Applications linéaires

Exercice 1 :

1 (a) Les espaces de départ et d'arrivée sont identiques ; il reste à montrer la linéarité de f. Soient $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ puis $(\lambda,\lambda')\in\mathbb{R}^2$. En identifiant vecteurs ligne et vecteurs colonne, on a :

$$\begin{aligned}
f\left(\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\lambda'\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right) &= f\begin{pmatrix}\lambda x+\lambda' x'\\\lambda y+\lambda' y'\\\lambda z+\lambda' z'\end{pmatrix}\\
&= f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad \text{où } \begin{cases}\mathrm{X}=\lambda x+\lambda' x'\\ \mathrm{Y}=\lambda y+\lambda' y'\\ \mathrm{Z}=\lambda z+\lambda' z'\end{cases}\\
&= \begin{pmatrix}-2\mathrm{X}+\mathrm{Y}+\mathrm{Z}\\-5\mathrm{X}+2\mathrm{Y}+3\mathrm{Z}\\-2\mathrm{X}+\mathrm{Y}+\mathrm{Z}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-2(\lambda x+\lambda' x')+\lambda y+\lambda' y'+\lambda z+\lambda' z'\\-5(\lambda x+\lambda' x')+2(\lambda y+\lambda' y')+3(\lambda z+\lambda' z')\\-2(\lambda x+\lambda' x')+\lambda y+\lambda' y'+\lambda z+\lambda' z'\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\lambda(-2x+y+z)+\lambda'(-2x'+y'+z')\\\lambda(-5x+2y+3z)+\lambda'(-5x'+2y'+3z')\\\lambda(-2x+y+z)+\lambda'(-2x'+y'+z')\end{pmatrix}\\
&= \lambda f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\lambda' f\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{f\in\mathscr{L}(\mathrm{E}).}$

Commentaires : *En anticipant les prochains chapitres ou les questions qui suivent, on pouvait aussi remarquer que* $f(x\,;y\,;z)=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-5&2&3\\-2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ *où* $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-5&2&3\\-2&1&1\end{pmatrix}$ *et invoquer la linéarité à droite du produit matriciel.*

(b) Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
(x,y,z)\in\ker(f) &\iff f(x,y,z)=(0,0,0)\\
&\iff \begin{cases}-2x+\ y+\ z=0\\-5x+2y+3z=0\\-2x+\ y+\ z=0 \qquad \text{(redondante)}\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}-2x+y+z=0\\-x\qquad +z=0 \qquad (\mathrm{L}_2\leftarrow \mathrm{L}_2-2\mathrm{L}_1)\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x=z\\y=2x-z=z\\z=z\end{cases}\\
&\iff (x,y,z)\in\mathrm{vect}\left((1,1,1)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi $\ker(f) = \text{vect}(u_1)$ où $u_1 = (1,1,1)$.

Comme $u_1 \neq 0$, il forme une famille libre et génératrice donc une base de $\ker(f)$.

Comme f est linéaire et $\ker(f) \neq \{(0,0,0)\}$, f n'est pas injectif.

(c) D'après le théorème du rang, on sait déjà que $\text{rg}(f) = 3-1 = 2$. En particulier f n'est pas surjectif.

Comme $\text{Im}(f)$ est engendré par l'image d'une base de $\mathbb{R}^3$, en notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned}
\text{Im}(f) = \text{vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) &= \text{vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\-5\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\right) \\
&= \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\right) && \text{car } f(e_1) = -f(e_2) - f(e_3). \\
&= \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) && \mathrm{C}_2 \leftarrow \mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_1 \\
&= \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) && \mathrm{C}_1 \leftarrow \mathrm{C}_1 - 2\mathrm{C}_2.
\end{aligned}$$

Posons $u_2 = (0,1,0)$ et $u_3 = (1,0,1)$ cette famille génératrice de $\text{Im}(f)$. Avec les dimensions de $\text{Im}(f)$, on sait que c'en est également une base.

2 (a) Comme $\ker(f) = \text{vect}(u_1)$, toute famille complétant (u_1) en une base de $\mathbb{R}^3$ engendrera un supplémentaire de $\ker(f)$.

La famille (e_2, e_3) formant une famille libre avec u_1 de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ donc une base convient et on peut poser, par exemple, $\mathrm{S} = \text{vect}(e_2, e_3)$.

Commentaires : *Profitez-en pour remarquer que $u_1 = u_2 + u_3$ i.e. on ne peut pas prendre $\mathrm{S} = \text{vect}(u_2, u_3)$ ou encore $\text{Im}(f)$ et $\ker(f)$ ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.*

(b) Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Commençons par décomposer u dans la base $(u_1\,;e_2\,;e_3)$ *i.e.* cherchons l'unique triplet $(\alpha\,;\beta\,;\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$u = \alpha u_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}\alpha &= x\\ \alpha+\beta &= y\\ \alpha+\gamma &= z\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha &= x\\ \beta &= -x+y\\ \gamma &= -x+z\end{cases}$$

$$= \underbrace{xu_1}_{u_{\mathrm{K}} \in \ker(f)} + \underbrace{(y-x)e_2 + (z-x)e_3}_{u_{\mathrm{S}} \in \mathrm{S}}.$$

Par définition de la symétrie de base $\ker(f)$ parallèlement à S, on a :

$$\begin{aligned}
s(x\,;y\,;z) = s(u) = s(u_{\mathrm{K}} + u_{\mathrm{S}}) = u_{\mathrm{K}} - u_{\mathrm{S}} &= xu_1 + (x-y)e_2 + (x-z)e_3 \\
&= \begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix} + (x-y)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + (x-z)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}x\\2x-y\\2x-z\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Commentaires : *L'expression de s dépend évidemment du supplémentaire construit S. Il est donc normal d'avoir une expression différente pour un autre choix de S...*

3 (a) **Commentaires :** *On peut passer par le calcul direct en calculant $f(f(x,y,z))$: c'est un peu long mais pas difficile. On vous a simplifié le travail en anticipant sur le prochain chapitre d'algèbre linéaire qui fait le lien entre les applications linéaires et les matrices.*

On peut écrire $f(x\,;y\,;z) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On obtient $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Donc, l'application f^2 est donnée par :

$$f^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \mathrm{A}^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x+y+2z \\ -6x+2y+4z \\ -3x+y+2z \end{pmatrix}.$$

Ensuite, $\mathrm{A}^3 = \mathrm{A}\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{A}^2$ donc $f^3 = f^2$.

Étant donné que $f^3 = f^2$, une récurrence immédiate permet d'affirmer que :

$$\forall\, k \geqslant 3, \quad f^k = f^2.$$

N'oublions pas le cas $k=0$: $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

(b) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \ker\left(f^2\right) &\iff f^2(x,y,z) = (0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} -3x + y + 2z = 0 \\ -6x + 2y + 4z = 0 \\ -3x + y + 2z = 0 \end{cases} \\
&\iff -3x+y+2z = 0 \\
&\iff \begin{cases} x &= x \\ y &= 3x-2z \\ z &= z \end{cases} \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right). \qquad \mathrm{C}_1 \leftarrow \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2
\end{aligned}$$

Ainsi $\ker\left(f^2\right) = \operatorname{vect}\left(u_1, v_2\right)$ où $v_2\,(0\,;-2\,;1)$.

Comme u_1 et v_2 sont non colinéaires, ils forment une famille libre et génératrice de $\ker\left(f^2\right)$ donc une base :

$$\left(u_1\,;v_2\right) \text{ forme une base de } \ker\left(f^2\right).$$

D'après le théorème du rang, $\dim\left(\operatorname{Im}\left(f^2\right)\right) = 3 - 2 = 1$. Il suffit donc de trouver une seul vecteur non nul de $\operatorname{Im}\left(f^2\right)$: c'est chose faite avec $f^2(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En posant $v_3 = (1\,;2\,;1)$, (v_3) forme une base de $\operatorname{Im}\left(f^2\right)$.

c) Sans oublier $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ (donc $\ker\left(f^0\right) = \{0\}$ et $\operatorname{Im}\left(f^0\right) = \mathbb{R}^3$), on a :

$$\left(\dim\ker\left(f^k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}} = (0, 1, 2, 2, 2, \ldots) \quad \text{et} \quad \left(\dim\operatorname{Im}\left(f^k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}} = (3, 2, 1, 1, 1 \ldots).$$

4. Comme $g = f^2$ est linéaire et vérifie $g^2 = f^4 = f^2 = g$, c'est le projecteur sur

$$\mathrm{F} = \operatorname{Im}(g) = \operatorname{Im}\left(f^2\right) = \operatorname{vect}(v_3)$$

parallèlement à

$$\mathrm{G} = \ker g = \ker\left(f^2\right) = \operatorname{vect}(u_1, v_2).$$

Commentaires : *g est donc un projecteur sur une droite parallèlement à un plan.*

Exercice 2 :

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2 + x + 1$ est continue et ne prend que des valeurs strictement positives donc $\varphi : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\psi : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+t+1}}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème fondamental.

En posant $u : x \longmapsto x$ et $v : x \longmapsto 3x$, d'après la relation de Chasles, on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = (\psi \circ v)(x) - (\psi \circ u)(x).$$

D'après les théorèmes sur les composées et sommes de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, c'est le cas de F.

En particulier, elle est correctement définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2. D'après la question précédente, F est déjà de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}'(x) &= \frac{3}{\sqrt{9x^2+3x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} \\ &= 3\left(\frac{1}{\sqrt{9x^2+3x+1}} - \frac{1}{\sqrt{9x^2+9x+9}}\right).\end{aligned}$$

Les expressions sous les racines ne prenant que des valeurs strictement positives, les théorèmes généraux sur les composées, quotients et sommes de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ nous assurent que F′ donc F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

L'étude des variations de F revient à celle du signe de $(9x^2+3x+1) - (9x^2+9x+9)$:

$$\mathrm{F}'(x) \geqslant 0 \iff (9x^2+3x+1) - (9x^2+9x+9) = -6x - 8 = -2(3x+4) \leqslant 0 \iff x \geqslant -\frac{4}{3}.$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
$\mathrm{F}'(x)$		$-$	0	$+$	
F	$-\ln 3$	$\searrow$	$\mathrm{F}\left(-\frac{4}{3}\right)$	$\nearrow$	$\ln 3$

$\boxed{3}$ *Étude de la limite en $+\infty$.*

(a) Comme quotient d'un polynôme par la racine d'un polynôme strictement positif, φ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pas d'autres choix que d'étudier le signe de la dérivée :

$$\forall\ t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = \frac{t+2}{2(t^2+t+1)\sqrt{t^2+t+1}} \text{ du signe de } t+2.$$

D'où le tableau de variations de φ sur $\mathbb{R}$:

t	$-\infty$		-2		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$-$	0	$+$	
φ	-1	$\searrow$	$-\dfrac{2}{\sqrt{3}} < -1$	$\nearrow$	1

On retiendra que φ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Soient $x > 0$ et $t \in [x\,;3x] \subset \mathbb{R}_+$ (noter que $x \leqslant 3x$). Par croissance de φ on a :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi(3x) \\ \varphi(x)\frac{1}{t} &\leqslant \frac{\varphi(t)}{t} = f(t) \leqslant \varphi(3x)\frac{1}{t} \qquad \text{(car } t>0\text{)} \end{aligned}$$

Par croissance de l'intégrale, on a alors :

$$\varphi(x)\int_x^{3x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_x^{3x} f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \varphi(3x)\int_x^{3x}\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Or, $\displaystyle\int_x^{3x}\frac{\mathrm{d}t}{t} = \Big[\ln|t|\Big]_x^{3x} = \ln|3x| - \ln|x| = \ln(3),$

$$\text{Donc, } \ \varphi(x)\ln(3) \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \varphi(3x)\ln(3).$$

(c) D'après l'encadrement précédent et le théorème du même nom, comme $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$, on en déduit :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = \ln(3).$$

Commentaires : *La courbe de F admet donc une asymptote d'équation $y = \ln(3)$ en $+\infty$.*

$\boxed{4}$ Pour $x < -2$ et $t \in [3x\,;x] \subset\,]-\infty\,;-2]$ (noter que $3x \leqslant x$), le même raisonnement qu'à la question précédente permet de montrer que :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi(3x) && \text{(décroissance de } \varphi \text{ sur }]-\infty;-2[\text{, attention !)} \\ \varphi(3x)\frac{1}{t} &\leqslant \frac{\varphi(t)}{t} = f(t) \leqslant \varphi(x)\frac{1}{t} && \text{(car } t<0\text{, attention !)} \end{aligned}$$

Par croissance de l'intégrale, on a alors :

$$\varphi(x)\int_{3x}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_{3x}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \varphi(3x)\int_{3x}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{t} \quad \text{(croissance de l'intégrale, car } 3x \leqslant x\text{, attention !)}$$

Donc, $\ -\varphi(3x)\ln(3) \leqslant -\mathrm{F}(x) \leqslant -\varphi(3x)\ln(3)$.

Le théorème d'encadrement permet encore de conclure et on a :

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{F}(x) = -\ln(3).$$

Commentaires : *La courbe de F admet donc une asymptote d'équation $y = -\ln(3)$ en $-\infty$.*

5 Il suffit de calculer le $\mathrm{DL}_1(0)$ de F' et primitiver avec $\mathrm{F}(0)=0$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}'(x) &= \frac{3}{\sqrt{1+3x+9x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}} \\
&\underset{x\to 0}{=} 3\left(1+3x+\mathrm{o}\left(x\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\Big) - \left(1+x+\mathrm{o}\left(x\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&\underset{x\to 0}{=} 3\left((1-\frac{3}{2}x+\mathrm{o}\left(x\right)\right) - \left(1-\frac{1}{2}x+\mathrm{o}\left(x\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 2-4x+\mathrm{o}\left(x\right).
\end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{F}(x) \underset{x\to 0}{=} 2x-2x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)$.

Une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est donc $y=2x$.

Comme $\mathrm{F}(x)-2x \underset{x\to 0}{\sim} -2x^2 \leqslant 0$, alors la courbe de F est sous sa tangente **au voisinage** de 0.

6 Tout le secret est dans la forme canonique :

$$\mathrm{F}(x) = \int_x^{3x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_x^{3x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2}},$$

Posons $u=\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}$ *i.e.* $t=\dfrac{\sqrt{3}u-1}{2}$, donc $\mathrm{d}t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}u$.
Pour les nouvelles bornes,

$$t=x \iff u=\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad t=3x \iff u=\frac{6x+1}{\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned}
\text{D'où,}\ \mathrm{F}(x) &= \int_{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}^{\frac{6x+1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u = \left[\ln(u+\sqrt{1+u^2})\right]_{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}^{\frac{6x+1}{\sqrt{3}}} \\
&= \ln\left(\frac{6x+1}{\sqrt{3}}+\sqrt{1+\left(\frac{6x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right) - \ln\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\sqrt{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right) \\
&= \ln\left(\frac{6x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3+(6x+1)^2}\right) - \ln\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3+(2x+1)^2}\right) \\
&= \ln\left(6x+1+2\sqrt{9x^2+3x+1}\right) - \ln\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right).
\end{aligned}$$

Commentaires : *Si vous voulez, vous pouvez recommencer l'exercice en prenant comme première question :*

1 *Étude complète de la fonction* F *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $\mathrm{F}(x)=\ln\left(\dfrac{6x+1+2\sqrt{9x^2+3x+1}}{2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}}\right)$.

2 ...

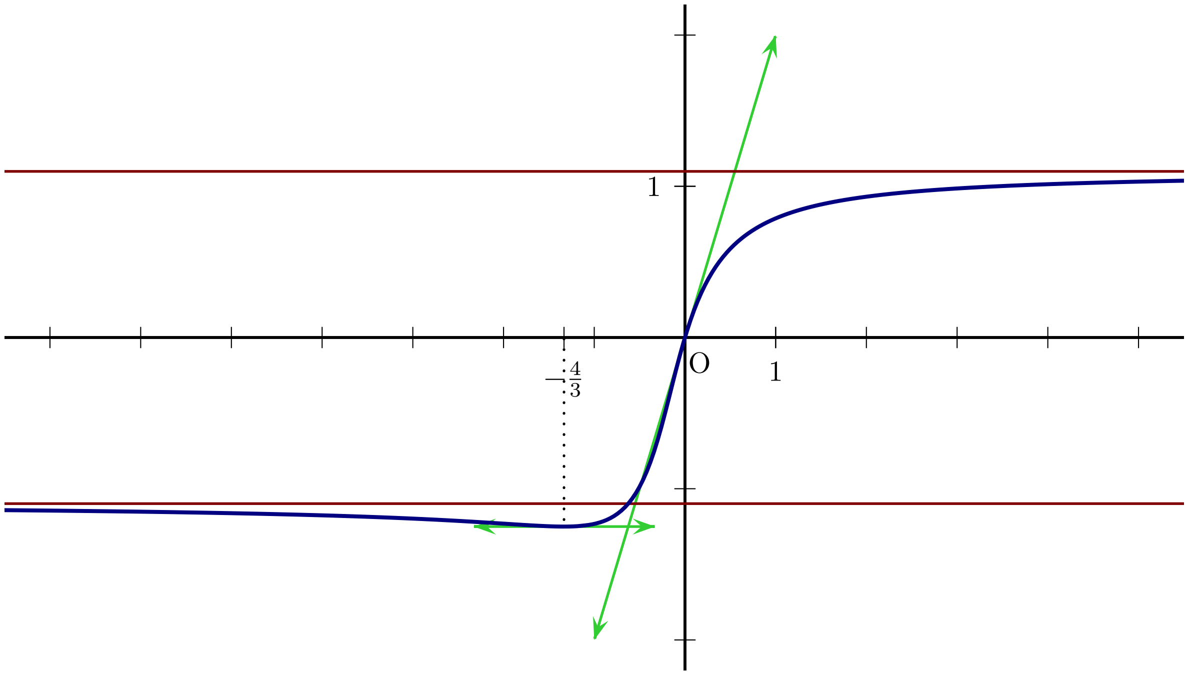

Figure XXVI.1 – Courbe représentative de $F : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{3x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}$.