f(u) = \mathrm{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x-y\\-2x+y-2z\\x+y+3z\end{pmatrix}$.

2. $u\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \ker(f) \iff f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases}2x-y &= 0\\ -2x+y-2z &= 0\\ x+y+3z &= 0\end{cases} \iff \begin{cases}2x-y &= 0\\ z &= 0\\ x+y &= 0\end{cases}$

$$\iff \begin{cases}x &= 0\\ y &= 0\\ z &= 0\end{cases} \iff \ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \iff f \text{ est injective.}$$

D'après le théorème du rang, f est donc de rang 3 dans $\mathbb{R}^3$ donc surjective et $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 7 : E est un $\mathbb{K}$ev de dimension finie non nulle n. Soit f un endomorphisme de E.

1. On suppose que f est nilpotent d'indice p ($p \in \mathbb{N}^*$), c'est-à-dire :

$$f^p = 0 \text{ et } f^{p-1} \neq 0$$

Soit $x \in \mathrm{E}$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$.

Démontrer que $(x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{p-1}(x))$ est libre dans E.

En déduire que $p \leqslant n$.

2. On suppose désormais que $p = n$.

Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}0 & & & 0\\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Exercice 8 : Soit f et g les applications linéaires définies par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (x-y\,;2x+z) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x+y\,;3x-y\,;-x+2y) \end{array}$$

1. Déterminer A et B les matrices respectives de f et g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
2. En déduire l'expression de $g \circ f$.

Correction : $g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (3x-y+z\,;x-3y-z\,;3x+2y+2z) \end{array}$

Exercice 9 : Soit φ l'application linéaire définie par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_1[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ aX+b & \longmapsto & -aX+b-2a. \end{array}$$

Montrer que φ est une symétrie et déterminer sa base et sa direction.

Exercice 10 : On considère $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (4x+y\,;7x+2y) \end{array}$$

1. Écrire la matrice M de f relative à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $M^2 - 6M + I_2$ puis en déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $u = (x\,;y) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer $f^{-1}(u)$.

Exercice 11 : Soit $M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$

1. Déterminer l'endomorphisme φ de $\mathbb{K}_n[X]$ dont la matrice dans la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est M.
2. Montrer que φ est un isomorphisme.
3. En déduire que M est inversible et déterminer M^{-1}.

Remarque : La matrice M étant une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont non nuls, l'inversibilité de M est assurée.

Exercice 12 : On se place dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^3$.

On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1\,;\varepsilon_2\,;\varepsilon_3)$ la famille définie par :

$$\varepsilon_1 = (1\,;0\,;0)\,,\ \varepsilon_2 = (1\,;2\,;3)\ \text{ et } \varepsilon_3 = (2\,;1\,;2)\,.$$

1. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2 Déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

3 Soit $u = (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les composantes de u dans la base $\mathscr{B}'$.

Exercice 13 : Déterminer la matrice de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (5x+6y\,;-3x-4y) \end{array}$ dans $\mathscr{B}' = ((2\,;-1)\,;(1\,;-1))$.

Exercice 14 : On pose $v_1 = (1\,;0\,;0)$, $v_2 = (1\,;1\,;0)$ et $v_3 = (1\,;2\,;3)$.

1 Montrer que $\mathscr{B} = (v_1\,;v_2\,;v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On pose alors $\mathrm{F} = \mathrm{vect}\,(v_1\,;v_2)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{vect}\,(v_3)$ de sorte que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

2 Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Déterminer $Mat_{\mathscr{B}}(s)$.

3 Déterminer la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

4 En déduire l'expression de s.

Exercice 15 : On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & (10x-y-z\,;-6x+9y-3z\,;-2x-y+11z) \end{array}$$

1 Déterminer $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(u)$, où $\mathscr{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2 Montrer que la famille $\mathscr{B} = ((1\,;3\,;1)\,;(1\,;0\,;-2)\,;(0\,;1\,;-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer $\mathrm{B} = Mat_{\mathscr{B}}(u)$.

3 Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction :

1 On a directement $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 10 & -1 & -1 \\ -6 & 9 & -3 \\ -2 & -1 & 11 \end{pmatrix}$.

2 Notons $\mathrm{P} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(\mathscr{B})$.

On a :

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On applique la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{\mathscr{L}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\mathrm{P} \sim_{\mathscr{L}} \mathrm{I}_n$ donc P est inversible et $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Ainsi $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}_c}^{\mathscr{B}}$ et P^{-1} se lit dans le membre de droite de la matrice augmentée.

On utilise la formule de changement de base : $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$. Ainsi, après calcul, on obtient :

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

3 B étant une matrice diagonale, on obtient $B^n = \begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 \\ 0 & 12^n & 0 \\ 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix} = 6^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Après calcul, on en déduit :

$$A^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2.6^n + 4.12^n & 6^n - 12^n & 6^n - 12^n \\ 6.6^n - 6.12^n & 3.6^n - 3.12^n & 3.6^n - 3.12^n \\ 2.6^n - 2.12^n & 6^n - 12^n & 6^n - 5.12^n \end{pmatrix}$$

Exercice 16 : On désigne par u, v, w les trois endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ définis par :

$$u : P \longmapsto P(X-1), \quad v : P \longmapsto P(X+1) \quad \text{et} \quad w : P \longmapsto P'.$$

On rapporte $\mathbb{R}_n[X]$ à sa base canonique $\mathcal{B}$.

1 Déterminer les matrices U, V, W de u, v, w dans la base $\mathcal{B}$.

2 Calculer U^p, V^p, W^p pour tout entier naturel p.

3 Montrer que U est inversible et donner U^{-1}.

Exercice 17 : Dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$, on considère :

$Q_0 = 1 + X + X^2 + X^3$, $Q_1 = X + X^2 + X^3$, $Q_2 = X^2 + X^3$, et $Q_3 = X^3$.

1 Démontrer que $\mathcal{C} = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

2 Déterminer $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ et $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

3 Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3$.

Déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathcal{C}$.

Correction :

1 La famille $\mathcal{C} = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$ est échelonnée en valuation. Elle est donc libre.

De plus, elle compte 4 vecteurs, et $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$, donc $\mathcal{C} = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

2 $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : $\begin{cases} Q_0 = 1 + X + X^2 + X^3 \\ Q_1 = \phantom{1 + {}} X + X^2 + X^3 \\ Q_2 = \phantom{1 + X + {}} X^2 + X^3 \\ Q_3 = \phantom{1 + X + X^2 + {}} X^3 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = Q_0 - Q_1 \\ X = Q_1 - Q_2 \\ X^2 = Q_2 - Q_3 \\ X^3 = Q_3 \end{cases}$.

3 Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3$.

Posons $U = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ et $V = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(P)$.

D'après le cours, on a $V = (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1} U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a+b \\ -b+c \\ -c+d \end{pmatrix}$

Donc,

$$P = aQ_0 + (b-a)Q_1 + (c-b)Q_2 + (d-c)Q_3.$$

Vérification :

$$\begin{aligned} aQ_0 + (b-a)Q_1 + (c-b)Q_2 + (d-c)Q_3 &= a(Q_0 - Q_1) + b(Q_1 - Q_2) + c(Q_2 - Q_3) + dQ_3 \\ &= a1 + bX + cX^2 + dX^3 \\ &= P. \end{aligned}$$

Exercice 18 : On rapporte $E = \mathbb{R}^3$ à sa base canonique $\mathcal{B}$.

Soient la droite $D = \text{vect}\,(1,2,1)$ et le plan $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + 5z = 0\}$.

1. Montrer que $E = D \oplus \Pi$.
2. Soit p la projection vectorielle sur Π parallèlement à D.

   Écrire la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.
3. Écrire la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de :

   a. la symétrie vectorielle par rapport à Π parallèlement à D ;
   b. la projection sur D parallèlement à Π ;
   c. la symétrie vectorielle par rapport à D parallèlement à Π.

Correction :

1. Posons $u = (1,2,1)$. Alors $D = \text{vect}\,(u)$.

   De plus,

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \Pi &\iff x - 2y + 5z = 0 \\ &\iff x = 2y - 5z \\ &\iff (x,y,z) = (2y - 5z, y, z) \\ &\iff (x,y,z) = y(2,1,0) + z(-5,0,1) \\ &\iff (x,y,z) \in \text{vect}\,((2,1,0),(-5,0,1)) \end{aligned}$$

   En posant, $v = (2,1,0)$ et $w = (-5,0,1)$.

$$\Pi = \text{vect}\,(v,w).$$

   La famille $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} u = (1,2,1) \\ v = (2,1,0) \\ w = (-5,0,1) \end{pmatrix}$ est libre (à montrer !) à 3 vecteurs en dimension 3, donc $\mathcal{C} = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   D'après un théorème du cours, $\text{vect}\,(u) \oplus \text{vect}\,(v,w) = \mathbb{R}^3$.

   Donc,

$$D \oplus \Pi = \mathbb{R}^3.$$

2. p est la projection vectorielle sur Π parallèlement à D.

   On a donc $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   D'après le cours, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = P\text{Mat}_{\mathcal{C}}(p)P^{-1}$.

où $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 6 & -10 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Donc,

$$\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -2 & 6 & -10 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Remarque : On vérifiera que $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$.

3 a) Soit S est la symétrie par rapport à Π parallèlement à D.

On a donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{S}) = \mathrm{P}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -2 & 5 & -10 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Remarque : On vérifiera que la relation $\mathrm{Id}+\mathrm{S} = 2p$ i.e. $\mathrm{S} = 2p - \mathrm{Id}$ se transpose matriciellement et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{S}) = 2\mathrm{A} - \mathrm{I}_3$.

b) Soit p' la projection sur D parallèlement à Π.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p') = \mathrm{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p') = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 10 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Remarque : $p + p' = \mathrm{Id}$ i.e. $p' = \mathrm{Id} - p$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p') = \mathrm{I}_3 - \mathrm{A}$.

c) Soit S′ la symétrie par rapport à D parallèlement à Π.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{S}) = \mathrm{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 2 & -5 & 10 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Remarque : $\mathrm{S} + \mathrm{S}' = 0$ i.e. $\mathrm{S}' = -\mathrm{S}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{S}') = -\mathrm{A}$.

Exercice 19 : Dans $\mathrm{E} = \mathbb{K}^4$ muni de sa base canonique, on définit :

— $\mathrm{F} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 / x = t = 0\}$.
— $\mathrm{G} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 / x + y = z + t = 0\}$

1 Montrer que F et G sont supplémentaires.

2 Écrire la matrice de la projection sur G parallèlement à F.

Exercice 20 : Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à $\mathrm{A} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques.

Correction : f est par construction une application linéaire.

Donc,

$$\begin{aligned} f \text{ est un projecteur} &\iff f \circ f = f \\ &\iff \mathrm{A} \times \mathrm{A} = \mathrm{A} \end{aligned}$$

Or, on a bien $A^2 = A$ (par calcul) donc f est un projecteur.

De plus,

$$(x,y,z) \in \ker(f) \iff f((x,y,z)) = (0,0,0) \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff (x,y,z) \in \mathbb{R}(1,2,2)$$

Donc, $\ker(f) = \mathbb{R}(1,2,2)$.

Ensuite,

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{vect}(\{f((1,0,0)), f((0,1,0)), f((0,0,1)\}) \\ &= \mathrm{vect}(\{(8,-2,-2), (-2,5,-4), (-2,-4,5)\}) \end{aligned}$$

Or, $(8,-2,-2) = -2(-2,5,-4) - 2(-2,-4,5)$

$$= \mathrm{vect}((-2,5,-4),(-2,-4,5))$$ en arrangeant un peu, on trouve finalement
$$\underset{e_1 \leftarrow \frac{1}{9}(e_1-e_2)}{=} \mathrm{vect}((0,1,-1),(2,4,-5)) \underset{e_2 \leftarrow e_2 - 4e_1}{=} \mathrm{vect}((0,1,-1),(2,0,-1)).$$

Remarque : Comme $\mathrm{Im}(f) = \ker(f - \mathrm{Id})$, on peut également résoudre un système pour trouver la même chose.

Donc, f est le projecteur sur le plan dirigé par $(0,1,-1)$ et $(2,0,-1)$ parallèlement à la droite $\mathbb{R}(1,2,2)$

Exercice 21 : Montrer que $A = (\sin(i+j)) \in \mathscr{M}_n$ est de rang au plus 2.

Exercice 22 : Déterminer le rang des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.
2. $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.