

Applications linéaires et intégration

Exercice 1 : On considère l'application f définie par $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x; y; z) \mapsto \begin{pmatrix} -2x + y + z \\ -5x + 2y + 3z \\ -2x + y + z \end{pmatrix}.$$

- 1
 - a Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
 - b Déterminer $\ker(f)$ et en donner une base ; f est-il injectif ?
 - c Déterminer $\text{Im}(f)$ et en donner une base ; f est-il surjectif ?
- 2
 - a Construire un supplémentaire S de $\ker(f)$ dans $\mathbb{R}^3$ (justifier).
 - b Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à $\ker(f)$ parallèlement à S .
Déterminer l'expression de $s(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- 3
 - a Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. En remarquant que $f(x, y, z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pour une certaine matrice A à préciser, calculer $f^2(x, y, z)$ et $f^3(x, y, z)$.
En déduire $f^k(x, y, z)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
 - b Déterminer $\ker(f^2)$ et $\text{Im}(f^2)$ (on en donnera des bases).
 - c Que valent les suites $(\dim \ker(f^k))_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\dim \text{Im}(f^k))_{k \in \mathbb{N}}$?
- 4 On pose $g = f^2$. Que vaut g^2 ?
En déduire la nature géométrique de g et ses éléments caractéristiques.

Exercice 2 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_x^{3x} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + t + 1}}$.

- 1 Justifier l'existence de $F(x)$ pour tout réel x .
- 2 Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ pour exprimer $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Étudier la monotonie de F sur $\mathbb{R}$ (dresser le tableau de variations, sans les limites à ce stade).
- 3 Étude de la limite en $+\infty$.
 - a Soit la fonction $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^2 + t + 1}}$. Donner les variations de φ sur $\mathbb{R}$.
 - b Établir l'encadrement $\forall x > 0, \varphi(x) \ln 3 \leq F(x) \leq \varphi(3x) \ln 3$.
 - c Conclure sur la limite de F en $+\infty$ et compléter le tableau de variations précédent.
- 4 Étude de la limite en $-\infty$. Adapter les questions précédentes pour déterminer la limite de F en $-\infty$.
- 5 Déterminer le $DL_2(0)$ de F et en déduire une équation de la tangente à la courbe en 0 ainsi que sa position relative avec la courbe.
- 6 (Facultatif). Exprimer $F(x)$ sans aucune intégrale !