Géométrie de l'espace

I Repérage, produit scalaire, produit mixte

Exercice 1 : Les coordonnées GPS de Brest sont :

$$48^\circ\ 23'\ 25.418''\,\mathrm{N} \quad \text{et} \quad 4^\circ\ 29'\ 9.874''\,\mathrm{W}.$$

Ainsi, les coordonnées GPS de Brest sont : $\begin{cases} \text{Latitude :} & 48,390394^\circ \\ \text{Longitude :} & -4,486076^\circ \end{cases}$

Les coordonnées GPS de Nouméa sont :

$$22^\circ\ 16'\ 32.88''\,\mathrm{S} \quad \text{et} \quad 166^\circ\ 27'\ 28.8''\,\mathrm{E}.$$

Ainsi, les coordonnées GPS de Nouméa sont : $\begin{cases} \text{Latitude :} & -22,275778^\circ \\ \text{Longitude :} & 166,458^\circ \end{cases}$

Les résultats seront arrondis au km.

On rappelle le rayon de la terre : $6371\,km$.

1. Vérifier que les coordonnées cartésiennes des villes de Brest et Nouméa sont :

$$\mathrm{B}\,(4218\,;-331\,;4764) \quad \text{et} \quad \mathrm{N}\,(-5732\,;1380\,;-2415)\,.$$

2. On nomme O le centre de la terre.

   Calculer $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}}$.

   En déduire une valeur approchée au degré près, de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$

3. En déduire la distance Brest-Nouméa, arrondie au km.

Exercice 2 : Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ quatre points de l'espace tels que (AB) et (CD) sont sécantes en I.

Déterminer le lieu des points M vérifiant $\overrightarrow{\mathrm{MA}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\overrightarrow{\mathrm{MC}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{MD}}$.

Correction : *Sans calcul, $\overrightarrow{\mathrm{MA}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ est orthogonal au plan (MAB), $\overrightarrow{\mathrm{MC}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{MD}}$ est orthogonal au plan (MCD).*

On cherche donc les points M pour que les plans (MAB) et (MCD) soient parallèles. Strictement parallèle est exclus, puisqu'ils ont M en commun.

On cherche donc les points M tels que les plans (MAB) et (MCD) soient confondus : c'est le plan contenant les droites (AB) et (CD) donc le plan (AIC).

Exercice 3 : (Questions indépendantes)

1. Soient $\vec{a}\,(2\,;3\,;-1)$ et $\vec{b}\,(1\,;4\,;-2)$. Calculer $\vec{a}\wedge\vec{b}$ et $(\vec{a}+\vec{b})\wedge(\vec{a}-\vec{b})$.
2. Soient $\vec{a}\,(3\,;-1\,;2)$, $\vec{b}\,(2\,;1\,;-1)$ et $\vec{c}\,(1\,;-2\,;2)$.

   Calculer $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}$ et $\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})$. Conclusion ?

3 Déterminer un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{a}\,(2\,;-6\,;-3)$ et $\vec{b}\,(4\,;3\,;-1)$.

Exercice 4 : Soient $\vec{a}\,(1\,;1\,;2)$, $\vec{b}\,(3\,;2\,;2)$ et $\vec{c}\,(1\,;-1\,;m)$ où $m \in \mathbb{R}$.

Pour quelles valeurs de m les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 5 : Dans une base orthonormée directe, on considère $\vec{u}\,(1\,;0\,;\lambda)$, $\vec{v}\,(\mu\,;2\,;3)$ et $\vec{w}\,(0\,;1\,;1)$.

Déterminer une CNS sur λ et μ pour que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient coplanaires.

Exercice 6 : On se place dans $(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

1 Soient $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ quatre vecteurs de l'espace.

(a) Montrer la formule du double produit vectoriel :

$$\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c}.$$

(b) Montrer que :

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{c}\wedge\vec{d}) = [\vec{a},\vec{c},\vec{d}]\vec{b} - [\vec{b},\vec{c},\vec{d}]\vec{a} = [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d}.$$

2 Soient $\vec{u},\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

Calculer $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 + \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2$

II Droites et plans

Exercice 7 (Plan médiateur) : Soient A, B deux points distincts de $\mathscr{E}$ et I le milieu du segment [AB].

Montrer que le lieu des points équidistants de A et B est le plan passant par I et orthogonal à (AB).

Ce plan est appelé *plan médiateur* du segment [AB].

Exercice 8 : Déterminer pour chacun des plans une équation cartésienne.

Soient $\mathrm{A}(1;2;0)$, $\mathrm{B}(-1;3;1)$, $\mathrm{C}(0,0,1)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1 Le plan (ABC).

2 $\mathcal{P}$ passant par l'origine et de vecteur normal $\vec{n}$.

3 Le plan médiateur de [AB].

Exercice 9 : Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection de deux plans sécants :

1 $(\mathscr{P}) :\ x-3y+2z-5=0$ et $(\mathscr{P}') :\ 2x+y+7z-1=0$.

2 $(\mathscr{P}) :\ x+y-z=0$ et $(\mathscr{P}') :\ 2x-y-z-1=0$.

3 $(\mathscr{P}) :\ x+y+2z-3=0$ et $(\mathscr{P}') :\ -x+4y-5z+6=0$.

4 $(\mathscr{P}) :\ x-2z-1=0$ et $(\mathscr{P}') :\ y-2z+4=0$.

5 $(\mathscr{P}) :\ 2x-y-2z-1=0$ et $(\mathscr{P}') :\ -x+4y+z-3=0$.

Correction :

1 Les vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix}$ de $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ ne sont pas colinéaires donc les plans sont sécants en une droite $(\mathscr{D})$.

L'idée est toujours la même : traduire au niveau des coordonnées les propriétés d'un point quelconque de la droite.

$$\mathrm{M}(x\,;y\,;z)\in(\mathscr{D}) \iff \begin{cases}\mathrm{M}\in(\mathscr{P})\\ \mathrm{M}\in(\mathscr{P}')\end{cases} \iff \begin{cases}x-3y+2z-5=0 & (\mathrm{L}_1)\\ 2x+y+7z-1=0 & (\mathrm{L}_2)\end{cases}$$

Étant donné que c'est un système à 3 inconnues pour deux équations, nous ne trouverons pas une solution unique. On exprime deux des inconnues en fonction de la troisième qui jouera le rôle du paramètre.

$$\begin{cases}7x+23z-8=0 & (\mathrm{L}_1)+3\times(\mathrm{L}_2)\\ 7y+3z+9=0 & (\mathrm{L}_2)-2\times(\mathrm{L}_1)\end{cases} \iff \begin{cases}x=\dfrac{8}{7}-\dfrac{23}{7}z\\ y=-\dfrac{9}{7}-\dfrac{3}{7}z\end{cases}$$

En posant $z=t$, une représentation de $(\mathscr{D})$ peut être :

$$(\mathscr{D}):\begin{cases}x=\dfrac{8}{7}-\dfrac{23}{7}t\\ y=-\dfrac{9}{7}-\dfrac{3}{7}t\\ z=t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$$

2 Idem...

Exercice 10 : Déterminer l'intersection des plans $(\mathscr{P})$, $(\mathscr{Q})$ et $(\mathscr{R})$ avec :

1. $(\mathscr{P}):\ 3x+3y+z+2=0$, $(\mathscr{Q}):\ y+z-5=0$ et $(\mathscr{R}):\ 2z-8=0$.
2. $(\mathscr{P}):\ 4x+3y+z+2=0$, $(\mathscr{Q}):\ x+2y+z-5=0$ et $(\mathscr{R}):\ 3x+5y+2z-9=0$.

Exercice 11 : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$.

1. Déterminer un paramétrage puis un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ donnée par le système d'équations cartésiennes
$$\begin{cases}2x+y-4z=6\\ x-y+3z=2\end{cases}$$
2. Déterminer un système d'équations cartésiennes et un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}'$ l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ tels que :
   - $\mathcal{P}$ passe par $A(1,1,0)$ et est normal au vecteur $\vec{u}(1,0,-2)$.
   - $\mathcal{P}'$ passe par $B(2,0,1)$ et est dirigé par les vecteurs $\vec{v}(2,2,2)$ et $\vec{w}(3,1,1)$.
3. Soit δ l'intersection des plans d'équations $x-z-2=0$ et $y=z-1$.

   $\mathcal{D}'$ et δ sont-elles coplanaires ?

Exercice 12 : Soit $(\mathscr{D})=\mathrm{A}+\operatorname{vect}\vec{u}$ où $\mathrm{A}\,(0\,;1\,;2)$ et $\vec{u}\,(-1\,;1\,;1)$.

Soit $(\mathscr{P})$ le plan passant par $\mathrm{A}\,(5\,;1\,;-2)$, dirigé par les vecteurs $\vec{v}\,(1\,;1\,;0)$ et $\vec{w}\,(3\,;4\,;-1)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de $(\mathscr{D})$ et de $(\mathscr{P})$.
2. Déterminer une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ et un système d'équations cartésiennes de $(\mathscr{D})$.
3. Montrer que $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$ ne sont pas parallèles. Déterminer $(\mathscr{D})\cap(\mathscr{P})$.

Exercice 13 : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Donner une CNS sur λ pour que les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}_\lambda)$ d'équations respectives

$$(\mathscr{D}) : \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (\mathscr{D}_\lambda) : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y + 2z = \lambda \end{cases}$$

soient coplanaires.

Dans ce cas, donner une équation du plan qui les contient.

Exercice 14 : Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le plan $(\mathrm{P}_\lambda) : 2\lambda x + (\lambda+1)y - 3(\lambda-1)z + 2\lambda + 4 = 0$.

Montrer que ces plans contiennent tous une même droite $(\mathscr{D})$.

Exercice 15 : On considère le plan $(\mathscr{P})$ d'équation $3x + y - z - 2 = 0$.

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $\mathrm{A}\,(5\,;1\,;3)$ sur le plan $(\mathscr{P})$.

Correction : $\mathrm{H}\,(2\,;0\,;4)$.

Exercice 16 : Déterminer le projeté orthogonal de $\mathrm{M}\,(4\,;8\,;0)$ sur le plan $(\mathscr{P})$: $x + 3y + 2z = 0$.

Exercice 17 : Soient $\mathrm{A}\,(0\,;2\,;-1)$ et $\mathrm{B}\,(4\,;4\,;3)$.

Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur de [AB].

Exercice 18 : On considère trois points de l'espace $\mathrm{F}\,(0\,;-1\,;1)$, $\mathrm{G}\,(2\,;-1\,;3)$ et $\mathrm{H}\,(4\,;-5\,;3)$ et un plan $(\mathscr{P})$ d'équation $x - y + 2z + 3 = 0$.

1. Déterminer les coordonnées des points P, Q et R, projetés orthogonaux respectifs des points F, G et H sur le plan P.
2. Calculer $\overrightarrow{\mathrm{FG}}.\overrightarrow{\mathrm{FH}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}.\overrightarrow{\mathrm{PR}}$.
3. Peut-on dire que la projection orthogonale conserve les angles ? Justifier.

Exercice 19 : Déterminer la distance du point $\mathrm{M}\,(-1\,;-1\,;2)$:

1. Au plan $(\mathscr{P})$: $5x - 3y + z = 1$.
2. À la droite $(\mathscr{P}) \cap (\mathscr{P}')$ où $(\mathscr{P}')$: $y + 3z = 3$.

III Sphères

Exercice 20 : Déterminer une équation cartésienne de la sphère dans chacun des cas suivants :

1. Sphère de centre $\Omega\,(-2\,;0\,;1)$ et de rayon 3.
2. Sphère de diamètre [AB] où $\mathrm{A}\,(1\,;-1\,;2)$ et $\mathrm{B}\,(0\,;2\,;-2)$.
3. Sphère passant par O, de centre $\mathrm{A}\,(-8\,;6\,;2)$.
4. Sphère passant par O, $\mathrm{A}\,(2\,;1\,;0)$, $\mathrm{B}\,(0\,;3\,;5)$ et $\mathrm{C}\,(4\,;0\,;4)$.
5. Sphère passant par $\mathrm{A}\,(2\,;3\,;5)$, $\mathrm{B}\,(1\,;1\,;2)$, $\mathrm{C}\,(3\,;-2\,;4)$ et dont le centre appartient au plan d'équation $x + y + z = 10$.
6. Sphère tangente au plan d'équation cartésienne $x + y + z = 6$ et de centre $\Omega\,(3\,;4\,;5)$.

Exercice 21 : Déterminer l'intersection des courbes suivantes :

1. $\mathrm{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$ et $\mathrm{P} : x - 2y + z - 2 = 0$.
2. $\mathrm{P} : 2x + y - 4z = 6$ et $\mathrm{R} : x - y + 3z = 2$.

3 $\mathcal{Q}$ le plan passant par $A(1,-1,0)$ et dirigé par $\vec{u}(2,1,-1)$ et $\vec{v}(1,4,1)$.

$\mathcal{D}$ la droite passant par $B(1,-1,2)$ et dirigée par $\vec{w}(1,1,2)$.

Exercice 22 : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Déterminer une équation de la sphère de centre $\Omega(1,0,1)$ et tangente au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y+z-1=0$.

Exercice 23 : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

1 Reconnaitre les deux courbes données, et déterminer leur intersection :

(a) $S : x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$ et $P : x-2y+z-2=0$.

(b) $S' : x^2+y^2+z^2-2x-3=0$ et $Q : x+y-2z-2=0$.

(c) $P : 5x-2y=7$ et $P' : -x+3y-z-1=0$.

(d) $S'' : x^2+y^2+z^2-2x-y+z-3=0$ et $\delta : \begin{cases} x=-1+2t \\ y=2t \\ z=1-3t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

2 Soit $\mathcal{Q}$ le plan passant par $A(1,-1,0)$ et dirigé par $\vec{u}(2,1,-1)$ et $\vec{v}(1,4,1)$.

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $B(1,-1,2)$ et dirigée par $\vec{w}(1,1,2)$.

Déterminer $\mathcal{Q}\cap\mathcal{D}$.

Index