PROBLÈME 1.

On considère les applications

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \quad \text{et} \quad \varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$P \longmapsto \frac{1}{2} \left[P \left(\frac{X}{2} \right) + P \left(\frac{X+1}{2} \right) \right] \quad \text{et} \quad P \longmapsto P(1).$$

On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Partie 1 : En passant par l'algèbre linéaire

1. Montrer que f est un endomorphisme.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P)$ existe bien, il nous faut donc montrer que $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$. L'élément $f(P)$ est un polynôme. De plus,

$$\begin{aligned} \deg(f(P)) &= \deg \left(\frac{1}{2} \left[P \left(\frac{X}{2} \right) + P \left(\frac{X+1}{2} \right) \right] \right) \\ &\leq \max \left(\deg \left(P \left(\frac{X}{2} \right) \right), \deg \left(P \left(\frac{X+1}{2} \right) \right) \right) \\ &= \max(\deg(P), \deg(P)) \\ &= \deg(P) \leq 2 \end{aligned}$$

Donc $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$ et f est bien définie.

Montrons que f est linéaire. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$. Posons $R = \lambda P + Q$. On a

$$\begin{aligned} f(R) &= \frac{1}{2} \left[R \left(\frac{X}{2} \right) + R \left(\frac{X+1}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[(\lambda P + Q) \left(\frac{X}{2} \right) + (\lambda P + Q) \left(\frac{X+1}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\lambda P \left(\frac{X}{2} \right) + Q \left(\frac{X}{2} \right) + \lambda P \left(\frac{X+1}{2} \right) + Q \left(\frac{X+1}{2} \right) \right] \\ &= \lambda \frac{1}{2} \left[P \left(\frac{X}{2} \right) + P \left(\frac{X+1}{2} \right) \right] + \frac{1}{2} \left[Q \left(\frac{X}{2} \right) + Q \left(\frac{X+1}{2} \right) \right] \\ &= \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

Donc f est bien linéaire. Conclusion : f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Calculer $A = \text{mat}_{\mathcal{C}}(f)$. On pose dans la suite $A' = 8A$.

Calculons les images de $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$ par f .

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{2}[1+1] = 1 \\ f(X) &= \frac{1}{2} \left[\frac{X}{2} + \frac{X+1}{2} \right] = \frac{2X+1}{4} = \frac{X}{2} + \frac{1}{4} \\ f(X^2) &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{X}{2} \right)^2 + \left(\frac{X+1}{2} \right)^2 \right] = \frac{X^2 + X^2 + 2X + 1}{8} = \frac{X^2}{4} + \frac{X}{4} + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Conclusion : $A = \text{mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $A' = 8A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. L'application f est-elle injective ? surjective ?

Puisque A est échelonnée avec un pivot sur chaque ligne, on en déduit que $\text{rg}(A) = 3$. Donc A est inversible. Donc f est injective et surjective car f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

4. On admet que φ est linéaire. Déterminer la matrice de φ dans les bases canoniques.

Calculons les images de $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$ par φ . On a : $\varphi(1) = 1$, $\varphi(X) = 1$, $\varphi(X^2) = 1$

En notant $\mathcal{C}' = (1)$ la base canonique de $\mathbb{R}$, on conclut que $\text{mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Déterminer le noyau de φ .

Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. On a les équivalences suivantes :

$$P \in \text{Ker}(\varphi) \iff \varphi(P) = 0_{\mathbb{R}} \iff a + b + c = 0 \iff a = -b - c$$

Conclusion : $\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(X^2 - 1, X - 1)$

6. Déterminer $\text{Ker}(A' - 8I_3)$ et en déduire $\text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}_2[X]})$.

$$\text{Soit } B = A' - 8I_3. \text{ On a alors } B = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(B) \iff B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} 2y + z = 0 \\ -4y + 2z = 0 \\ -6z = 0 \end{cases} \iff y = z = 0.$$

Conclusion : $\text{Ker}(A' - 8I_3) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

Or $A' - 8I_3$ est la matrice canoniquement associée à $8f - 8\text{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$.

Donc : $\text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}) = \text{Ker}(8(f - \text{Id}_{\mathbb{R}_2[X]})) = \text{Ker}(8f - 8\text{Id}_{\mathbb{R}_2[X]})$.

Conclusion : $\text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}) = \text{Vect}(1_{\mathbb{R}_2[X]})$

7. De même déterminer $\text{Ker}\left(f - \frac{1}{2}\text{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right)$ et $\text{Ker}\left(f - \frac{1}{4}\text{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right)$.

Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}\left(A - \frac{1}{2}I_3\right) &\iff \left(A - \frac{1}{2}I_3\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\iff \left(A' - 4I_3\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\iff \begin{cases} 4x + 2y + z = 0 \\ 2z = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -2x \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc : $\text{Ker} \left(A - \frac{1}{2}I_3 \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Enfin, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker} \left(A - \frac{1}{4}I_3 \right) &\iff \left(A - \frac{1}{4}I_3 \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\iff \left(A' - 2I_3 \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\iff \begin{cases} 6x + 2y + z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{1}{6}(-2y - z) = \frac{z}{6} \\ y = -z \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker} \left(A - \frac{1}{4}I_3 \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$. Conclusion :

$\text{Ker} \left(f - \frac{1}{2} \text{Id}_{\mathbb{R}_2[X]} \right) = \text{Vect}(1 - 2X) \quad \text{et} \quad \text{Ker} \left(f - \frac{1}{4} \text{Id}_{\mathbb{R}_2[X]} \right) = \text{Vect} (1 - 6X + 6X^2).$
--

On pose $\mathcal{B} = (1, 1 - 2X, 1 - 6X + 6X^2)$.

8. Justifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

$\mathcal{B}$ est une famille de polynômes échelonnée en ses degrés. Donc $\mathcal{B}$ est libre.

De plus $\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$.

Conclusion : $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

9. Déterminer $D = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Posons $e_1 = 1, e_2 = 1 - 2X$ et $e_3 = 6X^2 - 6X + 1$. Par ce qui précède, $e_1 \in \text{Ker} (f - \text{Id}_{\mathbb{R}_2[X]})$ donc $f(e_1) - e_1 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ et donc $f(e_1) = e_1$.

De même $e_2 \in \text{Ker} (f - \frac{1}{2} \text{Id}_{\mathbb{R}_2[X]})$ et $e_3 \in \text{Ker} (f - \frac{1}{4} \text{Id}_{\mathbb{R}_2[X]})$. Ainsi, on a

$$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = \frac{1}{2}e_2, \quad f(e_3) = \frac{1}{4}e_3.$$

Conclusion :
 $D = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

10. On pose $Q = P_{\mathcal{E}, \mathcal{B}}$. Préciser Q et calculer Q^{-1} .

On pose $Q = P_{\mathcal{E}, \mathcal{B}}$. On a alors
 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
.

De plus, en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss, on obtient :

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 6L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow -3L_2 - 3L_3 \end{array} \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 6 & 0 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

Conclusion :
$$Q^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Donner une relation entre A , D , Q et Q^{-1} . En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par la formule de changement de base, on a

$$A = \text{mat}_{\mathcal{E}}(f) = P_{\mathcal{E}, \mathcal{B}} \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B}, \mathcal{E}} = QDQ^{-1}$$

Donc par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = QDQ^{-1}QDQ^{-1} \dots QDQ^{-1} = QDD \dots DQ^{-1} = QD^nQ^{-1}$$

La matrice D étant diagonale, on en déduit ainsi que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6 \times 4^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}.$$

12. Soient $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $f^n(P)$.

Soient $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\text{mat}_{\mathcal{E}}(f^n(P)) = \text{mat}_{\mathcal{E}}(f^n) \text{mat}_{\mathcal{E}}(P) = A^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) + c \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6 \times 4^n} \right) \\ \frac{b}{2^n} + c \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \right) \\ \frac{c}{4^n} \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$f^n(P) = a + b \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) + c \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6 \times 4^n} \right) + \left[\frac{b}{2^n} + c \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \right) \right] X + \frac{c}{4^n} X^2$$

13. Montrer alors que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) dt$.

Par la question précédente, pour tout $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi(f^n(P)) = a + b \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) + c \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6 \times 4^n} \right) + \frac{b}{2^n} + c \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \right) + \frac{c}{4^n}$$

Donc par passage à la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) = a + b \left(\frac{1}{2} - 0 \right) + c \left(\frac{1}{3} - 0 + 0 \right) + 0 + c(0 - 0) + 0 = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$$

D'autre part :

$$\int_0^1 P(t)dt = \int_0^1 (a + bt + ct^2) dt = \left[at + b\frac{t^2}{2} + c\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$$

Conclusion : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)dt.$

Partie 2 : On recommence avec de l'analyse

On pose

$$g : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$$

$$P \longmapsto \frac{1}{2} \left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right].$$

On admet que g est un automorphisme.

14. Montrer par récurrence l'assertion suivante :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall n \in \mathbb{N}, \quad g^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right).$$

Initialisation. Si $n = 0$, on a $g^0(P) = \text{Id}_{\mathbb{R}[X]}(P) = P$. D'autre part,

$$\frac{1}{2^0} \sum_{k=0}^{2^0-1} P\left(\frac{X+k}{2^0}\right) = \sum_{k=0}^0 P(X+k) = P(X) = P$$

Donc $g^0(P) = P$ et l'assertion est vraie pour $n = 0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons l'égalité vraie au rang n . On a alors

$$g^{n+1}(P) = g(g^n(P))$$

Donc par hypothèse de récurrence :

$$g^{n+1}(P) = g\left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} g\left(P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)\right) \quad \text{car } g \text{ est linéaire.}$$

Pour tout $k \in \llbracket 0; 2^n - 1 \rrbracket$, on a

$$g\left(P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)\right) = \frac{1}{2} \left[P\left(\frac{\frac{X}{2} + k}{2^n}\right) + P\left(\frac{\frac{X+1}{2} + k}{2^n}\right) \right] = \frac{1}{2} \left[P\left(\frac{X+2k}{2^{n+1}}\right) + P\left(\frac{X+2k+1}{2^{n+1}}\right) \right]$$

Alors,

$$g^{n+1}(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2} \left[P\left(\frac{X+2k}{2^{n+1}}\right) + P\left(\frac{X+2k+1}{2^{n+1}}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k}{2^{n+1}}\right)}_{\text{somme des termes pairs entre 1 et } 2^n} + \underbrace{\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k+1}{2^{n+1}}\right)}_{\text{somme des termes impairs entre 1 et } 2^n} \right)$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right).$$

Donc l'égalité est encore vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : $\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall n \in \mathbb{N}, \quad g^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$

15. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Déterminer : $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N P\left(\frac{k}{N}\right)$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Posons $\tilde{P}$ la fonction polynomiale associée. Alors $\tilde{P} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et en particulier $\tilde{P}$ est continue. On reconnaît une somme de Riemann sur $[a; b] = [0; 1]$:

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N P\left(\frac{k}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{P}\left(a + k \frac{b-a}{N}\right)$$

Ainsi, la suite converge et $\boxed{\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N P\left(\frac{k}{N}\right) = \int_0^1 P(t) dt}$

16. En déduire une expression de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi(g^n(P))$, où $\psi : \begin{matrix} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1) \end{matrix}$.

On vérifie facilement que la fonction ψ est linéaire. Donc par ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\psi(g^n(P)) = \psi\left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \psi\left(P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{1+k}{2^n}\right)$$

Par le glissement d'indice $\tilde{k} = k + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\psi(g^n(P)) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} P\left(\frac{k}{2^n}\right)$$

Posons pour tout $N \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N P\left(\frac{k}{N}\right)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\psi(g^n(P)) = u_{2^n}$.

La suite $(u_{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_N)_{N \in \mathbb{N}}$. On en déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi(g^n(P)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2^n} = \lim_{N \rightarrow +\infty} u_N$$

Finalement, d'après la question précédente, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi(g^n(P)) = \int_0^1 P(t) dt}$

PROBLÈME 2.

Soit f une fonction définie sur $[1; +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue, positive et décroissante sur $[1; +\infty[$. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = f(n), \quad S_n = \sum_{k=1}^n u_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} u_k, \quad I_n = \int_1^n f(t) dt \quad \text{et} \quad v_n = S_n - I_n.$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq S_n - I_n \leq u_1$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\forall t \in [n, n+1]$, $u_{n+1} = f(n+1) \leq f(t) \leq f(n) = u_n$.

Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \int_n^{n+1} u_{n+1} dt \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq \int_n^{n+1} u_n dt = u_n.$$

En sommant de 1 à n , on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n u_{k+1} \leq \sum_{k=1}^n \left(\int_k^{k+1} f(t) dt \right) \leq \sum_{k=1}^n u_k \iff S_{n+1} - u_1 \leq \int_1^{n+1} f(t) dt \leq S_n.$$

L'inégalité de gauche se réécrit lorsque $n \geq 2$: $S_n \leq u_1 + \int_1^n f(t) dt$

Cette inégalité reste vraie pour $n = 1$ (les deux membres valant $S_1 = u_1$). Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_1^{n+1} f(t) dt \leq S_n \leq u_1 + \int_1^n f(t) dt &\iff I_n + \int_n^{n+1} f(t) dt \leq S_n \leq u_1 + I_n \\ &\iff \int_n^{n+1} f(t) dt \leq S_n - I_n \leq u_1 \end{aligned}$$

Or, on a vu plus haut que $u_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(t) dt$ et f est positive donc $u_{n+1} = f(n+1) \geq 0$.

Finalement, on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq S_n - I_n \leq u_1$

2. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = S_n - I_n$ donc :

$$v_{n+1} - v_n = S_{n+1} - S_n - I_{n+1} + I_n = u_{n+1} - \int_1^{n+1} f(t) dt + \int_1^n f(t) dt = u_{n+1} - \int_n^{n+1} f(t) dt.$$

D'après la question précédente, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \geq 0 \quad \text{et} \quad v_{n+1} - v_n \leq 0$$

Ainsi, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0, donc d'après le théorème de convergence monotone,

la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

3. En déduire qu'il existe un réel λ tel que : $S_n = I_n + \lambda + o(1)$.

Posons $\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. On a alors $S_n - I_n = v_n = \lambda + o(1)$, d'où : $S_n = I_n + \lambda + o(1)$

4. On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(a) Montrer que les suites $(T_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(T_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Comme f est décroissante, u l'est aussi et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

- $T_{2(n+1)} - T_{2n} = T_{2n+2} - T_{2n} = (-1)^{2n+2-1} u_{2n+2} + (-1)^{2n+1-1} u_{2n+1} = u_{2n+1} - u_{2n+2} \geq 0$;
- $T_{2(n+1)+1} - T_{2n+1} = T_{2n+3} - T_{2n+1} = u_{2n+3} - u_{2n+2} \leq 0$ (reste vrai pour $n = 0$) ;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (T_{2n+1} - T_{2n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = 0$.

Ainsi, $(T_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, $(T_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et la différence tend vers 0, donc :

$(T_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(T_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

(b) Qu'en déduire pour la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^{n-1} u_n$?

Par le théorème des suites adjacentes, on en déduit que $(T_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(T_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite.

Donc que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, c'est-à-dire la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^{n-1} u_n$ converge.

5. Dans cette question, on pose $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha \in]0; 1[$.

(a) La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge-t-elle ?

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n^\alpha}$. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ est donc une série de Riemann et comme $\alpha \in]0; 1[$:

la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ diverge.

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, T_{2n} = S_{2n} - 2^{1-\alpha} S_n$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} T_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} u_k = \sum_{k=1}^n u_{2k-1} - \sum_{k=1}^n u_{2k} = \sum_{k=1}^n u_{2k-1} + \sum_{k=1}^n u_{2k} - 2 \sum_{k=1}^n u_{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} u_k - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^\alpha} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} u_k - 2 \frac{1}{2^\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} u_k - 2^{1-\alpha} \sum_{k=1}^n u_k \end{aligned}$$

On a bien montré $\forall n \in \mathbb{N}^*, T_{2n} = S_{2n} - 2^{1-\alpha} S_n$

(c) Calculer I_n et déduire des questions précédentes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n = (2^{1-\alpha} - 1) \left(\frac{1}{1-\alpha} - \lambda \right)$$

où λ est le réel introduit dans la question 3.

La fonction f vérifie toutes les hypothèses de l'énoncé : elle est définie sur $[1; +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue, positive, décroissante sur $[1; +\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$. Donc, d'après ce qui précède, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^{n-1} u_n$ converge. On a alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_{2n}.$$

D'après la question 3, on a $S_n = I_n + \lambda + o(1)$ avec ici :

$$I_n = \int_1^n f(t) dt = \int_1^n t^{-\alpha} dt = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^n = \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}.$$

Donc : $S_n = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} + \lambda + o(1)$ et $S_{2n} = \frac{(2n)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} + \lambda + o(1)$. Alors :

$$\begin{aligned} T_{2n} &= \frac{(2n)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} + \lambda + o(1) - 2^{1-\alpha} \left(\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} + \lambda + o(1) \right) \\ &= \frac{2^{1-\alpha} n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} + \lambda - \frac{2^{1-\alpha} n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + 2^{1-\alpha} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \lambda \right) + o(1) \\ &= (2^{1-\alpha} - 1) \left(\frac{1}{1-\alpha} - \lambda \right) + o(1) \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_{2n} = (2^{1-\alpha} - 1) \left(\frac{1}{1-\alpha} - \lambda \right)$, soit : $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n = (2^{1-\alpha} - 1) \left(\frac{1}{1-\alpha} - \lambda \right)$