PTSI

Épreuve de Mathématiques 6

Vendredi 22 novembre 2024

Durée : 2 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à **encadrer** les résultats de leurs calculs.

Lorsqu'un candidat ne sait pas montrer un résultat, il peut l'**admettre** en le précisant sur sa copie et l'utiliser pour **répondre aux questions suivantes**.

Le sujet est composé de 2 exercices indépendants.

PROBLÈME 1.

On considère les applications

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \qquad P \longmapsto \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] \qquad \text{et} \qquad \varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad P \longmapsto P(1).$$

On note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Partie 1 : En passant par l'algèbre linéaire

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Calculer $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f)$. On pose dans la suite $A' = 8A$.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ?
4. On admet que φ est linéaire. Déterminer la matrice de φ dans les bases canoniques.
5. Déterminer le noyau de φ.
6. Déterminer $\mathrm{Ker}\,(A' - 8I_3)$ et en déduire $\mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right)$.
7. De même déterminer $\mathrm{Ker}\left(f - \frac{1}{2}\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right)$ et $\mathrm{Ker}\left(f - \frac{1}{4}\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right)$.

On pose $\mathscr{B} = \left(1, 1-2X, 1-6X+6X^2\right)$.

8. Justifier que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
9. Déterminer $D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
10. On pose $Q = P_{\mathscr{C},\mathscr{B}}$. Préciser Q et calculer Q^{-1}.
11. Donner une relation entre A, D, Q et Q^{-1}. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
12. Soient $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $f^n(P)$.
13. Montrer alors que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi\left(f^n(P)\right) = \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$.

Partie 2 : On recommence avec de l'analyse

On pose

$$g : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \qquad P \longmapsto \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right].$$

On admet que g est un automorphisme.

14. Montrer par récurrence l'assertion suivante :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall n \in \mathbb{N}, \qquad g^n(P) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right).$$

15. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Déterminer : $\lim\limits_{N \to +\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} P\left(\frac{k}{N}\right)$.
16. En déduire une expression de $\lim\limits_{n \to +\infty} \psi\left(g^n(P)\right)$, où $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1) \end{array}$.

PROBLÈME 2.

Soit f une fonction définie sur $[1;+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue, positive et décroissante sur $[1;+\infty[$.
On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = f(n), \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} u_k, \quad I_n = \int_1^n f(t)dt \quad \text{et} \quad v_n = S_n - I_n.$$

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant S_n - I_n \leqslant u_1$$
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
3. En déduire qu'il existe un réel λ tel que : $S_n = I_n + \lambda + o(1)$.
4. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   (a) Montrer que les suites $(T_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
   (b) Qu'en déduire pour la série $\sum(-1)^{n-1}u_n$?
5. Dans cette question, on pose $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha \in]0;1[$.
   (a) La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge-t-elle ?
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_{2n} = S_{2n} - 2^{1-\alpha} S_n$.
   (c) Calculer I_n et déduire des questions précédentes :
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n = \left(2^{1-\alpha} - 1\right)\left(\frac{1}{1-\alpha} - \lambda\right)$$
   où λ est le réel introduit dans la question 3.

• FIN •