Géométrie de l'espace

I Repérage, produit scalaire, produit mixte

Exercice 1 : Les coordonnées GPS de Brest sont :

$$48° \; 23' \; 25.418'' \, \mathrm{N} \quad \text{et} \quad 4° \; 29' \; 9.874'' \, \mathrm{W}.$$

Ainsi, les coordonnées GPS de Brest sont : $\begin{cases} \text{Latitude :} & 48,390394° \\ \text{Longitude :} & -4,486076° \end{cases}$

Les coordonnées GPS de Nouméa sont :

$$22° \; 16' \; 32.88'' \, \mathrm{S} \quad \text{et} \quad 166° \; 27' \; 28.8'' \, \mathrm{E}.$$

Ainsi, les coordonnées GPS de Nouméa sont : $\begin{cases} \text{Latitude :} & -22,275778° \\ \text{Longitude :} & 166,458° \end{cases}$

Les résultats seront arrondis au km.

On rappelle le rayon de la terre : $6371\,km$.

1. Vérifier que les coordonnées cartésiennes des villes de Brest et Nouméa sont :

$$\mathrm{B}\,(4218\,;-331\,;4764) \quad \text{et} \quad \mathrm{N}\,(-5732\,;1380\,;-2415)\,.$$

2. On nomme O le centre de la terre.

   Calculer $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ON}}$.

   En déduire une valeur approchée au degré près, de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$

3. En déduire la distance Brest-Nouméa, arrondie au km.

Exercice 2 : Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ quatre points de l'espace tels que (AB) et (CD) sont sécantes en I.

Déterminer le lieu des points M vérifiant $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{MB}} = \overrightarrow{\mathrm{MC}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{MD}}$.

Exercice 3 : (Questions indépendantes)

1. Soient $\vec{a}\,(2\,;3\,;-1)$ et $\vec{b}\,(1\,;4\,;-2)$. Calculer $\vec{a} \wedge \vec{b}$ et $(\vec{a}+\vec{b}) \wedge (\vec{a}-\vec{b})$.
2. Soient $\vec{a}\,(3\,;-1\,;2)$, $\vec{b}\,(2\,;1\,;-1)$ et $\vec{c}\,(1\,;-2\,;2)$.

   Calculer $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$ et $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$. Conclusion ?
3. Déterminer un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{a}\,(2\,;-6\,;-3)$ et $\vec{b}\,(4\,;3\,;-1)$.

Exercice 4 : Soient $\vec{a}\,(1\,;1\,;2)$, $\vec{b}\,(3\,;2\,;2)$ et $\vec{c}\,(1\,;-1\,;m)$ où $m \in \mathbb{R}$.

Pour quelles valeurs de m les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 5 : Dans une base orthonormée directe, on considère $\vec{u}\,(1\,;0\,;\lambda)$, $\vec{v}\,(\mu\,;2\,;3)$ et $\vec{w}\,(0\,;1\,;1)$.

Déterminer une CNS sur λ et μ pour que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient coplanaires.

Exercice 6 : On se place dans $(\mathrm{O}; \vec{i}; \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

1. Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ quatre vecteurs de l'espace.

(a) Montrer la formule du double produit vectoriel :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{c}.$$

(b) Montrer que :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = [\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}]\vec{b} - [\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}]\vec{a} = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}]\vec{c} - [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]\vec{d}.$$

2. Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

   Calculer $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2$

II Droites et plans

Exercice 7 (Plan médiateur) : Soient A, B deux points distincts de $\mathscr{E}$ et I le milieu du segment [AB].

Montrer que le lieu des points équidistants de A et B est le plan passant par I et orthogonal à (AB).

Ce plan est appelé *plan médiateur* du segment [AB].

Exercice 8 : Déterminer pour chacun des plans une équation cartésienne.

Soient $A(1;2;0)$, $B(-1;3;1)$, $C(0,0,1)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Le plan (ABC).
2. $\mathcal{P}$ passant par l'origine et de vecteur normal $\vec{n}$.
3. Le plan médiateur de [AB].

Exercice 9 : Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection de deux plans sécants :

1. $(\mathscr{P}): \ x - 3y + 2z - 5 = 0$ et $(\mathscr{P}'): \ 2x + y + 7z - 1 = 0$.
2. $(\mathscr{P}): \ x + y - z = 0$ et $(\mathscr{P}'): \ 2x - y - z - 1 = 0$.
3. $(\mathscr{P}): \ x + y + 2z - 3 = 0$ et $(\mathscr{P}'): \ -x + 4y - 5z + 6 = 0$.
4. $(\mathscr{P}): \ x - 2z - 1 = 0$ et $(\mathscr{P}'): \ y - 2z + 4 = 0$.
5. $(\mathscr{P}): \ 2x - y - 2z - 1 = 0$ et $(\mathscr{P}'): \ -x + 4y + z - 3 = 0$.

Exercice 10 : Déterminer l'intersection des plans $(\mathscr{P})$, $(\mathscr{Q})$ et $(\mathscr{R})$ avec :

1. $(\mathscr{P}): \ 3x + 3y + z + 2 = 0$, $(\mathscr{Q}): \ y + z - 5 = 0$ et $(\mathscr{R}): \ 2z - 8 = 0$.
2. $(\mathscr{P}): \ 4x + 3y + z + 2 = 0$, $(\mathscr{Q}): \ x + 2y + z - 5 = 0$ et $(\mathscr{R}): \ 3x + 5y + 2z - 9 = 0$.

Exercice 11 : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

1. Déterminer un paramétrage puis un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ donnée par le système d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} 2x + y - 4z = 6 \\ x - y + 3z = 2 \end{cases}$$

2. Déterminer un système d'équations cartésiennes et un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}'$ l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ tels que :

   - $\mathcal{P}$ passe par $A(1, 1, 0)$ et est normal au vecteur $\vec{u}(1, 0, -2)$.

- $\mathcal{P}'$ passe par B$(2,0,1)$ et est dirigé par les vecteurs $\vec{v}(2,2,2)$ et $\vec{w}(3,1,1)$.

3. Soit δ l'intersection des plans d'équations $x-z-2=0$ et $y=z-1$.

   $\mathcal{D}'$ et δ sont-elles coplanaires ?

Exercice 12 : Soit $(\mathscr{D}) = \mathrm{A} + \operatorname{vect}\vec{u}$ où $\mathrm{A}\,(0\,;1\,;2)$ et $\vec{u}\,(-1\,;1\,;1)$.

Soit $(\mathscr{P})$ le plan passant par $\mathrm{A}\,(5\,;1\,;-2)$, dirigé par les vecteurs $\vec{v}\,(1\,;1\,;0)$ et $\vec{w}\,(3\,;4\,;-1)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de $(\mathscr{D})$ et de $(\mathscr{P})$.
2. Déterminer une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ et un système d'équations cartésiennes de $(\mathscr{D})$.
3. Montrer que $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$ ne sont pas parallèles. Déterminer $(\mathscr{D}) \cap (\mathscr{P})$.

Exercice 13 : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Donner une CNS sur λ pour que les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}_\lambda)$ d'équations respectives

$$(\mathscr{D}) : \begin{cases} x-2z-1=0 \\ y-z-1=0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (\mathscr{D}_\lambda) : \begin{cases} x+y+z=2 \\ x-2y+2z=\lambda \end{cases}$$

soient coplanaires.

Dans ce cas, donner une équation du plan qui les contient.

Exercice 14 : Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le plan $(\mathrm{P}_\lambda) : 2\lambda x+(\lambda+1)y-3(\lambda-1)z+2\lambda+4=0$.

Montrer que ces plans contiennent tous une même droite $(\mathscr{D})$.

Exercice 15 : On considère le plan $(\mathscr{P})$ d'équation $3x+y-z-2=0$.

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $\mathrm{A}\,(5\,;1\,;3)$ sur le plan $(\mathscr{P})$.

Exercice 16 : Déterminer le projeté orthogonal de $\mathrm{M}\,(4\,;8\,;0)$ sur le plan $(\mathscr{P}) : x+3y+2z=0$.

Exercice 17 : Soient $\mathrm{A}\,(0\,;2\,;-1)$ et $\mathrm{B}\,(4\,;4\,;3)$.

Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur de [AB].

Exercice 18 : On considère trois points de l'espace $\mathrm{F}\,(0\,;-1\,;1)$, $\mathrm{G}\,(2\,;-1\,;3)$ et $\mathrm{H}\,(4\,;-5\,;3)$ et un plan $(\mathscr{P})$ d'équation $x-y+2z+3=0$.

1. Déterminer les coordonnées des points P, Q et R, projetés orthogonaux respectifs des points F, G et H sur le plan P.
2. Calculer $\overrightarrow{\mathrm{FG}}.\overrightarrow{\mathrm{FH}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}.\overrightarrow{\mathrm{PR}}$.
3. Peut-on dire que la projection orthogonale conserve les angles ? Justifier.

Exercice 19 : Déterminer la distance du point $\mathrm{M}\,(-1\,;-1\,;2)$:

1. Au plan $(\mathscr{P}) : 5x-3y+z=1$.
2. À la droite $(\mathscr{P}) \cap (\mathscr{P}')$ où $(\mathscr{P}') : y+3z=3$.

III Sphères

Exercice 20 : Déterminer une équation cartésienne de la sphère dans chacun des cas suivants :

1. Sphère de centre $\Omega\,(-2\,;0\,;1)$ et de rayon 3.
2. Sphère de diamètre [AB] où $\mathrm{A}\,(1\,;-1\,;2)$ et $\mathrm{B}\,(0\,;2\,;-2)$.
3. Sphère passant par O, de centre $\mathrm{A}\,(-8\,;6\,;2)$.
4. Sphère passant par O, $\mathrm{A}\,(2\,;1\,;0)$, $\mathrm{B}\,(0\,;3\,;5)$ et $\mathrm{C}\,(4\,;0\,;4)$.

5. Sphère passant par A $(2;3;5)$, B $(1;1;2)$, C $(3;-2;4)$ et dont le centre appartient au plan d'équation $x+y+z=10$.
6. Sphère tangente au plan d'équation cartésienne $x+y+z=6$ et de centre $\Omega\,(3;4;5)$.

Exercice 21 : Déterminer l'intersection des courbes suivantes :

1. $\mathrm{S} : x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$ et $\mathrm{P} : x-2y+z-2=0$.
2. $\mathrm{P} : 2x+y-4z=6$ et $\mathrm{R} : x-y+3z=2$.
3. $\mathcal{Q}$ le plan passant par $\mathrm{A}(1,-1,0)$ et dirigé par $\vec{u}(2,1,-1)$ et $\vec{v}(1,4,1)$.

   $\mathcal{D}$ la droite passant par $\mathrm{B}(1,-1,2)$ et dirigée par $\vec{w}(1,1,2)$.

Exercice 22 : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Déterminer une équation de la sphère de centre $\Omega(1,0,1)$ et tangente au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y+z-1=0$.

Exercice 23 : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

1. Reconnaitre les deux courbes données, et déterminer leur intersection :

   a) $\mathrm{S} : x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$ et $\mathrm{P} : x-2y+z-2=0$.

   b) $\mathrm{S}' : x^2+y^2+z^2-2x-3=0$ et $\mathrm{Q} : x+y-2z-2=0$.

   c) $\mathrm{P} : 5x-2y=7$ et $\mathrm{P}' : -x+3y-z-1=0$.

   d) $\mathrm{S}'' : x^2+y^2+z^2-2x-y+z-3=0$ et $\delta : \begin{cases} x=-1+2t \\ y=2t \\ z=1-3t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

2. Soit $\mathcal{Q}$ le plan passant par $\mathrm{A}(1,-1,0)$ et dirigé par $\vec{u}(2,1,-1)$ et $\vec{v}(1,4,1)$.

   Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $\mathrm{B}(1,-1,2)$ et dirigée par $\vec{w}(1,1,2)$.

   Déterminer $\mathcal{Q}\cap\mathcal{D}$.