

XXXI

Géométrie du plan

Qu'est-ce qu'un ours cartésien ?

Un ours polaire ... après changement de coordonnées !

Contenu

I. Repérage des points et des vecteurs du plan	1
I.1 Repères cartésiens	1
I.2 Coordonnées polaires	3
II. Produit scalaire	5
II.1 Généralités	5
II.2 Produit scalaire et projection orthogonale	6
II.3 Expressions du produit scalaire	7
II.4 Propriétés algébriques	9
III. Produit mixte	10
III.1 Expressions du produit mixte	11
III.2 Interprétation géométrique du produit mixte	12
III.3 Propriétés algébriques	13
IV. Droites du plan	14
IV.1 Vecteur directeur d'une droite	14
IV.2 Équations paramétriques de droites	15
IV.3 Équations cartésiennes d'une droite	15
IV.4 Équation réduite d'une droite	19
IV.5 Distance d'un point à une droite	20
V. Cercles du plan	23
V.1 Équations cartésiennes de cercles	23
V.2 Intersection d'une droite et d'un cercle	25
V.3 Intersection de deux cercles	26

Dans tout le chapitre, on note $\vec{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan et $\mathcal{P}$ l'ensemble des points du plan. Tous deux seront désignés par le terme de plan : vectoriel ou affine c'est selon.

I REPÉRAGE DES POINTS ET DES VECTEURS DU PLAN

I.1 Repères cartésiens

Définition I :

- On appelle *base* du plan $\vec{\mathcal{P}}$ tout couple de vecteurs $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ étant non colinéaires. Tout vecteur $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$ s'écrit alors de manière unique sous la forme

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \text{ où } (x; y) \in \mathbb{R}^2. \quad (\text{XXXI.1})$$

- On appelle *repère* (cartésien ou affine) du plan $\mathcal{P}$ tout triplet $\mathcal{R} = (\text{O}; \vec{i}; \vec{j})$, où O est un point du plan $\mathcal{P}$. On l'appelle alors *origine* du repère.

Remarque : $\vec{u}$ est donc une *combinaison linéaire* des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

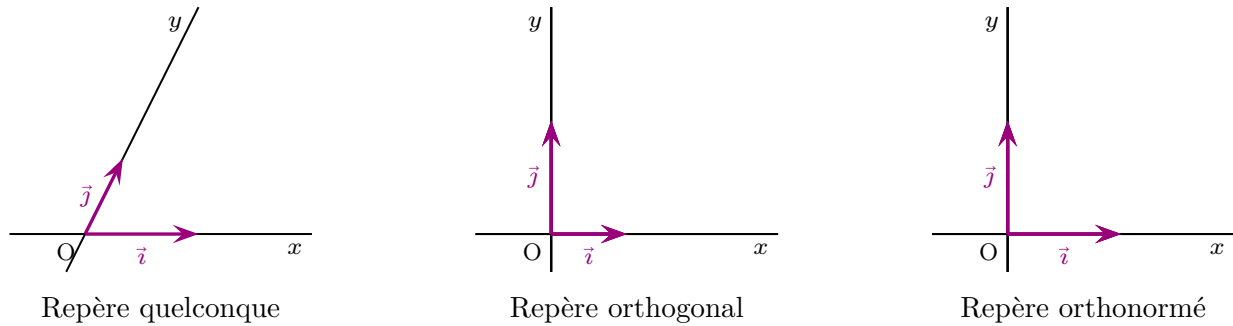


Figure XXXI.1 – Repères du plan.

Cas particuliers :

- Le repère et la base sont dits *orthogonaux* si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux. Ceci sous-entend l'existence d'un produit scalaire.

Si de plus, les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont unitaires (ou de norme égale à 1) alors le repère et la base sont dits *orthonormés* ou orthonormaux. Ceci sous-entend l'existence d'une norme.

- Dans ce dernier cas, si on a défini une orientation du plan, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{R}$ sont dits :

- ◊ directs si $(\vec{i}; \vec{j}) \equiv +\frac{\pi}{2} [2\pi]$.
- ◊ indirects si $(\vec{i}; \vec{j}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Dans tous les exercices de ce chapitre et sauf mention contraire, on se placera dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé direct du plan $\mathcal{P}$.

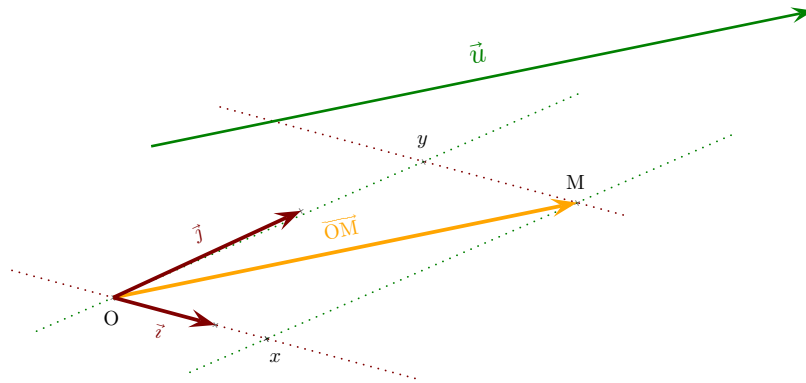


Figure XXXI.2 – Coordonnées de vecteurs et de points dans le plan.

En particulier, pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ se décompose de manière unique dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \text{ où } (x; y) \in \mathbb{R}^2. \quad (\text{XXXI.2})$$

Définition 2 (Coordonnées cartésiennes) :

- Soient $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$ une base du plan $\vec{\mathcal{P}}$ et $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$.

On appelle *coordonnées* du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$, notées $\vec{u}(x; y)_{\mathcal{B}}$ ou $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, le couple $(x; y)$ de la décomposition (XXXI.1).

- On appelle *coordonnées* du point M dans le repère $\mathcal{R}$, notées $M(x; y)_{\mathcal{B}}$ ou $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, le couple $(x; y)$ de la décomposition (XXXI.2).

ATTENTION | Les coordonnées dépendent de la base et/ou du repère choisis.

Rappel I (Coordonnées de vecteurs) : Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$ une base du plan $\vec{\mathcal{P}}$.

- Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

- $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et, dans un repère orthonormé :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

- Si I est le milieu de [AB] alors $I \left(\frac{x_B + x_A}{2}; \frac{y_B + y_A}{2} \right)$.

Exercice 1 : Soit ABCD un carré de centre O et G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Donner les coordonnées des points A, B, C, D, O et G dans :

1 $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

2 $(B; \overrightarrow{BG}; \overrightarrow{AO})$

I.2 Coordonnées polaires

Définition 3 : Soit M un point de $\mathcal{P}$.

On appelle *coordonnées polaires* de M, notées $[\rho; \theta]$ tout couple de réels $(\rho; \theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \cos(\theta) \vec{i} + \rho \sin(\theta) \vec{j}.$$

Le point O est alors appelé le *pôle* du repère.

Remarques :

- Si $M \neq O$, on peut prendre $\rho = OM$ et $\theta = (\vec{i}; \overrightarrow{OM})$ $[2\pi]$.
- Si $M = O$, $\rho = 0$ suffit à repérer le point M.

Exercice 2 : Représenter les points $A \left[2; \frac{\pi}{3} \right]$, $B \left[1; \frac{13\pi}{6} \right]$, $C \left[-3; \frac{\pi}{4} \right]$ et $D \left[3; \frac{5\pi}{4} \right]$.

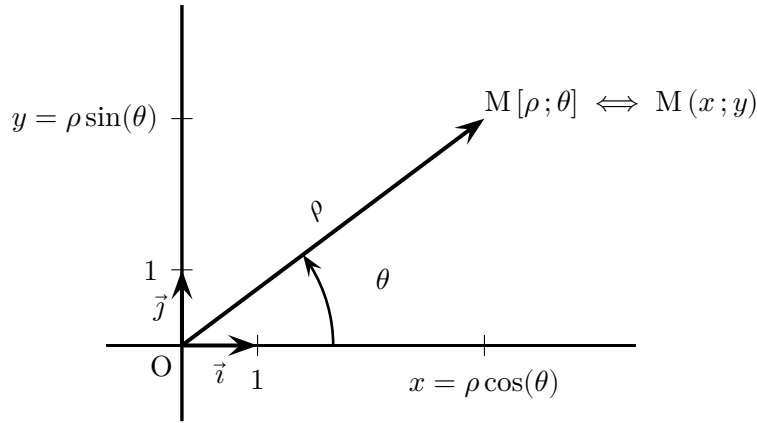


Figure XXXI.3 – Coordonnées polaires et cartésiennes d'un point.

Proposition 1 (Formules de passage) : Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan. Soit $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées cartésiennes $(x; y)$ et de coordonnées polaires $[\rho; \theta]$.

On a alors :

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

Et pour $M \neq O$, on a alors (par exemple) :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et } \theta \text{ défini par } \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{\rho} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{\rho} \end{cases}$$

Exemple 1 : $(2; 2) \equiv [2\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}] \equiv [-2\sqrt{2}; \frac{5\pi}{4}]$.

Définition 4 (Repère polaire) : Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\vec{u}_\theta = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$ et $\vec{v}_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}$.

La *base polaire* associée à l'angle θ est le couple $(\vec{u}_\theta; \vec{v}_\theta)$.

Dans cette base $(\vec{u}_\theta; \vec{v}_\theta)$, on a $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\theta$.

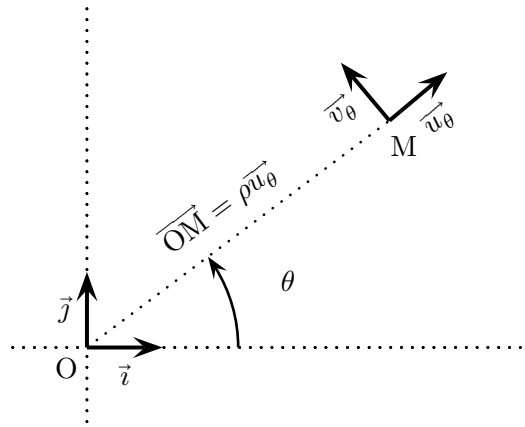


Figure XXXI.4 – Repère polaire.

II PRODUIT SCALAIRE

Où va un angle quand il est malade ?
- Chez le vecteur.

II.1 Généralités

Rappel 2 (Norme d'un vecteur de $\vec{\mathcal{P}}$) :

- Soit $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$ et deux points A et B de $\mathcal{P}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.
- Soit $(\vec{i}; \vec{j})$ une base orthonormée et $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ où $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Définition 5 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan $\vec{\mathcal{P}}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, on appelle *produit scalaire* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ qui se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ », le réel défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}). \quad (\text{P.S 1})$$

- Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ sont nuls, on pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Remarque : Comme la fonction $\cos$ est paire, le produit scalaire ne dépend pas de l'orientation du plan.

Corollaire II (Mesure d'un angle) : Si $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$ alors $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$.

Rappel 3 (Vecteurs colinéaires et alignement) :

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ ou si l'un d'eux est nul.
- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- Trois points A, B et C sont alignés $\iff \exists k \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

Proposition 2 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\vec{\mathcal{P}}$.

- 1 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- 2 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens si, et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire si, et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Remarque : Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs du plan.

Preuve : Tout découle de la définition et de la relation (P.S 1). En effet, pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}).$$

- 1 Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, leur norme non plus et

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff (\vec{u}; \vec{v}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \iff \vec{u} \perp \vec{v}.$$

- 2 Pour la même raison, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \iff (\vec{u}; \vec{v}) \equiv 0 [2\pi]$ i.e. les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens.

Et, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \iff (\vec{u}; \vec{v}) \equiv \pi [2\pi]$ i.e. les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire.

II.2 Produit scalaire et projection orthogonale

Proposition 3 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\vec{\mathcal{P}}$.

Soit O un point du plan $\mathcal{P}$ et soient A, B de $\mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

On note H le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA) alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = \begin{cases} OA \times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens.} \\ -OA \times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraire.} \end{cases}$$

Preuve : Reprenons les notations de l'énoncé.

On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB}) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HB}.$$

Or, $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HB} = 0$.

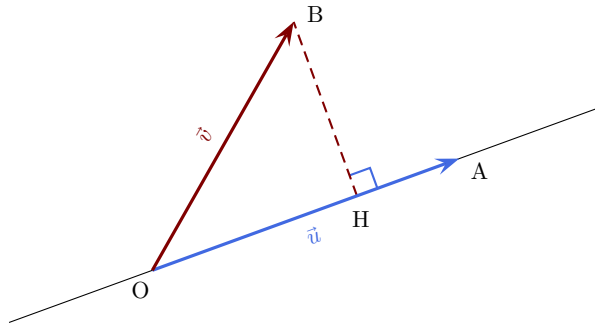
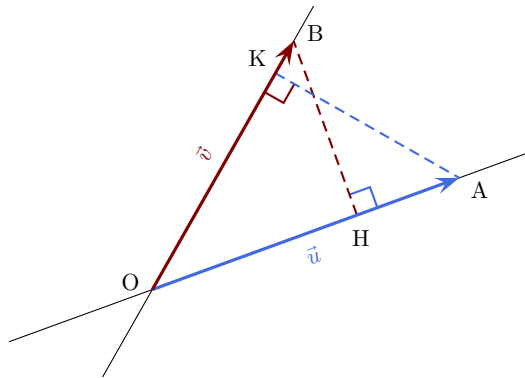


Figure XXXI.5 – Produit scalaire et projection orthogonale.

De plus, $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = \pm OA \times OH$.

La proposition (2) donne alors le résultat escompté.

Figure XXXI.6 – $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OB}$.

II.3 Expressions du produit scalaire

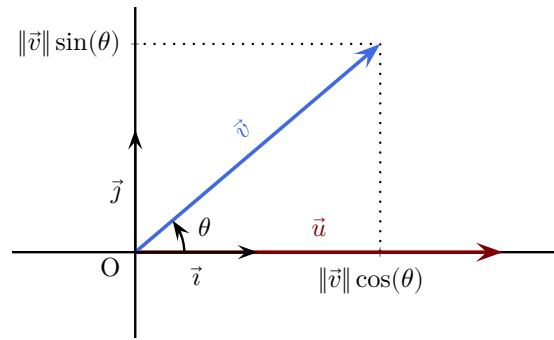
Proposition 4 (Relation de Pythagore) : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$.

Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right). \quad (\text{P.S 2})$$

Preuve : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$.

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ d'une part et $\frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right) = 0$ d'autre part. L'égalité est bien vérifiée.
- On suppose à présent que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.



On commence par construire un repère orthonormé adapté du plan. Soit O un point quelconque du plan.

Soit $\vec{i} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$ le vecteur unitaire colinéaire et de même sens que $\vec{u}$.

En particulier, $\vec{u} = \|\vec{u}\| \times \vec{i}$.

On complète le vecteur $\vec{i}$ par un vecteur unitaire $\vec{j}$ non colinéaire tel que $(O; \vec{i}; \vec{j})$ soit un repère orthonormé direct.

Dans ce repère, on a déjà $\vec{u} \begin{pmatrix} \|\vec{u}\| \\ 0 \end{pmatrix}$.

Posons $\theta \equiv (\vec{u}; \vec{v}) \equiv (\vec{i}; \vec{v}) \in [2\pi]$.

On a alors $\vec{v} \begin{pmatrix} \|\vec{v}\| \cos(\theta) \\ \|\vec{v}\| \sin(\theta) \end{pmatrix}$

Ainsi, $\vec{u} + \vec{v} = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \cos(\theta); \|\vec{v}\| \sin(\theta))$.

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \left(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \cos(\theta) \right)^2 + \left(\|\vec{v}\| \sin(\theta) \right)^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2 \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient bien $\frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta) = \vec{u} \cdot \vec{v}$.

Proposition 5 : Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$ une base orthonormée.

Soient $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ où $((x; y); (x'; y')) \in (\mathbb{R}^2)^2$.

Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'. \quad (\text{P.S 3})$$

Preuve : Soit $(\vec{i}; \vec{j})$ une base orthonormée.

On a successivement :

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j}. \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((x + x')^2 + (y + y')^2 - (x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2) \right) \\ &= xx' + yy'.\end{aligned}$$

Exercice 3 : Soit ABC un triangle tel que AB = 4, AC = 5 et BC = 6.

- 1 Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- 2 Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ arrondie au degré près.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right) \\ &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1\end{aligned}$$

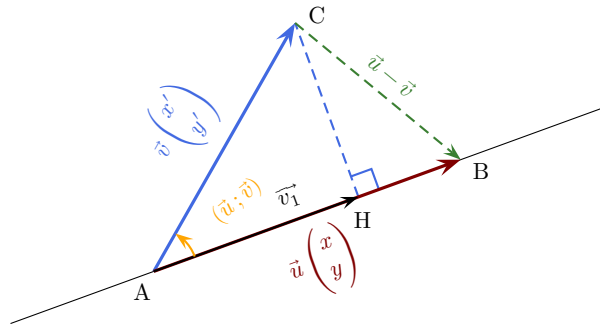


Figure XXXI.7 – Produit scalaire de deux vecteurs dans le plan.

II.4 Propriétés algébriques

Proposition 6 : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan $\vec{\mathcal{P}}$ et soient α et β des réels.

Alors :

$$1 \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geq 0. \quad (\text{Le produit scalaire est positif}).$$

$$\text{On note alors } \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = u^2.$$

$$2 \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}. \quad (\text{Le produit scalaire est défini}).$$

$$3 \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad (\text{Le produit scalaire est symétrique}).$$

$$4 \quad \begin{aligned}(\alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2) \cdot \vec{v} &= \alpha \vec{u}_1 \cdot \vec{v} + \beta \vec{u}_2 \cdot \vec{v} \\ \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2) &= \alpha \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \beta \vec{u} \cdot \vec{v}_2\end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Le produit scalaire est linéaire} \\ \text{à gauche et à droite} \end{array} \right).$$

$$5 \quad \begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2. \\ \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.\end{aligned} \quad (\text{Identités remarquables}).$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2.$$

On dit alors que l'application

$$\begin{aligned}\dots, \dots : \vec{\mathcal{P}} \times \vec{\mathcal{P}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}; \vec{v}) &\longmapsto \vec{u} \cdot \vec{v}\end{aligned}$$

est une forme bilinéaire (4), symétrique (3), définie (2), positive (1).

Exercice 4 (Droite d'Euler dans le triangle) : Soit ABC un triangle, on note O le centre du cercle circonscrit à ABC, G le centre de gravité de ABC et H l'orthocentre de ABC.

- 1 a Notons A' le milieu de [BC]. Exprimer le vecteur $3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}$ à l'aide de $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{OA'}$.
- b Calculer alors le produit scalaire $\overrightarrow{BC} \cdot (3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH})$.
- 2 Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot (3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH})$.
- 3 Démontrer que les points O, G et H sont alignés.

III PRODUIT MIXTE

Dans ce paragraphe, on suppose que le plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est muni d'une orientation.

Définition 6 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

On appelle *produit mixte* (ou *déterminant*) de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $[\vec{u}; \vec{v}]$, le réel défini par :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls,

$$[\vec{u}; \vec{v}] = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}; \vec{v}). \quad (\text{P.M 1})$$

- Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, on pose $[\vec{u}; \vec{v}] = 0$.

ATTENTION

La fonction sinus étant impaire, le produit mixte dépend de l'orientation du plan. Un changement d'orientation du plan change le signe du produit mixte.

Proposition 7 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

- 1 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si $[\vec{u}; \vec{v}] = 0$.
- 2 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $[\vec{u}; \vec{v}] = \pm \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Preuve : La démonstration est quasi-identique à celle de la proposition (2).

Remarques : Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$ une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Si $\mathcal{B}$ est orthonormée alors $[\vec{i}; \vec{j}] = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \sin(\vec{i}; \vec{j}) = \sin(\vec{i}; \vec{j})$.

Dans ce cas, on a alors :

- ◇ $[\vec{i}; \vec{j}] = 1$ si $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$ est directe.
- ◇ $[\vec{i}; \vec{j}] = -1$ si $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$ est indirecte.

En particulier,

Corollaire 1 :

$$\forall \vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}, \quad [\vec{u}; \vec{u}] = 0.$$

III.1 Expressions du produit mixte

Proposition 8 : Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$ une base orthonormée directe.

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ où $(x; y), (x'; y') \in \mathbb{R}^2$.

Alors :

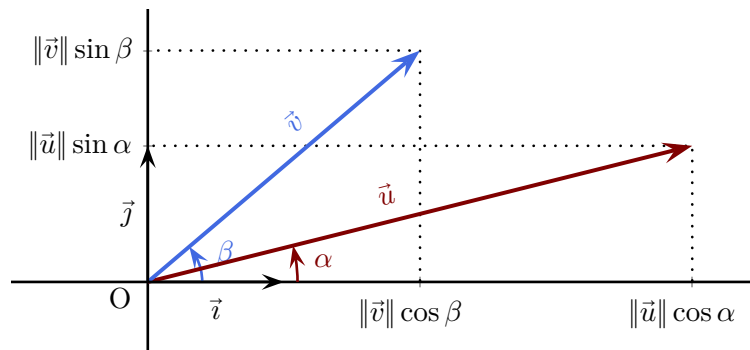
$$[\vec{u}; \vec{v}] = xy' - x'y. \quad (\text{P.M 2})$$

Notation En notant $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$ le nombre $xy' - x'y$, la relation (P.M 2) s'écrit :

$$[\vec{u}; \vec{v}] = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y.$$

ATTENTION | L'égalité (P.M 2) n'a lieu que dans une base orthonormée directe.

Preuve : Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé direct et soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ deux vecteurs décomposés dans la base $\mathcal{B}(\vec{i}; \vec{j})$.



– $\mathcal{R} \vec{u} = \vec{0} \iff \vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\vec{v} = \vec{0} \iff \vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $[\vec{u}; \vec{v}] = 0$ et $xy' - x'y = 0$. L'égalité est vérifiée.

– On suppose à présent que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

On pose $\alpha \equiv (\vec{i}; \vec{u}) [2\pi]$ et $\beta \equiv (\vec{i}; \vec{v}) [2\pi]$.

On a simplement $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\vec{u}\| \cos \alpha \\ \|\vec{u}\| \sin \alpha \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\vec{v}\| \cos \beta \\ \|\vec{v}\| \sin \beta \end{pmatrix}$.

De plus, $(\vec{u}; \vec{v}) \equiv (\vec{u}; \vec{i}) + (\vec{i}; \vec{v}) \equiv (\vec{i}; \vec{v}) - (\vec{i}; \vec{u}) \equiv \beta - \alpha \pmod{2\pi}$.

$$\begin{aligned}
 \text{D'où } [\vec{u}; \vec{v}] &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}; \vec{v}) \\
 &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\beta - \alpha) \\
 &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\beta) \cos(\alpha) - \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\beta) \sin(\alpha) \\
 &= \underbrace{\|\vec{u}\| \cos(\alpha)}_x \times \underbrace{\|\vec{v}\| \sin(\beta)}_{y'} - \underbrace{\|\vec{u}\| \sin(\alpha)}_y \times \underbrace{\|\vec{v}\| \cos(\beta)}_{x'} \\
 &= xy' - x'y.
 \end{aligned}$$

III.2 Interprétation géométrique du produit mixte

Proposition 9 : Soient A, B et C trois points de $\mathcal{P}$ et D tel que $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$. Alors, $|\vec{AB}; \vec{AC}|$ est l'aire du parallélogramme ABDC :

$$\mathcal{A}_{ABDC} = |\vec{AB}; \vec{AC}|.$$

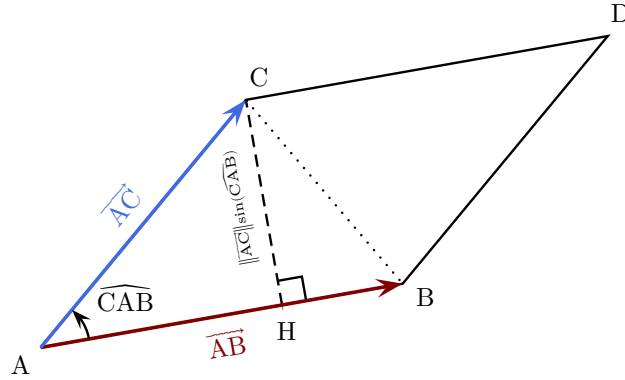


Figure XXXI.8 – $|\vec{AB}; \vec{AC}| = \mathcal{A}_{ABDC}$ où $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$.

Preuve : Soient A, B et C trois points de $\mathcal{P}$ et ABDC construit sur $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

- Si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires alors ABCD est d'aire nulle tout comme $[\vec{AB}; \vec{AC}]$. La propriété est vraie dans ce cas.
- Si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires alors l'aire $\mathcal{A}$ de ABDC est donnée par $\mathcal{A} = AB \times CH$ où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

$$\text{Or, } CH = AC \times \sin(\widehat{CAB}).$$

D'où, $\mathcal{A} = AB \times CH = AB \times AC \times \sin(\widehat{CAB}) = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\| \times \sin(\widehat{(\vec{AB}; \vec{AC})})$, où $(\widehat{(\vec{AB}; \vec{AC})})$ désigne l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

Comme $\sin(\widehat{(\vec{AB}; \vec{AC})}) = |\sin(\vec{AB}; \vec{AC})|$, alors on a finalement

$$\mathcal{A} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\| \times |\sin(\vec{AB}; \vec{AC})| = |\vec{AB}; \vec{AC}|.$$

Corollaire 9I : Soient A, B, et C trois points du plan $\mathcal{P}$. Alors l'aire du triangle ABC est

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] \right|.$$

Exercice 5 : On donne A(1, 2), B(2, 3), C(6, 1) et D(3, 0) dans un repère orthonormé direct.

- 1 Quelle est l'aire de ABC ?
- 2 Justifier que ABD est rectangle en A.

III.3 Propriétés algébriques

Proposition 10 : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan $\vec{\mathcal{P}}$ et soient α et β des réels.

Alors :

- 1 $[\vec{u}; \vec{v}] = -[\vec{v}; \vec{u}]$ (Le produit mixte est anti-symétrique ou alterné).
- 2 $[\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2; \vec{v}] = \alpha[\vec{u}_1; \vec{v}] + \beta[\vec{u}_2; \vec{v}]$
 $[\vec{u}; \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2] = \alpha[\vec{u}; \vec{v}_1] + \beta[\vec{u}; \vec{v}_2]$ (Le produit mixte est linéaire à gauche et à droite).
- 3 $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + [\vec{u}; \vec{v}]^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$. (Identité de Lagrange).

On dit alors que l'application

$$\begin{aligned} [\vec{\cdot}; \vec{\cdot}] : \vec{\mathcal{P}} \times \vec{\mathcal{P}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}; \vec{v}) &\longmapsto [\vec{u}; \vec{v}] \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire (2) alternée (1).

Preuve : Tout se fait en utilisant les expressions (P.S 3) et (P.M 2) des produits scalaire et mixte dans une base orthonormée directe.

Exercice 6 : Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

Montrer les triangles GAB, GBC et GAC ont la même aire.

Proposition 11 : Soient $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j})$ une base quelconque.

Deux vecteurs $\vec{u}(x; y)_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v}(x'; y')_{\mathcal{B}}$ sont colinéaires si, et seulement si $xy' - x'y = 0$.

ATTENTION

Dans une base quelconque $[\vec{u}; \vec{v}] \neq \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$.

Preuve : Soient deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_B$ d'une base quelconque $B = (\vec{i}; \vec{j})$.

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} &\iff [\vec{u}; \vec{v}] = 0 \\ &\iff [x\vec{i} + y\vec{j}; x'\vec{i} + y'\vec{j}] = 0. \end{aligned}$$

Par linéarité à gauche,

$$\iff x [\vec{i}; x'\vec{i} + y'\vec{j}] + y [\vec{j}; x'\vec{i} + y'\vec{j}] = 0.$$

Et, par linéarité à droite,

$$\iff xx' [\vec{i}; \vec{i}] + xy' [\vec{i}; \vec{j}] + yx' [\vec{j}; \vec{i}] + yy' [\vec{j}; \vec{j}] = 0$$

Or, par colinéarité, $[\vec{i}; \vec{i}] = [\vec{j}; \vec{j}] = 0$,

$$\iff xy' [\vec{i}; \vec{j}] + yx' [\vec{j}; \vec{i}] = 0$$

Par anti-symétrie,

$$\iff (xy' - x'y) [\vec{i}; \vec{j}] = 0.$$

Comme $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires alors $[\vec{i}; \vec{j}] \neq 0$:

$$\iff xy' - x'y = 0.$$

IV DROITES DU PLAN

Dans cette partie, sauf mention contraire, on considèrera $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère quelconque de $\mathcal{P}$.

IV.1 Vecteur directeur d'une droite

Définition 7 (Vecteur directeur) : Soit $(\mathcal{D})$ une droite du plan.

On appelle *vecteur directeur* de $(\mathcal{D})$ tout vecteur non nul $\vec{u}$, colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points distincts de $(\mathcal{D})$.

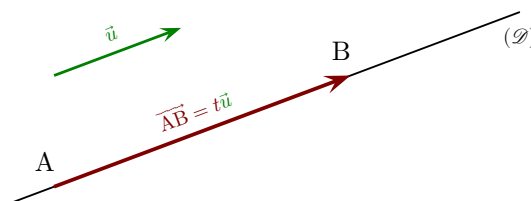


Figure XXXI.9 – Vecteur directeur d'une droite.

IV.2 Équations paramétriques de droites

Proposition 12 : La droite $(\mathcal{D})$ passant par $A(x_0; y_0)$ et dirigée par $\vec{u}(\alpha; \beta)$ où $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$ est l'ensemble des points $M(x; y)$ de $\mathcal{D}$ tels que :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Ce système est appelé équation paramétrique de la droite $(\mathcal{D})$.

Remarques :

- Un point $M(x; y)$ appartient à la droite passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ si, et seulement si $M = A + \text{vect}(\vec{u})$.
- En particulier, le couple $(A, \vec{u})$ doit être vu comme un repère de la droite $(\mathcal{D})$. Le paramètre t est alors l'abscisse d'un point M de la droite dans celui-ci.

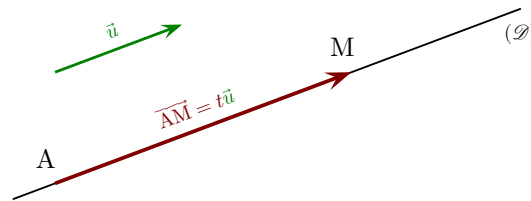


Figure XXXI.10 – Droite $(\mathcal{D})$ passant par un point A et dirigée par un vecteur $\vec{u}$.

Preuve : Soit $(\mathcal{D})$ passant par $A(x_0; y_0)$ et dirigée $\vec{u}(\alpha; \beta)$.

$$M(x; y) \in (\mathcal{D}) \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires.}$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \iff \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x - x_0 = t\alpha \\ y - y_0 = t\beta \end{cases}$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \end{cases}$$

Exercice 1 : Déterminer une équation paramétrique de la droite (AB) avec :

1 $A(1; 3)$ et $B(-1; 2)$.

2 $A(1; -3)$ et $B(4; -3)$.

IV.3 Équations cartésiennes d'une droite

Proposition 13 :

- 1** Toute droite $(\mathcal{D})$ admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$.

Cette équation est appelée *équation cartésienne* de la droite $(\mathcal{D})$.

- 2** Réciproquement, soit $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(a; b) \neq (0; 0)$ alors l'ensemble des points $M(x; y)$ dont les coordonnées sont solutions de l'équation $ax + by + c = 0$ est une droite $(\mathcal{D})$ dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Preuve :

1 Soit $(\mathcal{D})$ une droite passant par $A(x_0; y_0)$ et dirigée par $\vec{u}(\alpha; \beta)$ où $(\alpha; \beta) \neq (0; 0)$.

Soit $(x; y) \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} M(x; y) \in (\mathcal{D}) &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires.} \\ &\iff [\overrightarrow{AM}; \vec{u}] = 0 \text{ avec } \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha \\ y - y_0 & \beta \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff (x - x_0)\beta - (y - y_0)\alpha = 0 \\ &\iff ax + by + c = 0 \text{ en posant } \begin{cases} a = -\beta \\ b = \alpha \\ c = \beta x_0 - \alpha y_0 \end{cases} \end{aligned}$$

$(\mathcal{D})$ admet bien une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) = (-\beta; \alpha) \neq (0; 0)$.

2 Réciproquement, soient trois réels a , b et c tels que $(a; b) \neq (0; 0)$. On peut supposer, par exemple, que $a \neq 0$.

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $ax + by + c = 0$.

Commençons par remarquer que $\mathcal{D}$ est non vide car $A\left(-\frac{c}{a}; 0\right) \in \mathcal{D}$. Dans le cas où $a = 0$ alors $b \neq 0$ et $B\left(0; -\frac{c}{b}\right) \in \mathcal{D}$.

Ceci dit, continuons en supposant $a \neq 0$. En particulier,

$$ax_A + by_A + c = 0. \quad (\text{XXXI.3})$$

Montrons que $\mathcal{D}$ est une droite passant par A .

Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$M(x; y) \in \mathcal{D} \iff ax + by + c = 0.$$

En soustrayant (XXXI.3) aux deux membres, on obtient :

$$\begin{aligned} &\iff a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} x - x_A & -b \\ y - y_A & a \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff [\overrightarrow{AM}; \vec{u}] = 0 \text{ où } \vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \\ &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires.} \\ &\iff M \text{ appartient à la droite passant par } A \text{ et dirigée par } \vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En conclusion, l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$ est une droite dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Exercice 8 : Résoudre graphiquement les systèmes :

$$\boxed{1} \quad \begin{cases} x + y \geq 0 \\ x - y \leq 1 \\ x + 2y - 4 \leq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{2} \quad \begin{cases} 4x^2 - y^2 \geq 0 \\ y^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

Définition 8 (Vecteur normal) : On appelle *vecteur normal* d'une droite $(\mathcal{D})$, tout vecteur non nul orthogonal aux vecteurs directeurs de $(\mathcal{D})$.

Proposition 14 : Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé.

1 Toute droite admet une équation du type $ax + by + c = 0$ dont $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal.

2 Réciproquement, soient trois réels a , b et c tels que $(a; b) \neq (0; 0)$.

L'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Preuve : Il suffit de remarquer que $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

Exemple 2 (Droite définie par deux points distincts) :

Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) où $A(1; 3)$ et $B(-1; 2)$.

Comme $-\overrightarrow{AB}(2; 1)$ est un vecteur directeur de (AB) alors tout point

$$M(x; y) \in (AB) \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } -\overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires.}$$

$$\iff \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ y-3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (x-1) - 2(y-3) = 0$$

$$\iff x - 2y + 5 = 0.$$

Donc, $(AB) : x - 2y + 5 = 0$.

Exemple 3 (Droite définie par un point et un vecteur normal) :

Dans un repère ortho-

normé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points $A(1; 3)$, $B(-1; 2)$ et $C(-3; -4)$.

Dans le triangle ABC , déterminons une équation cartésienne de la hauteur issue de A . Soit $(\mathcal{D})$ cette droite.

La droite $(\mathcal{D})$ est la perpendiculaire à (BC) passant par A i.e.

$$\begin{aligned} M(x; y) \in (\mathcal{D}) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{1}{2} \overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux.} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \frac{1}{2} \overrightarrow{CB} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1) + 3(y-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 3y - 10 = 0 \end{aligned}$$

Donc, une équation cartésienne de la hauteur issue de A dans le triangle ABC est $x + 3y - 10 = 0$.

Définition 9 (Équation normale d'une droite) : Soit $(\mathcal{D})$ la droite d'équation

$$ax + by + c = 0.$$

L'équation de $(\mathcal{D})$ est dite *normale* si $a^2 + b^2 = 1$ i.e. $\|\vec{n}\| = 1$ où $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Remarques :

- La condition $a^2 + b^2 = 1$ sous-entend que $(a; b) \neq (0; 0)$.
- Pour tout vecteur de norme 1, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{n} = (\cos(\theta); \sin(\theta))$. On retrouve alors souvent des équation de droite, dites *normale*, sous la forme :

$$(\mathcal{D}) : x \cos(\theta) + y \sin(\theta) = d.$$

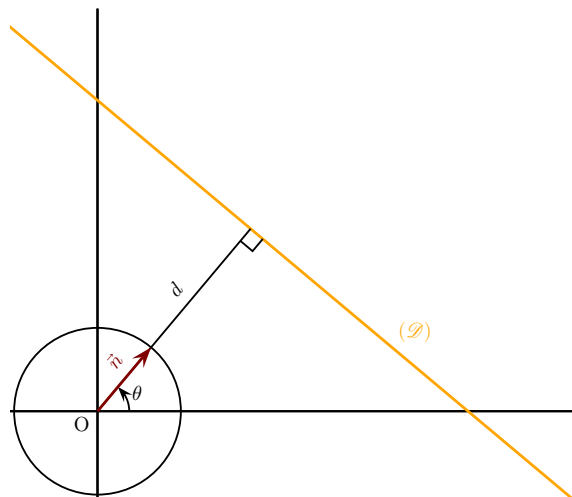


Figure XXXI.11 – Équation normale d'une droite.

Exercice 9 : On considère les points $A(5; 3)$, $B(1; -3)$ et $C(-3; 4)$.

- 1** Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) .
- 2** Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de B dans le triangle ABC .

IV.4 Équation réduite d'une droite

Proposition 15 : Soient $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère quelconque et $(\mathcal{D})$ une droite.

Alors :

- 1 Si $(\mathcal{D})$ est parallèle à l'axe $(O, \vec{j})$ alors $(\mathcal{D})$ admet une équation de la forme

$$x = \alpha \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

- 2 Si $(\mathcal{D})$ n'est pas parallèle à l'axe $(O, \vec{j})$ alors $(\mathcal{D})$ admet une équation de la forme

$$y = mx + p \quad \text{où } (m; p) \in \mathbb{R}^2.$$

- m s'appelle le *coefficient directeur* de la droite
- et p son *ordonnée à l'origine*.

Preuve : Soit $(\mathcal{D})$ une droite dont une équation cartésienne est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(-b; a) \neq (0; 0)$.

- 1 Si $(\mathcal{D})$ est parallèle à l'axe $(O, \vec{j})$ alors $\vec{u}(-b; a)$ est colinéaire à $\vec{j}(0; 1)$ donc $b = 0$ et $a \neq 0$.

On en déduit que $(\mathcal{D})$ a pour équation $x = -\frac{c}{a}$ i.e. de la forme $x = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

- 2 Si $(\mathcal{D})$ n'est pas parallèle à l'axe $(O, \vec{j})$ alors $\vec{u}(-b; a)$ n'est pas colinéaire à $\vec{j}(0; 1)$ donc $b \neq 0$.

L'équation cartésienne de la droite $(\mathcal{D})$ peut s'écrire sous la forme $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ qui est bien de la forme voulue.

Remarque : Le coefficient directeur de $(\mathcal{D})$ est $m = -\frac{a}{b}$, son ordonnée à l'origine est $p = -\frac{c}{b}$ et un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$ est $\vec{u}(1; m)$.

Remarque : Dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ quelconque, soient deux points A $(x_A; y_A)$ et B $(x_B; y_B)$ tels que $x_A \neq x_B$ de sorte que (AB) ne soit pas parallèle à l'axe $(O, \vec{j})$.

Alors le coefficient directeur de la droite (AB) est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Proposition 16 :

- 1 Deux droites sont parallèles si, et seulement si leur coefficient directeur sont égaux.
- 2 Deux droites sont orthogonales si, et seulement si le produit de leur coefficient directeur est égal à -1 dans un repère orthonormé.

Plus précisément, si $(\mathcal{D}) : y = mx + p$ et $(\mathcal{D}') : y = m'x + p'$ alors :

- 1 $(\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{D}') \iff m = m'$.
- 2 $(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{D}') \iff mm' = -1$ si $\mathcal{R}$ est orthonormé.

Preuve : Soient $\begin{cases} (\mathcal{D}) : y = mx + p \\ (\mathcal{D}') : y = m'x + p' \end{cases}$ où m, m', p et p' sont des réels.

Les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont respectivement dirigées par les vecteurs $\vec{u}(1; m)$ et $\vec{u}'(1; m')$.

Il suffit de traduire les propriétés en terme de produits mixte et scalaire :

$$\boxed{1} \quad (\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{D}') \iff [\vec{u}; \vec{u}'] = 0 \iff \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & m' \end{vmatrix} = 0 \iff m' - m = 0 \iff m = m'.$$

$$\boxed{2} \quad \text{On suppose que le repère } \mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ est orthonormé.}$$

$$(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{D}') \iff \vec{u} \cdot \vec{u}' = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix} = 0 \iff 1 + mm' = 0 \iff mm' = -1.$$

Exercice 10 : On considère les droites $(\mathcal{D}) : x + 2y = 5$ et $(\mathcal{D}') : 3x - y = 1$.

On note B(5; 2) et C(2; -7).

- $\boxed{1}$ Justifier que les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes puis calculer les coordonnées du point A, intersection des deux droites.
- $\boxed{2}$ Donner une équation cartésienne de (AB).
- $\boxed{3}$ Donner une équation cartésienne de la perpendiculaire à $(\mathcal{D})$ passant par B.
- $\boxed{4}$ Donner une équation cartésienne de la parallèle à $(\mathcal{D})$ passant par B.
- $\boxed{5}$ Donner une équation cartésienne de la médiatrice du segment [BC].

Cette médiatrice est-elle parallèle à $(\mathcal{D})$? à $(\mathcal{D}')$?

IV.5 Distance d'un point à une droite

Définition 10 : Soient $(\mathcal{D})$ une droite et A un point du plan $\mathcal{P}$.

On appelle *distance* du point A à la droite $(\mathcal{D})$, noté $d(A; (\mathcal{D}))$, la plus petite des distances AM lorsque le point M parcourt la droite $(\mathcal{D})$:

$$d(A; (\mathcal{D})) = \inf \{ AM / M \in (\mathcal{D}) \}.$$

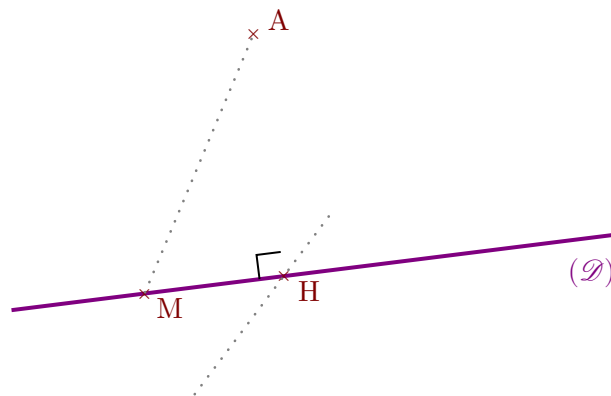


Figure XXXI.12 – $d(A; (\mathcal{D})) = AH$ où H est le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{D})$.

Théorème 17 : Soient $(\mathcal{D})$ une droite et A un point du plan $\mathcal{P}$.

$$d(A; (\mathcal{D})) = AH \iff H \text{ est le projeté orthogonal de A sur } (\mathcal{D}).$$

Preuve : Soient M un point quelconque de $(\mathcal{D})$ et H le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{D})$.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AHM rectangle en H, on a :

$$AM^2 = AH^2 + MH^2 > AH^2 \implies AM \geq AH.$$

Donc $d(A; (\mathcal{D})) \geq AH$ avec égalité pour $M = H$ donc $d(A; (\mathcal{D})) = AH$.

Exercice II : Soit ABC un triangle équilatéral et M un point à l'intérieur de ABC.

Montrer que la somme des distances de M aux trois côtés de ABC ne dépend pas de M.

Proposition 18 (Calcul de la distance d'un point à une droite) : Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère quelconque.

Cas d'une droite définie par un point et un vecteur directeur : Soit $(\mathcal{D})$ la droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ et soit $M \in \mathcal{P}$ alors :

$$d(M; (\mathcal{D})) = \frac{|\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM}|}{\|\vec{u}\|}.$$

Cas d'une droite définie par un point et un vecteur normal : Soit $(\mathcal{D})$ la droite passant par le point A, de vecteur normal $\vec{n}$ et soit $M \in \mathcal{P}$ alors :

$$d(M; (\mathcal{D})) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}|}{\|\vec{n}\|}.$$

Preuve : Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère quelconque.

Soient $(\mathcal{D})$ la droite passant par le point A et $M \in \mathcal{P}$. On note H le projeté orthogonal du point M sur la droite $(\mathcal{D})$ alors :

1 Supposons que $(\mathcal{D})$ soit dirigée par le vecteur $\vec{u}$. Par linéarité du produit mixte, on a :

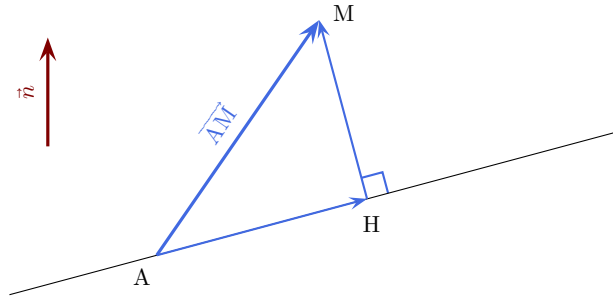
$$[\vec{u}; \overrightarrow{AM}] = [\vec{u}; \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}] = [\vec{u}; \overrightarrow{AH}] + [\vec{u}; \overrightarrow{HM}].$$

Or, $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires i.e. $[\vec{u}; \overrightarrow{AH}] = 0$.

Par ailleurs, $\vec{u}$ et $\overrightarrow{HM}$ sont orthogonaux donc $[\vec{u}; \overrightarrow{HM}] = \pm \|\vec{u}\| \times \|\overrightarrow{HM}\| = \pm \|\vec{u}\| \times HM$.

Ainsi, $[\vec{u}; \overrightarrow{AM}] = \pm \|\vec{u}\| \times HM \implies |[\vec{u}; \overrightarrow{AM}]| = \|\vec{u}\| \times HM \implies d(M; (\mathcal{D})) = \frac{|[\vec{u}; \overrightarrow{AM}]|}{\|\vec{u}\|}.$

2 Supposons que $(\mathcal{D})$ ait pour vecteur normal $\vec{n}$.



$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = \vec{n} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} + \vec{n} \cdot \overrightarrow{HM}.$$

Or, $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux i.e. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$.

Par ailleurs, $\vec{n}$ et $\overrightarrow{HM}$ sont colinéaires donc $\vec{n} \cdot \overrightarrow{HM} = \pm \|\vec{n}\| \times \|\overrightarrow{HM}\| = \pm \|\vec{n}\| \times HM$.

$$\text{Ainsi, } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = \pm \|\vec{n}\| \times HM \Rightarrow |\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}| = \|\vec{n}\| \times HM \Rightarrow d(M; (\mathcal{D})) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}|}{\|\vec{n}\|}.$$

Corollaire 181 (Cas d'une droite définie par une équation cartésienne dans un R.O.N) : Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé.

Soit $(\mathcal{D})$ la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $(a; b) \neq (0; 0)$.

Pour tout point $M(x_M; y_M) \in \mathcal{P}$, on a :

$$d(M; (\mathcal{D})) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Preuve : Sachant que $(\mathcal{D})$ est dirigée par $\vec{u}(-b; a)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a; b)$ il suffit d'appliquer l'une ou l'autre des deux formules précédentes :

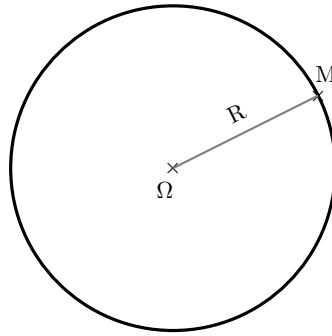
Soit $M(x_M; y_M) \in \mathcal{P}$. Alors :

$$d(M; (\mathcal{D})) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|a(x_M - x_A) + b(y_M - y_A)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_M + by_M - (ax_A + by_A)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Or, $A \in (\mathcal{D}) \Leftrightarrow c = -(ax_A + by_A)$.

$$\text{Donc, } d(M; (\mathcal{D})) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exercice 12 : Calculer la distance du point A $(-2; -1)$ à la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $3x + 4y - 5 = 0$.

Figure XXXI.13 – Cercle de centre Ω et de rayon R .

V

CERCLES DU PLAN

Dans ce paragraphe, on se place dans le plan muni d'un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$ **orthonormé** du plan $\mathcal{P}$.

V.1 Équations cartésiennes de cercles

Proposition 19 : Soient $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(x_\omega; y_\omega)$ où $(x_\omega; y_\omega) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $R \geq 0$. Soit $M \in \mathcal{P}$ un point. Alors,

$$M(x; y) \in \mathcal{C} \iff (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 = R^2.$$

Preuve : Soient $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(x_\omega; y_\omega)$ où $(x_\omega; y_\omega) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $R \geq 0$ et $M \in \mathcal{P}$ un point du plan. Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

$$M(x; y) \in \mathcal{C} \iff \Omega M = R \iff \Omega M^2 = R^2 \iff (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 = R^2.$$

Remarques : On appelle *disque* de centre $\Omega(x_\omega; y_\omega)$ et de rayon $R \geq 0$ l'ensemble

$$\mathcal{D} = \left\{ M(x; y) / (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 \leq R^2 \right\}.$$

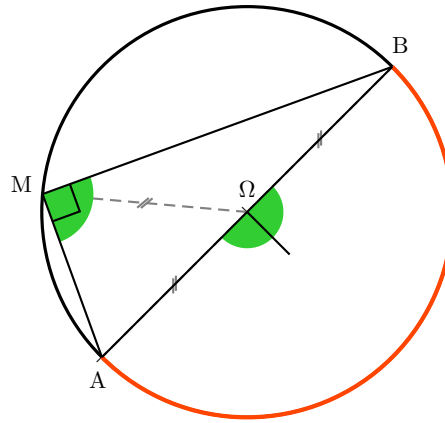
Plus particulièrement,

- $M(x; y)$ est strictement à l'extérieur du cercle $\mathcal{C} \iff (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 > R^2$.
- $M(x; y)$ est strictement à l'intérieur du cercle $\mathcal{C} \iff (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 < R^2$.

Proposition 20 : Soient a, b et c des réels et $\mathcal{C}$ l'ensemble d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$$

- Si $c < a^2 + b^2$ alors $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.
- Si $c = a^2 + b^2$ alors $\mathcal{C}$ est réduit au point $\Omega(a; b)$.
- Si $c > a^2 + b^2$ alors $\mathcal{C}$ est vide.



Un triangle est rectangle si, et seulement si un de ses côtés est le diamètre de son cercle circonscrit.

Figure XXXI.14 – Théorème du triangle rectangle inscrit dans un cercle (Théorème de Thalès anglo-saxon).

Preuve : Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} M(x; y) \in \mathcal{C} &\iff x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \\ &\iff (x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - c. \end{aligned}$$

– Si $c < a^2 + b^2$ alors, en posant $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$, on a :

$$M(x; y) \in \mathcal{C} \iff (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \iff \Omega M = R, \text{ où } \Omega(a; b).$$

$\mathcal{C}$ est donc le cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

– Si $c = a^2 + b^2$ alors

$$M(x; y) \in \mathcal{C} \iff (x - a)^2 + (y - b)^2 = 0 \iff \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$

$\mathcal{C}$ est donc réduit au point $\Omega(a; b)$.

– Si $c > a^2 + b^2$ alors l'équation $\underbrace{(x - a)^2 + (y - b)^2}_{\geq 0} = \underbrace{a^2 + b^2 - c}_{< 0}$ n'a pas de solutions.

Donc $\mathcal{C}$ est vide.

Exercice 13 : Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère quelconque.

Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ défini par :

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0.$$

Proposition 21 : Soient A et B deux points distincts du plan $\mathcal{P}$.

Le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB] est l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Preuve : Soit Ω le milieu de $[AB]$. Pour tout point $M(x; y) \in \mathcal{P}$, on a :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 &\Leftrightarrow (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A}) \cdot (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega B}) \\
 &\Leftrightarrow M\Omega^2 + \overrightarrow{M\Omega} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B})}_{=\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega B}}_{=-\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = -\Omega A^2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow M\Omega^2 - \Omega A^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \Omega M = \Omega A \\
 &\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle de centre } \Omega \text{ et de rayon } \Omega A = \frac{1}{2}AB, \\
 &\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle de diamètre } [AB].
 \end{aligned}$$

Exercice 14 : Les questions sont indépendantes.

- 1 Donner l'équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(1; 3)$ et $B(-1; -2)$. Même question avec $A(3; 3)$ et $B(2; 1)$.
- 2 Donner l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC où $A(1; 0)$, $B(0; 2)$ et $C(3; 1)$.
- 3 Déterminer les équations des cercles passant par $A(1; 1)$, $B(2; 2)$ et tangents à (Ox) .

V.2 Intersection d'une droite et d'un cercle

Proposition 22 : Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon R et $(\mathcal{D})$ une droite de $\mathcal{P}$.

- 1 Si $d(\Omega; (\mathcal{D})) < R$ alors $\mathcal{C}$ et $(\mathcal{D})$ se coupent en deux points distincts.

On dit que $\mathcal{C}$ et $(\mathcal{D})$ sont sécants.

- 2 Si $d(\Omega; (\mathcal{D})) = R$ alors $\mathcal{C}$ et $(\mathcal{D})$ se coupent en un unique point.

On dit que $\mathcal{C}$ et $(\mathcal{D})$ sont tangents.

- 3 Si $d(\Omega; (\mathcal{D})) > R$ alors $\mathcal{C} \cap (\mathcal{D}) = \emptyset$.

On dit que $\mathcal{C}$ et $(\mathcal{D})$ sont extérieurs.

Preuve : Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon R , $(\mathcal{D})$ une droite de $\mathcal{P}$ et H le projeté orthogonal de Ω sur $(\mathcal{D})$ i.e. $\Omega H = d(\Omega; (\mathcal{D}))$.

Pour tout point M de $(\mathcal{D})$, le triangle $\Omega H M$ est rectangle en H et, d'après le théorème de Pythagore,

$$\Omega H^2 + H M^2 = \Omega M^2 \Leftrightarrow H M^2 = \Omega M^2 - \Omega H^2.$$

D'où,

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \Omega M = R \Rightarrow H M^2 = R^2 - \Omega H^2. \quad (\text{XXXI.4})$$

- 1 Si $d(\Omega; (\mathcal{D})) > R \Leftrightarrow R^2 - \Omega H^2 < 0$ alors XXXI.4 n'a pas de solution et $\mathcal{C} \cap (\mathcal{D}) = \emptyset$.

- 2 Si $d(\Omega; (\mathcal{D})) = R \Leftrightarrow H M^2 = R^2 - \Omega H^2 = 0$ alors $M = H$: $\mathcal{C}$ et $(\mathcal{D})$ se coupent en un seul point T .

- 3 Si $d(\Omega; (\mathcal{D})) < R$ alors XXXI.4 a deux points E et F solutions vérifiant $H M = \sqrt{R^2 - \Omega H^2}$.

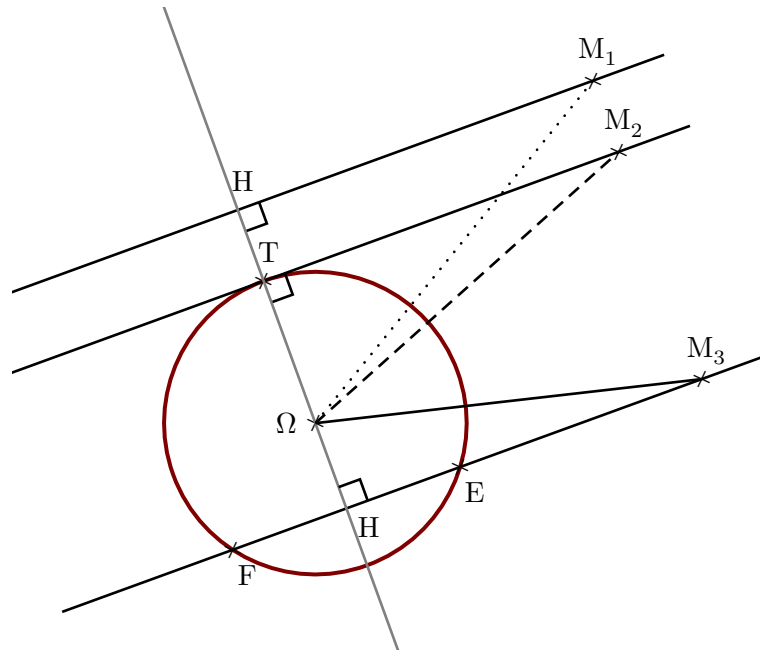


Figure XXXI.15 – Intersection d'une droite et d'un cercle.

Dans le cas de **2**, on redémontre, en particulier, que la tangente à un cercle est perpendiculaire à son rayon en le point de tangence.

Exercice 15 : On considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 2x + \frac{2}{5} = 0$ et le point $A(2; 3)$.

- 1** Pourquoi A est-il extérieur à $\mathcal{C}$?
- 2** Déterminer les tangentes à $\mathcal{C}$ passant par le point A .

V.3 Intersection de deux cercles

Proposition 23 : Soient deux cercles $\mathcal{C}(\Omega; R)$ et $\mathcal{C}'(\Omega'; R')$ de centres distincts.

Alors :

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' \neq \emptyset \iff |R - R'| \leq d(\Omega; \Omega') \leq R + R'.$$

Preuve : Soient deux cercles $\mathcal{C}(\Omega; R)$ et $\mathcal{C}'(\Omega'; R')$ de centres distincts.

Posons $d = \Omega\Omega'$ et plaçons nous dans le repère direct $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i} = \frac{1}{d}\overrightarrow{\Omega\Omega'}$.

Dans ce repère, $\mathcal{C}$ a pour équation $x^2 + y^2 = R^2$ et $\mathcal{C}'$ a pour équation $(x - d)^2 + y^2 = R'^2$.

Soit x et y deux réels. On a :

$$\begin{aligned} M(x; y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}' &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ (x - d)^2 + y^2 = R'^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 - 2dx = R'^2 - d^2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x = \frac{R^2 - R'^2 + d^2}{2d} \end{cases} \end{aligned}$$

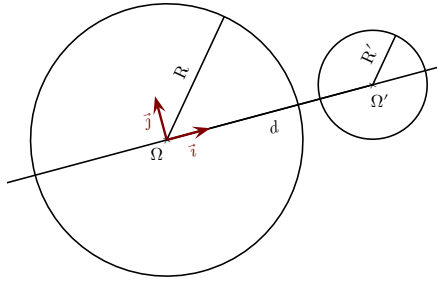
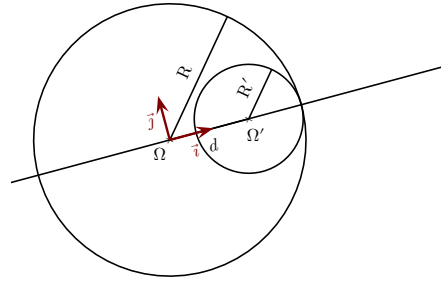
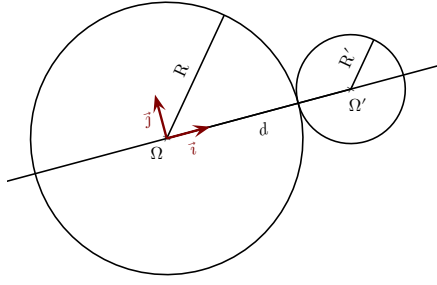
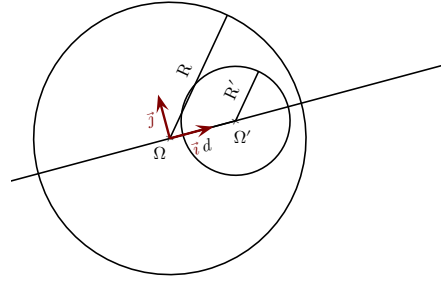
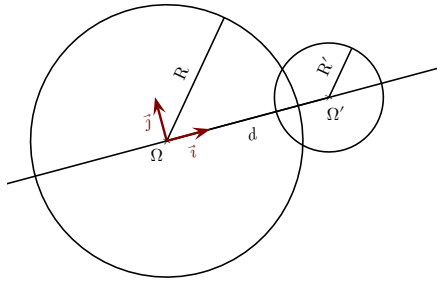
Figure XXXI.16 – $d(\Omega; \Omega') > R + R'$.Figure XXXI.19 – $d(\Omega; \Omega') = |R - R'|$.Figure XXXI.17 – $d(\Omega; \Omega') = R + R'$.Figure XXXI.20 – $0 < d(\Omega; \Omega') < |R - R'|$.Figure XXXI.18 – $|R - R'| < d(\Omega; \Omega') < R + R'$.

Figure XXXI.21 – Positions relatives de deux cercles.

Ce système exprime le fait que déterminer $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ revient à déterminer $\mathcal{C} \cap (\mathcal{D})$ où $(\mathcal{D})$ est la droite d'équation $x = \frac{R^2 - R'^2 + d^2}{2d}$.

$$\text{Or, } d(\Omega; (\mathcal{D})) = \frac{|R^2 - R'^2 + d^2|}{2d}.$$

D'après la **proposition (22)**,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C} \cap (\mathcal{D}) \neq \emptyset &\Leftrightarrow \frac{|R^2 - R'^2 + d^2|}{2d} < R \Leftrightarrow |R^2 - R'^2 + d^2| < 2dR \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} R^2 - R'^2 + d^2 < 2dR \\ R^2 - R'^2 + d^2 > -2dR \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} (R-d)^2 < R'^2 \\ (R+d)^2 > R'^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} |R-d| < R' \\ R+d > R' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -R' < R-d < R' \\ R+d > R' \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} d < R+R' \text{ et } R-R' < d \\ d > R'-R \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} d < R+R' \\ |R-R'| < d \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow |R-R'| < d < R+R'.
 \end{aligned}$$

Exercice 16 : On considère les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ d'équations respectives :

$$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 = 100 \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 - 24x - 18y + 200 = 0.$$

- 1 Montrer que les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents et préciser si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents intérieurement ou extérieurement.
- 2 Déterminer une équation de la tangente au point de contact.

