XXXII

Géométrie de l'espace

Dans l'espace, personne ne vous entendra crier.

Tagline du film Alien, le huitième passager.

Vous continuons dans ce chapitre notre étude des techniques de base en géométrie, mais cette fois-ci dans l'espace. Rien ne change très profondément par rapport à ce que nous avons vu dans le plan, il y a simplement une coordonnée de plus ... et un peu plus de place re... !

Contenu

Dans tout le chapitre, on note $\vec{\mathscr{E}}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace et $\mathscr{E}$ l'ensemble des points de l'espace et, dans tous les exercices, l'espace sera muni d'un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ orthonormé direct.

I Mode de repérage

Puisque ça fonctionne exactement de la même façon que dans le plan, nous ne reprendront pas toute la présentation sur les vecteurs faites dans notre premier chapitre de géométrie. Les opérations sont de toute façon les mêmes, et la structure d'espace vectorielle est également présente.

Définition 1 (Vecteurs coplanaires) : Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont dits *coplanaires* s'il existe un triplet $(\alpha\,;\beta\,;\gamma) \neq (0\,;0\,;0)$ de réels tels que :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}.$$

Si l'un des trois coefficients, par exemple α, est nul, cela signifie que deux des vecteurs (ici $\vec{u}$ et $\vec{v}$) sont colinéaires.

Dans le cas général, $\vec{w}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ce qui signifie bien intuitivement qu'il se situe « dans le plan » défini par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

I.1 Coordonnées cartésiennes

Définition 2 :

- On appelle *base* de $\vec{\mathscr{E}}$ tout triplet de vecteurs non coplanaires $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$.
- On appelle *repère* (cartésien) de $\mathscr{E}$ tout quadruplet $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$, où O est un point de $\mathscr{E}$ et $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ est une base de $\vec{\mathscr{E}}$.

  O est appelé *origine* du repère.

Cas particuliers :

— Le repère et la base sont dits *orthogonaux* si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux.

— Si de plus, les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont *unitaires* alors le repère et la base sont dits *orthonormés*.

Proposition 1 : Soit $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base de $\vec{\mathscr{E}}$.

Tout vecteur $\vec{u} \in \vec{\mathscr{E}}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \;\text{ où } (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3. \tag{XXXII.1}$$

On dit que $\vec{u}$ est une *combinaison linéaire* des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

En particulier, pour tout point M de l'espace $\mathscr{E}$, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ se décompose de manière unique dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \;\text{ où } (x\,;y)\,z \in \mathbb{R}^3. \tag{XXXII.2}$$

Définition 3 (Coordonnées cartésiennes) :

- Soient $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base de l'espace $\vec{\mathscr{E}}$ et $\vec{u} \in \vec{\mathscr{E}}$.

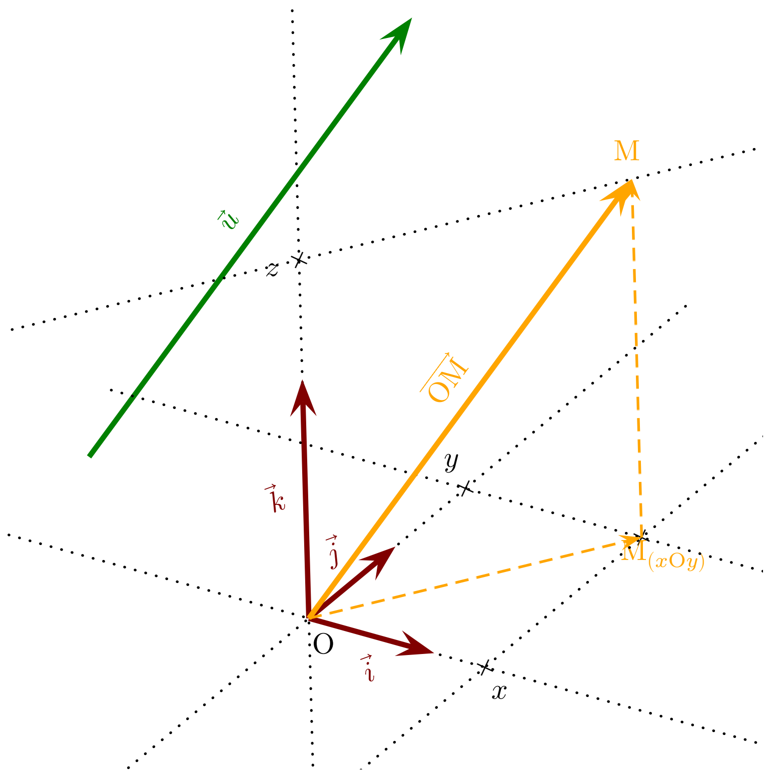


Figure XXXII.1 – Coordonnées cartésiennes d'un point et d'un vecteur de l'espace.

On appelle *coordonnées* du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$, notées $\vec{u}\,(x\,;y\,;z)_{\mathcal{B}}$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, le triplet $(x\,;y\,;z)$ de la décomposition (XXXII.1).

- On appelle *coordonnées* du point M dans le repère $\mathcal{R}$, notées $M\,(x\,;y\,;z)_{\mathcal{B}}$ ou $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, le triplet $(x\,;y\,;z)$ de la décomposition (XXXII.2).

Vocabulaire : x, y et z sont respectivement appelés, *abscisse*, *ordonnée* et *côte* de M dans le repère $\mathcal{R}$.

Bien entendu, les coordonnées dépendent de la base et/ou du repère choisis.

Cette dernière définition constitue en fait une identification entre l'ensemble des points de l'espace, l'ensemble des vecteurs de l'espace, et l'ensemble $\mathbb{R}^3$ des triplets de réels.

Rappel I (Coordonnées de vecteurs) : Soit $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$.

- Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda\vec{u} = \begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\\\lambda z\end{pmatrix}.$$

- $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} \\ y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}} \\ z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}} \end{pmatrix}$.
- Si I est le milieu de [AB] alors $\mathrm{I}\left(\frac{x_{\mathrm{B}}+x_{\mathrm{A}}}{2}\,;\frac{y_{\mathrm{B}}+y_{\mathrm{A}}}{2}\,;\frac{z_{\mathrm{B}}+z_{\mathrm{A}}}{2}\right)$.

I.2 Coordonnées cylindriques

La repérage cylindrique consiste tout simplement à remplacer les deux premières coordonnées cartésiennes x et y par des coordonnées polaires dans le plan engendré par $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, sans toucher à la troisième coordonnée z.

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$.

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$ et M' son projeté orthogonal sur le plan $(\mathrm{O}xy)$.

$\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\right)$ est un repère du plan $(\mathrm{O}xy)$.

M' admet pour coordonnées polaires $[\rho\,;\theta]$ dans ce repère *i.e.*

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}'} = \rho u_\theta = \rho\cos(\theta)\vec{\imath} + \rho\sin(\theta)\vec{\jmath}.$$

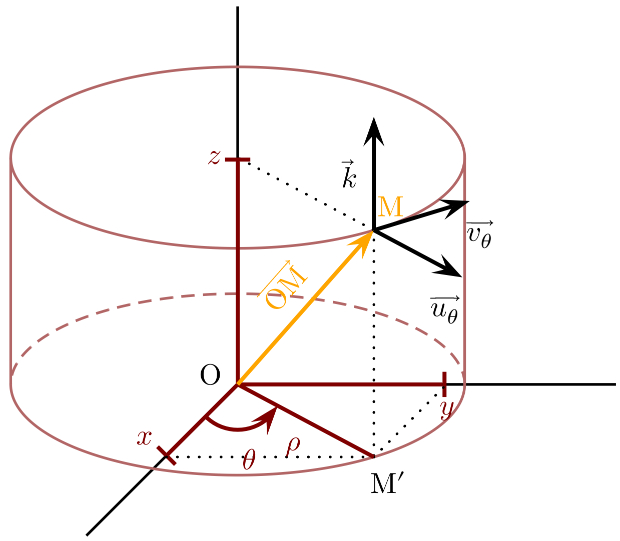


Figure XXXII.2 – Coordonnées cylindriques d'un point de l'espace.

Définition 4 (Coordonnées cylindriques) : On appelle *coordonnées cylindriques* de M tout triplet $(\rho\,;\theta\,;z)$ tel que :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \rho\cos(\theta)\vec{\imath} + \rho\sin(\theta)\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

Remarques :

— Comme les coordonnées polaires dans le plan, les coordonnées cylindriques ne sont pas uniques.

On impose l'unicité si on exige $\rho > 0$ et $\theta \in [0\,;2\pi[$, ce qui exclut le point O. (sic !)

— Si un point M a pour coordonnées cartésiennes $(x\,;y\,;z)$ et pour coordonnées cylindriques $(\rho\,;\theta\,;z)$ dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$ alors :

$$x = \rho\cos(\theta), \quad y = \rho\sin(\theta) \quad \text{et } z \text{ est inchangé !}$$

ATTENTION $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ ne correspond pas à la distance du point M à l'origine du repère, mais à la distance OM', où M' est le projeté orthogonal du point M sur le plan $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\right)$.

I.3 Coordonnées sphériques (Hors-Programme)

Ce dernier repérage utilise désormais une seule distance et deux angles, c'est en fait le repère qu'on utilise régulièrement pour les points situés sur le globe terrestre (où la distance au centre de la Terre, constante, n'est pas précisée) quand on donne la latitude et la longitude d'un point. La convention utilisée ici est légèrement différente.

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Définition 5 (Coordonnées sphériques) : On appelle *coordonnées sphériques* de M tout triplet $(r\,;\theta\,;\varphi)$ tel que :

- $r = \mathrm{OM}$
- Les coordonnées polaires de P, projeté orthogonal de M sur $(\mathrm{O}xy)$, sont $[r\sin(\varphi)\,;\theta]$ dans $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.
- $\varphi \equiv \left(\widehat{\vec{k}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}}\right) \in [0\,;\pi]$. C'est un angle non orienté.

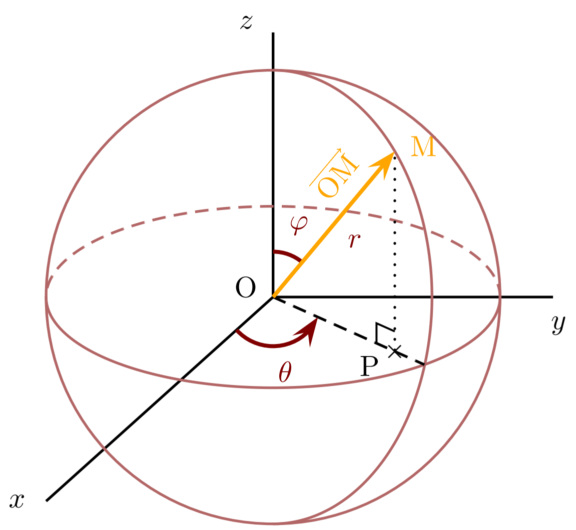


Figure XXXII.3 – Coordonnées sphériques d'un point de l'espace.

Vocabulaire : r, θ et φ sont respectivement appelés *rayon*, *longitude* et *colatitude* de M dans le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Si un point M a pour coordonnées sphériques $(r\,;\theta\,;\varphi)$ alors P, le projeté orthogonal de M sur $(\mathrm{O}xy)$, a pour coordonnées polaires $[r\sin(\varphi)\,;\theta]$ dans $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

Ainsi, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = r\sin(\varphi)\cos(\theta)\vec{i} + r\sin(\varphi)\sin(\theta)\vec{j}$.

Or, $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PM}}$ avec $\overrightarrow{\mathrm{PM}} = r\cos(\varphi)\vec{k}$.

On a donc

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\sin(\varphi)\cos(\theta)\vec{i} + r\sin(\varphi)\sin(\theta)\vec{j} + r\cos(\varphi)\vec{k} \iff \mathrm{M}\begin{pmatrix} r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ r\cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Il n'est en général pas aisé de passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques car il faut avoir deux angles remarquables à reconnaitre pour obtenir une expression simple.

Il est toutefois bon de connaitre la méthode : on commence par factoriser par r en laissant les deux premières coordonnées groupées, on fait apparaitre l'angle φ, puis on factorise à nouveau les deux premières coordonnées pour reconnaitre l'angle θ.

Exercice 1 : Déterminer les coordonnées sphériques du point $\mathrm{M}\left(1\,;1\,;\sqrt{2}\right)$.

Correction : Comme $\mathrm{OM}=\sqrt{1+1+2}=2$, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{i}+\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k}=2\left(\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$$

Sur la dernière coordonnées, on reconnaît $\varphi=\frac{\pi}{4}$:

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{k}$$

On reconnaît encore $\theta=\frac{\pi}{4}$:

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{i}+sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{j}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{k}$$

Un triplet de coordonnées sphériques de M est donc $\left(2\,;\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right)$.

ATTENTION Ne pas confondre latitude et colatitude ! La latitude est un angle appartenant à $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

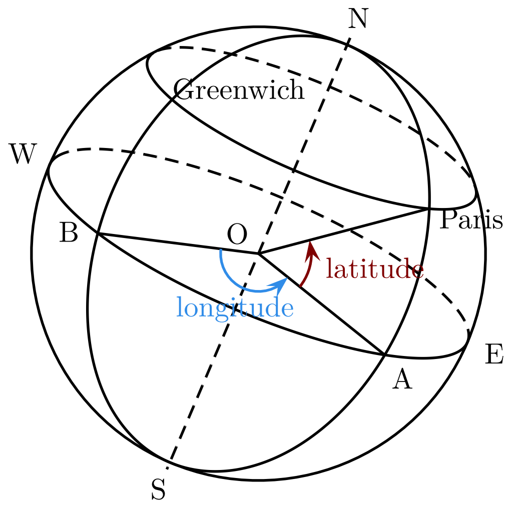


Figure XXXII.4 – Coordonnées géographiques.

II Produit scalaire

Soient A, B et C trois points de l'espace alors il existe un plan $(\mathscr{P})$ contenant les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

En effet, si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, il suffit de prendre un plan contenant la droite (AB), le plan (ABC) sinon.

II.1 Produit scalaire en dimension 3

Définition 6 (Produit scalaire) : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\mathcal{E}}$.

Soient $A \in \mathscr{E}$, B et C de $\mathscr{E}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $(\mathscr{P})$ un plan contenant les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

On appelle *produit scalaire* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan $(\mathscr{P})$.

Ainsi,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{cases} AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases} \qquad \text{(P.S 1)}$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} \text{ avec H le projeté orthogonal de C sur (AB)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) \qquad \text{(P.S 2)}$$

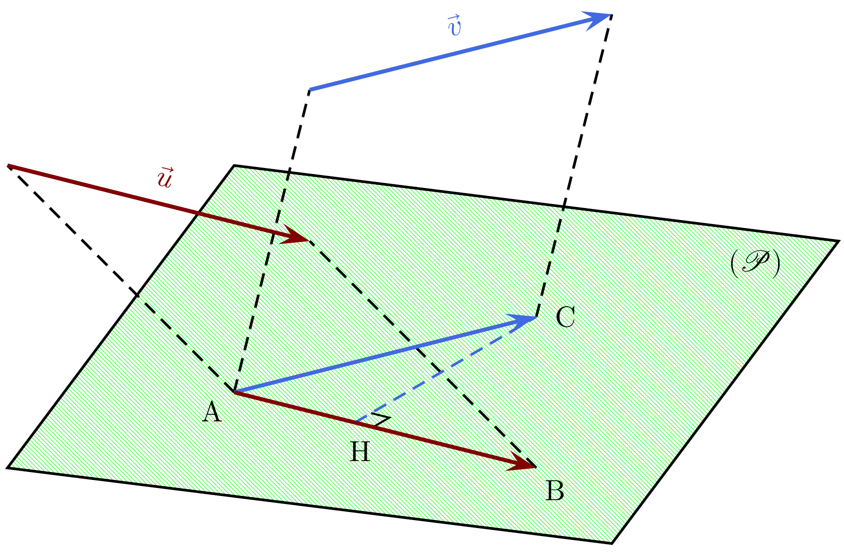


Figure XXXII.5 – Produit scalaire dans l'espace.

Remarque : $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ désigne l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il est compris entre 0 et π.

Le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace se ramenant au produit scalaire de ces deux vecteurs dans un plan, le produit scalaire conserve ses propriétés, en particulier la bilinéarité et la symétrie :

$\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \vec{\mathcal{E}}$, $\forall\ (\alpha\,;\beta) \in \mathbb{R}^2$,

(i) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.

(ii) $\vec{u}.(\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}) = \alpha\vec{u}.\vec{v}+\beta\vec{u}.\vec{w}$
$(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}).\vec{w} = \alpha\vec{u}.\vec{w}+\beta\vec{v}.\vec{w}$

II.2 Expression dans une base orthonormale

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère **orthonormé** $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$.

Proposition 2 : Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ dans une base $\mathcal{B}=\left(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k}\right)$ de $\vec{\mathcal{E}}$.

Alors,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'. \qquad \text{(P.S 3)}$$
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

En particulier,
$$\mathrm{AB} = \left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\| = \sqrt{(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2+(z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A})^2}.$$

Preuve : Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ i.e. $\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$ et $\vec{v}=x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k}$

D'où,

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= (x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}).(x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k})\\ &= xx'\underbrace{\vec{\imath}\cdot\vec{\imath}}_{=\|\vec{\imath}\|=1}+yy'\underbrace{\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}}_{=\|\vec{\jmath}\|=1}+zz'\underbrace{\vec{k}\cdot\vec{k}}_{=\|\vec{k}\|=1}\\ &\qquad+\underbrace{xy'\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}+xz'\vec{\imath}\cdot\vec{k}+yx'\vec{\jmath}\cdot\vec{\imath}+yz'\vec{\jmath}\cdot\vec{k}+zx'\vec{k}\cdot\vec{\imath}+zy'\vec{k}\cdot\vec{\jmath}}_{=0\text{ par orthogonalité de la base }\mathcal{B}=(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})}\\ &= xx'+yy'+zz'.\end{aligned}$$

Exercice 2 : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ on considère $\vec{a}=\vec{\imath}-\vec{k}$ et $\vec{b}=\vec{\imath}+\sqrt{6}\vec{\jmath}-\vec{k}$.

Déterminer une mesure de l'angle non orienté $(\vec{a},\vec{b})$

III PRODUIT VECTORIEL

III.1 Orientation de l'espace

Une fois choisis deux vecteurs unitaires et orthogonaux $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ de l'espace, il reste deux possibilités pour compléter la base orthonormée, comme l'indique les deux schémas ci-dessous dans lesquels $\overrightarrow{k_1}$ et $\overrightarrow{k_2}$ sont des vecteurs unitaires orthogonaux aux vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

On convient de dire que $\left(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\overrightarrow{k_1}\right)$ est directe alors que $\left(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\overrightarrow{k_2}\right)$ est indirecte.

Plusieurs moyens pour s'en souvenir :

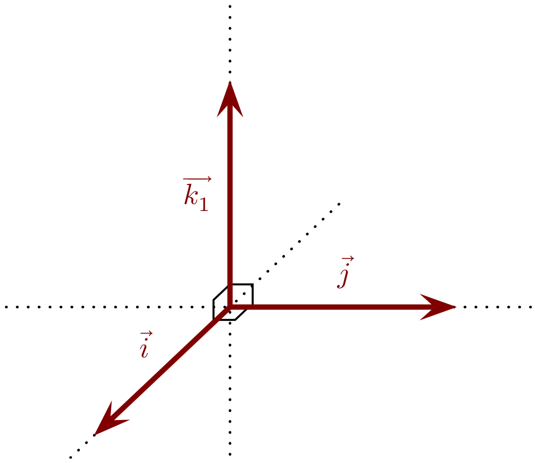


Figure XXXII.6 – Base directe

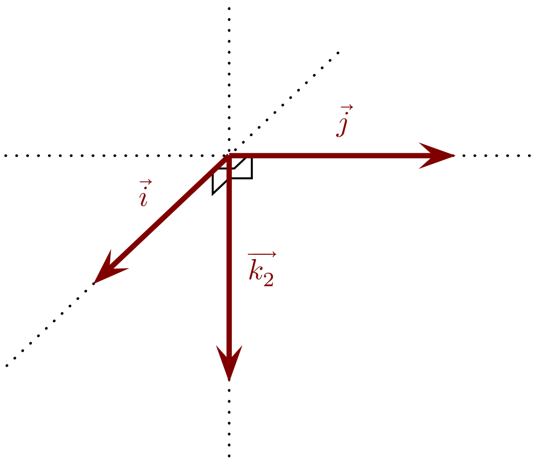


Figure XXXII.7 – Base indirecte

Figure XXXII.8 – Bases orthonormées de l'espace.

— Bonhomme d'Ampère : adossé à $\overrightarrow{k_1}$, il a son pied droit sur $\vec{i}$ et son pied gauche sur $\vec{j}$.
— Règle des « trois doigts » : le pouce de la main droite sur $\vec{i}$, l'index sur $\vec{j}$ et le majeur sur $\overrightarrow{k_1}$.

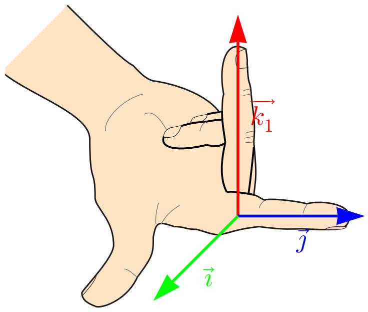


Figure XXXII.9 – Règle des trois doigts pour orienter l'espace de manière directe (avec la main droite !!!!)

Il faut bien avoir conscience qu'on ne peut pas définir de sens direct pour les plans dans l'espace.

Par exemple, si on considère une base directe, si on regarder le plan engendré par $\vec{i}$ et $\vec{j}$ « du dessus » (du côté où les cotes sont positives), la base $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ de ce plan parait directe.

Mais vue « du dessous », elle semble indirecte.

Pour toute la suite du chapitre, on fixe une bonne fois pour toutes une base orthonormale de l'espace $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\overrightarrow{k_1}\right)$. Cette hypothèse ne sera pas rappelée dans tous les énoncés, qui pour certains seraient faux dans une base quelconque.

Proposition 3 : Soit $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base orthonormale.

- Si l'on remplace un des vecteurs par son opposé, la base change d'orientation.
- Si on échange deux vecteurs, la base change d'orientation.
- Si on effectue une permutation circulaire sur les vecteurs, la base ne change pas d'orientation.

Remarque : Ces notions restent applicables à toute base de l'espace, même si elle n'est pas orthonormale.

III.2 Produit vectoriel en dimension 3

Il n'est pas possible de définir un produit mixte de deux vecteurs dans l'espace de la même façon qu'on le fait dans le plan, car cette définition faisait apparaitre un sinus, dont le signe dépend de l'orientation de l'angle entre les vecteurs.

Or, comme on l'a vu, l'orientation des plans dans l'espace n'est pas possible. L'outil qui remplace en quelque sorte le produit mixte est le produit vectoriel.

Définition 7 (Produit vectoriel) : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\mathcal{E}}$.
On appelle *produit vectoriel* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, le vecteur défini par :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \\ \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \sin\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) \vec{k} & \text{sinon où } \vec{k} \text{ est unitaire et directement orthogonal à } (\vec{u}\,;\vec{v}) \end{cases} \quad \text{(P.V 1)}$$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\mathcal{E}}$.

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}}$$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ désigne l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il est compris strictement entre 0 et π.

En particulier, $\sin\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) > 0$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a la même direction et le même sens que $\vec{k}$.

Corollaire 3.1 : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors $(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe de l'espace.

Remarque : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ est toujours l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice 3 : Soit $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base orthonormale directe de $\vec{\mathcal{E}}$.

Déterminer $\vec{i} \wedge \vec{j}$, $\vec{i} \wedge \vec{k}$ et $\vec{j} \wedge \vec{k}$.

III.3 Propriétés algébriques

Proposition 4 : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$ et soient α et β des réels.

Alors :

1. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ (Le produit vectoriel est anti-symétrique).
2. $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \wedge \vec{w} = \alpha\vec{u} \wedge \vec{w} + \beta\vec{v} \wedge \vec{w}$
   $\vec{u} \wedge (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha\vec{u} \wedge \vec{v} + \beta\vec{u} \wedge \vec{w}$ (Le produit vectoriel est linéaire à gauche et à droite)

On dit que l'application

$$\wedge : \begin{array}{ccc} \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} & \longrightarrow & \vec{\mathcal{E}} \\ (\vec{u}\,;\vec{v}) & \longmapsto & \vec{u} \wedge \vec{v} \end{array}$$

est bilinéaire (2) alternée (1).

Preuve :

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$.
   - Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{v} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ et la propriété est vérifiée.
   - Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, on note $\vec{k}$ le vecteur unitaire et directement orthogonal à $(\vec{u}\,;\vec{v})$. $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{k}\right)$ est alors une base directe de l'espace et

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \sin\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)\vec{k}.$$

   La base $\left(\vec{v}\,;\vec{u}\,;-\vec{k}\right)$ est aussi une base directe de l'espace et le vecteur $-\vec{k}$ est un vecteur unitaire directement orthogonal à $(\vec{v}\,;\vec{u})$.

   D'où,

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \sin\left(\widehat{\vec{v}\,;\vec{u}}\right)\left(-\vec{k}\right) = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \sin\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)\vec{k} = -\vec{u} \wedge \vec{v}.$$

2. Résultat admis !

ATTENTION

Le produit vectoriel n'est pas associatif.

$$\left(\vec{i} \wedge \vec{j}\right) \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \neq \vec{i} \wedge \left(\vec{j} \wedge \vec{j}\right) = \vec{i} \wedge \vec{0} = \vec{0}.$$

De ce fait, l'écriture $\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w}$ n'a pas de sens.

Exercice 4 : Soit A, B, C trois points de l'espace. Montrer que pour tout point M de l'espace :

$$\overrightarrow{\mathrm{MA}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{MC}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{MA}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$

III.4 Expression dans une base orthonormée directe

Proposition 5 : Soit $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base orthonormale directe de $\vec{\mathcal{E}}$.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix} yz' - y'z \\ x'z - xz' \\ xy' - x'y \end{pmatrix}$.

Autrement dit,

$$\vec{u} \wedge \vec{v}\left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} ; -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\right).$$

Les formules des coordonnées sont en fait des formules de déterminant où on « oublie » dans les deux vecteurs la coordonnée qu'on est en train de calculer pour le produit vectoriel. Attention tout de même au changement de signe très piégeux pour la deuxième coordonnée !

Exemple 1 : On peut toujours calculer des aires de triangle à l'aide du produit vectoriel.
Par exemple, si A $(1\,;2\,;3)$, B $(-1\,;1\,;-1)$ et C $(0\,;2\,;4)$ alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ puis } \overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, $\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}} = \dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\| = \dfrac{\sqrt{38}}{2}$.

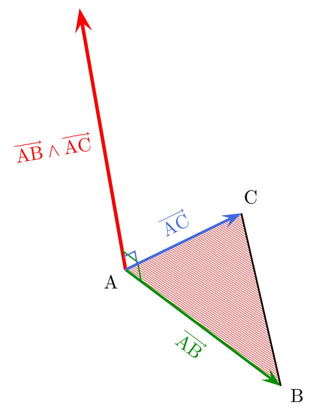


Figure XXXII.10 – $\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}} = \dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\|$.

Preuve : *Soit $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base orthonormale directe de $\vec{\mathcal{E}}$.*
Il suffit simplement d'utiliser la bilinéarité et l'anti-symétrie du produit vectoriel dans la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}
\vec{u} \wedge \vec{v} &= \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) \wedge \left(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}\right) \\
&= \cancel{xx'\vec{i} \wedge \vec{i}} + xy' \underbrace{\vec{i} \wedge \vec{j}}_{=\vec{k}} + xz' \underbrace{\vec{i} \wedge \vec{k}}_{=-\vec{j}} + yx' \underbrace{\vec{j} \wedge \vec{i}}_{=-\vec{k}} + \cancel{yy'\vec{j} \wedge \vec{j}} + yz' \underbrace{\vec{j} \wedge \vec{k}}_{=\vec{i}} \\
&\qquad + zx' \underbrace{\vec{k} \wedge \vec{i}}_{=\vec{j}} + zy' \underbrace{\vec{k} \wedge \vec{j}}_{=-\vec{i}} + \cancel{zz'\vec{k} \wedge \vec{k}} \\
&= (yz' - y'z)\vec{i} + (x'z - xz')\vec{j} + (xy' - x'y)\vec{k}.
\end{aligned}$$

Pour répondre définitivement à la non-associativité, on peut alors démontrer le résultat suivant :

Corollaire 5.1 (Double produit vectoriel) : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$.

$$\vec{u} \wedge \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right) = \left(\vec{u} \cdot \vec{w}\right)\vec{v} - \left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)\vec{w}.$$

Le vecteur $\vec{u} \wedge \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right)$ appartient toujours au sous-espace engendré par $\vec{v}$ et $\vec{w}$, puisqu'il est orthogonal à l'orthogonal de ce sous-espace. Ce vecteur est donc combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$. La formule du double produit vectoriel explicite les coefficients de cette combinaison sous forme de produits scalaires.

Preuve : *La démonstration n'apporte aucune difficulté dans une base orthonormée directe en utilisant les expressions des produits scalaires et vectoriels dans cette base.*

IV Déterminant de trois vecteurs

Définition 8 : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$.

On appelle *déterminant* ou *produit mixte* de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, noté $\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w})$, le réel :

$$\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = \left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right).\vec{w}.$$

Par analogie avec le plan, le produit mixte de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est également noté $\left[\vec{u};\ \vec{v};\ \vec{w}\right]$ mais cette notation sera rapidement abandonnée à mesure que l'on gagnera en dimension de l'espace.

Exemple 2 : Si $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ est une base orthonormée directe alors

$$\det\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right) = \left(\vec{i}\wedge\vec{j}\right).\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{k} = \left\|\vec{k}\right\|^2 = 1.$$

IV.1 Interprétation géométrique du produit mixte

Proposition 6 : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$ **non coplanaires**.

Alors, $|\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w})|$ est l'aire du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

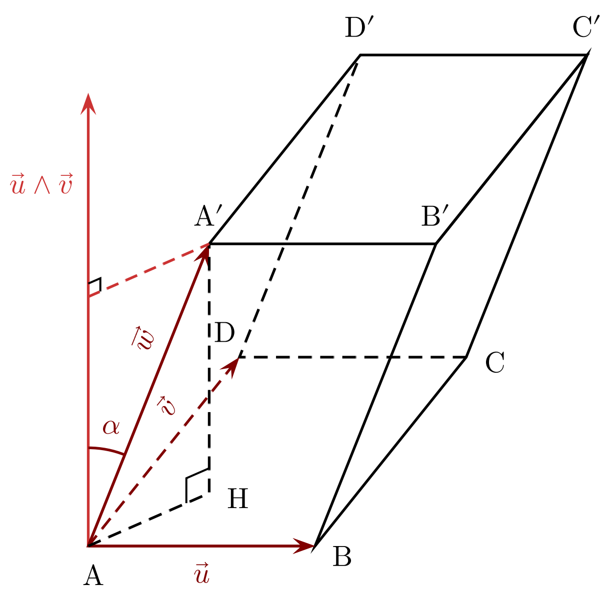


Figure XXXII.11 – Volume d'un parallélépipède dans l'espace.

Preuve : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$ **non coplanaires**.

On note ABCDA′B′C′D′ le parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Notons $\alpha = (\widehat{\vec{w}\,;\vec{u}\wedge\vec{v}}) \in [0\,;\pi[$ et H le projeté orthogonal de A′ sur le plan (ABCD).

La hauteur de ce parallélépipède est $A'H = \|\vec{w}\| \times |\cos\alpha|$.

La base est un parallélogramme dont l'aire est égale à $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin\widehat{(\vec{u}\,;\vec{v})} = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$.

Le volume du parallélépipède est donc
$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \times \|\vec{w}\| \times |\cos\alpha| = \left|\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right).\vec{w}\right| \\ &= |\det\,(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w})|\,.\end{aligned}$$

IV.2 Expression du déterminant dans une base orthonormée directe

Proposition 7 : Soit $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ est une base orthonormée directe de $\vec{\mathcal{E}}$.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}x"\\y"\\z"\end{pmatrix}$ alors

$$\det\,(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = \begin{vmatrix}x & x' & x"\\ y & y' & y"\\ z & z' & z"\end{vmatrix} = x\begin{vmatrix}y' & y"\\ z' & z"\end{vmatrix} - y\begin{vmatrix}x' & x"\\ z' & z"\end{vmatrix} + z\begin{vmatrix}x' & x"\\ y' & y"\end{vmatrix} \qquad (\det{}_{C_1})$$

$$= -x'\begin{vmatrix}y & y"\\ z & z"\end{vmatrix} + y'\begin{vmatrix}x & x"\\ z & z"\end{vmatrix} - z'\begin{vmatrix}x & x"\\ y & y"\end{vmatrix} \qquad (\det{}_{C_2})$$

$$= x"\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix} - y"\begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix} + z"\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}. \qquad (\det{}_{C_3})$$

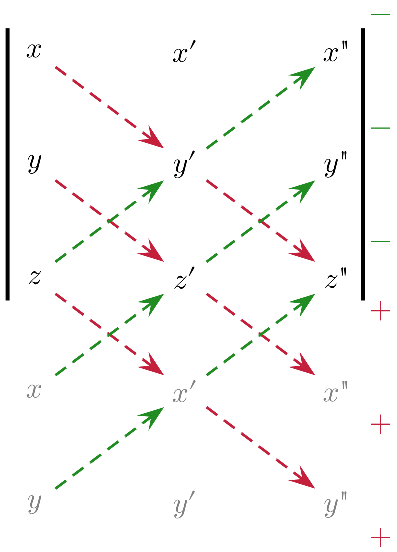
On dit que l'on a respectivement développé par rapport à la première, deuxième ou troisième colonne.

Preuve : Il suffit de calculer $\det\,(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right).\vec{w}$ dans la base orthonormée directe $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$:

$$\det\,(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right).\vec{w} = \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\end{pmatrix} . \begin{pmatrix}x"\\y"\\z"\end{pmatrix}$$

$$= x"\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix} - y"\begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix} + z"\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix} = (\det{}_{C_3}).$$

En l'état de nos connaissances, pour montrer que $(\det{}_{C_3})=(\det{}_{C_2})=(\det{}_{C_1})$, on ne peut malheureusement que développer chacune de ces expressions et constater leur égalité. Laissé à l'étudiant courageux.



$$= xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - \left(zy'x'' + xz'y'' + yx'z''\right)$$

Pour calculer un peu plus rapidement les produits mixtes (et ne pas se tromper dans les signes), on peut appliquer la règle de Sarrus [1]. On écrit le diagramme ci-contre :

- On additionne les trois produits obtenus le long des diagonales descendantes,
- et on soustrait les trois produits obtenus le long des diagonales ascendantes.

Figure XXXII.12 – Règle de Sarrus

Corollaire 7.1 : Soit $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ est une base orthonormée directe de $\vec{\mathcal{E}}$.

$$\det\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right) = 1.$$

Exercice 5 : Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs :

$$\vec{u}\,(1\,;2\,;-1),\ \vec{v}\,(-1\,;3\,;-1) \text{ et } \vec{w}\,(-8\,;1\,;0).$$

IV.3 Propriétés algébriques

Proposition 8 : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{e}$ des vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$ et soient α et β des réels.

Alors :

1. $\det\,(\alpha\vec{u} + \beta\vec{r}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = \alpha\det\,(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) + \beta\det\,(\vec{r}\,;\vec{v}\,;\vec{w})$.
   $\det\,(\vec{u}\,;\alpha\vec{v} + \beta\vec{r}\,;\vec{w}) = \alpha\det\,(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) + \beta\det\,(\vec{u}\,;\vec{r}\,;\vec{w})$.
   $\det\,(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\alpha\vec{w} + \beta\vec{r}) = \alpha\det\,(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) + \beta\det\,(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{r})$.

On dit que le déterminant est *trilinéaire* dans $\vec{\mathcal{E}}$.

2. $\det\,(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = \det\,(\vec{w}\,;\vec{u}\,;\vec{v}) = \det\,(\vec{v}\,;\vec{w}\,;\vec{u})$.

On dit que le déterminant est invariant par permutation circulaire.

[1]. Pierre Frédéric Sarrus, né le **10 mars 1798** à Saint-Affrique et mort le **20 novembre 1861**, est un mathématicien français.

Ses travaux portent sur les méthodes de résolution des équations numériques et sur le calcul des variations. En 1853, il résout l'un des problèmes les plus ardus de la mécanique des pièces articulées, celui de la transformation des mouvements rectilignes alternatifs en mouvements circulaires continus.

Mais il est surtout célèbre auprès des étudiants en mathématiques pour une règle de calcul des déterminants d'ordre 3 qui porte son nom. Celle-ci fut explicitée pour la première fois dans l'article « Nouvelles méthodes pour la résolution des équations » publié à Strasbourg en 1833.

3 $\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = -\det(\vec{v}\,;\vec{u}\,;\vec{w}) = -\det(\vec{u}\,;\vec{w}\,;\vec{v}) = -\det(\vec{w}\,;\vec{v}\,;\vec{u})$.

On dit que le déterminant est anti-symétrique.

Le déterminant change donc de signe si l'on échange deux vecteurs.

Preuve : Rien de bien compliqué en utilisant les propriétés et définitions précédentes.

IV.4 Condition de coplanarité

Théorème 9 : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$. Alors,

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si $\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = 0$.

Preuve : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$.

Soit $O \in \mathcal{E}$ et A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$.

$\Rightarrow$: Supposons que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient coplanaires.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ puis $\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right).\vec{w} = 0$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors $C \in (OAB)$ et $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ i.e. $\exists\,(\alpha\,;\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

  On a alors :

  $$\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = \det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{u}) + \beta\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{v})\,.$$

  $$\text{Or, } \begin{cases} \vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u} \implies \det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{u}) = \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right).\vec{u} = 0 \\ \vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v} \implies \det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{v}) = \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right).\vec{v} = 0 \end{cases}$$

  Donc, $\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = 0$.

$\Leftarrow$: Supposons que $\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = 0$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, on pose $P \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{OP} = \vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$.

  Par définition, $\overrightarrow{OP}$ est directement orthogonal à $(\vec{u}\,;\vec{v})$ i.e. orthogonal au plan (OAB).

  Or, $\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = 0 \iff \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right).\vec{w} = 0 \iff \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ i.e. $C \in (OAB)$.

  Il en résulte que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Exercice 6 : Soient $\vec{u}(-1,1,1), \vec{v}(3,1,2), \vec{w}(1,1,2)$ trois vecteurs de l'espace.
$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ sont-ils coplanaires ? Si non forment-ils une base directe ?

À retenir ! :

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ un des des vecteurs } \vec{u},\ \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ est nul} \\ \text{ou} \\ \bullet \text{ deux des vecteurs } \vec{u},\ \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont égaux} \\ \text{ou} \\ \bullet \text{ deux des vecteurs } \vec{u},\ \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont colinéaires} \\ \text{ou} \\ \bullet \text{ un des vecteurs } \vec{u},\ \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ est combinaison} \\ \text{linéaire des deux autres} \end{array} \right. , \text{ alors } \det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = 0.$$

L'application

$$\begin{array}{rccc} \det\ : & \vec{\mathcal{E}}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) & \longmapsto & \det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) \end{array}$$

est une forme trilinéaire alternée.

Remarque : On peut prouver à partir du caractère alterné que le produit mixte est antisymétrique :

En effet,

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}+\vec{v}\,;\vec{u}+\vec{v}\,;\vec{w}) = 0 &\iff \cancel{\det(\vec{u}\,;\vec{u}\,;\vec{w})} + \det(\vec{v}\,;\vec{u}\,;\vec{w}) \\ &\qquad + \det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) + \cancel{\det(\vec{v}\,;\vec{v}\,;\vec{w})} = 0 \\ &\iff \det(\vec{v}\,;\vec{u}\,;\vec{w}) + \det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = 0 \\ &\iff \det(\vec{v}\,;\vec{u}\,;\vec{w}) = -\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}). \end{aligned}$$

Il y a, en fait, équivalence entre les deux propriétés si la caractéristique du corps est différente de 2.

Exercice 7 : Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

1. Montrer l'inégalité de Hadamard :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \leqslant \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|.$$

2. Montrer l'identité de Lagrange :

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 + \|(\vec{u}\wedge\vec{v})\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2.$$

V Droites et plans de l'espace

V.1 Représentations paramétriques

L'espace est muni d'un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$.

Proposition 10 (Droite) : Soient $\mathrm{A}\,(x_{\mathrm{A}}\,;y_{\mathrm{A}}\,;z_{\mathrm{A}}) \in \mathscr{E}$ et $\vec{u}\,(\alpha\,;\beta\,;\gamma) \in \vec{\mathscr{E}}$ un vecteur non nul.

La droite $(\mathscr{D}) = \mathrm{A} + \mathbb{R}\vec{u}$ passant par A et dirigée par $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_{\mathrm{A}} + \alpha t \\ y = y_{\mathrm{A}} + \beta t \\ z = z_{\mathrm{A}} + \gamma t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

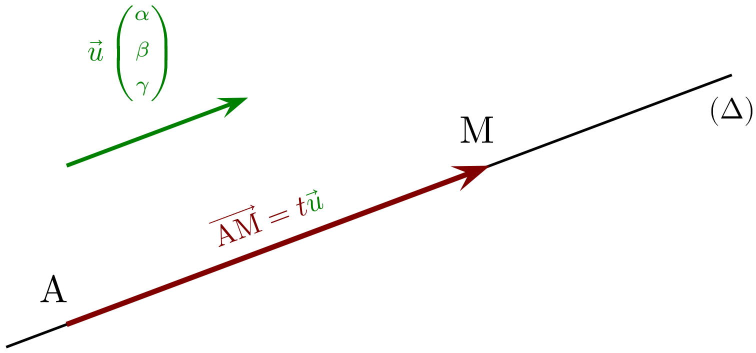


Figure XXXII.13 – Équations paramétriques d'une droite.

Remarques :

— Les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ représentent les coordonnées d'un point $\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)$ quelconque qui appartiendrait à la droite $(\mathscr{D})$.

Les points de la droite $(\mathscr{D})$ sont alors obtenus en faisant varier le paramètre t dans $\mathbb{R}$.

— En particulier, le couple $(\mathrm{A}, \vec{u})$ doit être vu comme un repère de la droite $(\mathscr{D})$. Le paramètre t est alors l'abscisse d'un point M de la droite dans celui-ci.

— Pourquoi appeler le paramètre t ?

Tout simplement pour faire référence à la physique où un mobile $\mathrm{M}(t)$ sera représenté à tout instant t par ses coordonnées, dépendantes elles-mêmes de t, par ses « équations-horaires » :

$$\mathrm{M}(t) \begin{cases} x(t) = x_{\mathrm{A}} + t\alpha \\ y(t) = y_{\mathrm{A}} + t\beta \\ z(t) = z_{\mathrm{A}} + t\gamma \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

— Enfin, avec une notation plus orientée algèbre linéaire,

$$(\mathscr{D}) = \mathrm{A} + \operatorname{vect}(\vec{u}).$$

Preuve : *Il suffit simplement de traduire le fait que :*

$$\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z) \in (\mathscr{D}) \iff \overrightarrow{\mathrm{AM}} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R} \,/\, \overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\vec{u} \iff \exists t \in \mathbb{R} \,/\, \begin{pmatrix} x - x_{\mathrm{A}} \\ y - y_{\mathrm{A}} \\ z - z_{\mathrm{A}} \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R} \,/\, \begin{cases} x - x_{\mathrm{A}} = t\alpha \\ y - y_{\mathrm{A}} = t\beta \\ z - z_{\mathrm{A}} = t\gamma \end{cases} \iff \exists t \in \mathbb{R} \,/\, \begin{cases} x = x_{\mathrm{A}} + t\alpha \\ y = y_{\mathrm{A}} + t\beta \\ z = z_{\mathrm{A}} + t\gamma \end{cases}$$

Remarque : Pour une demi-droite, il suffit de remplacer $t \in \mathbb{R}$, par $t \in [\alpha\,;+\infty[$ ou $t \in]-\infty\,;\alpha[$, par exemple, pour des demies-droites fermée et ouverte respectivement.

Pour un segment il suffira de remplacer $t \in \mathbb{R}$ par $t \in [a\,;b]$.

Proposition II (Plan) : Soit $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A}\,;z_\mathrm{A}) \in \mathscr{E}$ un point et soient $\vec{u}(\alpha_1\,;\beta_1\,;\gamma_1)$ et $\vec{v}(\alpha_2\,;\beta_2\,;\gamma_2)$ deux vecteurs non colinéaires de $\vec{\mathscr{E}}$.

Le plan $(\mathscr{P}) = \mathrm{A} + \mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v}$, passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ admet pour représentation paramétrique : représentation paramétrique, de la forme :

$$(\mathscr{P}) : \begin{cases} x = x_\mathrm{A} + t\alpha_1 + s\alpha_2 \\ y = y_\mathrm{A} + t\beta_1 + s\beta_2 \\ z = z_\mathrm{A} + t\gamma_1 + s\gamma_2 \end{cases}, \ (t\,;s) \in \mathbb{R}^2.$$

$$(\mathscr{P}) = \mathrm{A} + \mathrm{vect}\,(\vec{u};\,\vec{v})\,.$$

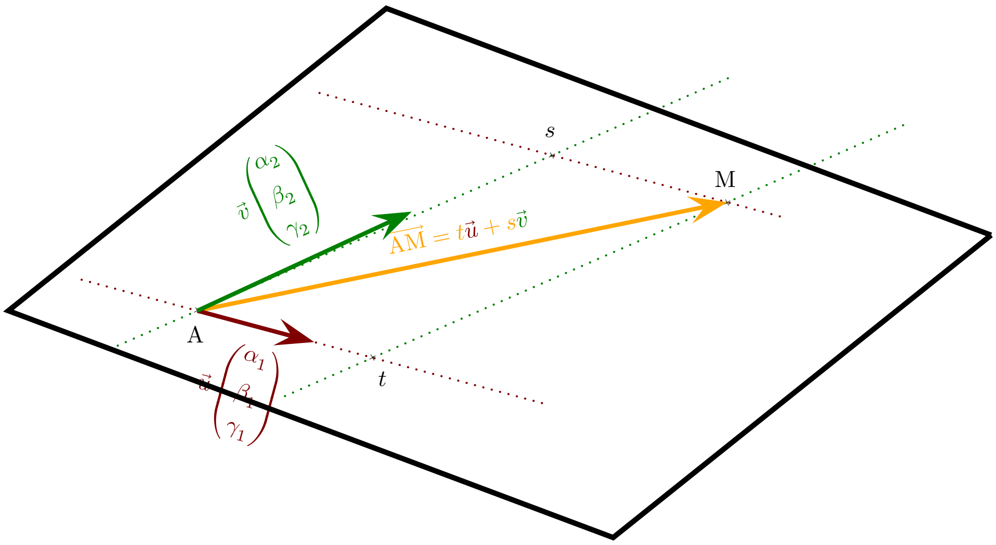


Figure XXXII.14 – Équations paramétriques d'un plan.

Preuve : Le point M appartient au plan $(\mathscr{P})$ si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires :

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\,(x\,;y\,;x) \in (\mathscr{P}) &\iff \exists\ (t\,;s) \in \mathbb{R}^2\ /\ \overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\vec{u} + s\vec{v} \\
&\iff \exists\ (t\,;s) \in \mathbb{R}^2\ /\ \begin{pmatrix} x - x_{\mathrm{A}} \\ y - y_{\mathrm{A}} \\ z - z_{\mathrm{A}} \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \\
&\iff \exists\ (t\,;s) \in \mathbb{R}^2\ /\ \begin{cases} x - x_{\mathrm{A}} = t\alpha_1 + s\alpha_2 \\ y - y_{\mathrm{A}} = t\beta_1 + s\beta_2 \\ z - z_{\mathrm{A}} = t\gamma_1 + s\gamma_2 \end{cases} \\
&\iff \exists\ (t\,;s) \in \mathbb{R}^2\ /\ \begin{cases} x = x_{\mathrm{A}} + t\alpha_1 + s\alpha_2 \\ y = y_{\mathrm{A}} + t\beta_1 + s\beta_2 \\ z = z_{\mathrm{A}} + t\gamma_1 + s\gamma_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

V.2 Équations cartésiennes de plan

Proposition 12 : Soit $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ un repère orthonormé direct de $\mathscr{E}$. Soit $\mathrm{A}\,(x_{\mathrm{A}}\,;y_{\mathrm{A}}\,;z_{\mathrm{A}}) \in \mathscr{E}$ un point et soient $\vec{u}\,(\alpha_1\,;\beta_1\,;\gamma_1)$ et $\vec{v}\,(\alpha_2\,;\beta_2\,;\gamma_2)$ deux vecteurs non colinéaires de $\vec{\mathscr{E}}$.

Le plan $(\mathscr{P})$ passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ admet pour équation cartésienne :

$$\begin{vmatrix} x - x_{\mathrm{A}} & \alpha_1 & \alpha_2 \\ y - y_{\mathrm{A}} & \beta_1 & \beta_2 \\ z - z_{\mathrm{A}} & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Preuve : Soit $(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z) \in (\mathscr{P}) \iff \overrightarrow{\mathrm{AM}},\ \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont coplanaires} \iff \det\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right).$$

Proposition 13 : Soit $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ un repère quelconque de $\mathscr{E}$.

1. Tout plan $(\mathscr{P})$ admet une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a\,;b\,;c) \neq (0\,;0\,;0)$.

   Cette équation est appelée *équation cartésienne* du plan $(\mathscr{P})$.
2. Réciproquement, soit $(a;\ b;\ c;\ d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $(a\,;b\,;c) \neq (0\,;0\,;0)$ alors l'ensemble des points $\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)$ dont les coordonnées sont solutions de l'équation $ax+by+cz+d=0$ est un plan $(\mathscr{P})$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Un point M $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de l'espace appartiendra donc au plan $(\mathscr{P})$ si, et seulement si ses coordonnées sont solutions de l'équation à 3 inconnues $ax + by + cz + d = 0$.

Remarque : L'équation cartésienne n'est pas unique. On peut toujours multiplier les coefficients a, b et c par un facteur k non nul *i.e.* remplacer le vecteur normal $\vec{n}$ par un vecteur qui lui est colinéaire.

Preuve : Deux implications à montrer :

- Si $\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)$ est un point de l'espace appartenant au plan $(\mathscr{P})$ passant par $\mathrm{A}\,(x_{\mathrm{A}}\,;y_{\mathrm{A}}\,;z_{\mathrm{A}})$ et de vecteur normal $\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$ alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}.\vec{n} = 0 \iff \begin{pmatrix} x - x_{\mathrm{A}} \\ y - y_{\mathrm{A}} \\ z - z_{\mathrm{A}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$a(x - x_{\mathrm{A}}) + (y - y_{\mathrm{A}}) + (z - z_{\mathrm{A}}) = 0 \iff ax + by + cz \underbrace{- (ax_{\mathrm{A}} + by_{\mathrm{A}} + cz_{\mathrm{A}})}_{d} = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0.$$

- Réciproquement, supposons que les coordonnées d'un point $\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)$ soient solution de l'équation $ax + by + cz + d = 0$ et montrons qu'il appartient alors à un certain plan $(\mathscr{P})$ dont on devra trouver un vecteur normal $\vec{n}$ et un point A.

  Comme a, b et c sont non tous nuls, on peut, par exemple, supposer que $a \neq 0$. Le point $\mathrm{A}\left(-\dfrac{d}{a}\,;0\,;0\right)$ appartient donc au plan $(\mathscr{P})$.

  On peut aussi poser $\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$, vecteur non nul car a, b et c sont non tous nuls.

  On calcule alors $\overrightarrow{\mathrm{AM}}.\vec{n} = \begin{pmatrix} x + \dfrac{d}{a} \\ y \\ z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \left(x + \dfrac{d}{a}\right) \times a + by + cz$

  $= ax + by + cz + d = 0.$

  Le point M appartient donc au plan $(\mathscr{P})$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Exemple 3 : Les Plans $(\mathrm{O};\,\vec{i};\,\vec{j})$, $(\mathrm{O};\,\vec{i};\,\vec{k})$ et $(\mathrm{O};\,\vec{j};\,\vec{k})$ passant par O $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de vecteur normal respectif $\vec{k}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{i}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ont, respectivement, comme équation $z = 0$, $y = 0$ et $x = 0$.

Exercice 8 : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Déterminer une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques du plan :

1. passant par $\mathrm{A}(1, -1, 2)$ et dirigée par les vecteurs $\vec{u}(2, 0, 1)$ et $\vec{v}(2, 1, 0)$.
2. passant par les points $\mathrm{B}(-1, 1, 1), \mathrm{C}(1, -1, 1)$ et $\mathrm{D}(1, 1, -1)$.

3 passant par C et normal au vecteur $\vec{u}$.

Définition 9 (Équation normale d'un plan) : Soient a, b, c et d des réels tels que $(a\,;b\,;c) \neq (0\,;0\,;0)$ et $(\mathscr{P})$ le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$.

L'équation est dite normale si $a^2+b^2+c^2=1$ *i.e.* $\|\vec{n}\|=1$ où $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Théorème 14 : Soient $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs $\vec{n} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{n'} \neq \vec{0}$.

- Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires, les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont sécants suivant une droite $(\mathscr{D})$ dirigée par $\vec{n} \wedge \overrightarrow{n'}$.
- Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires et si A est un point quelconque de $(\mathscr{P})$:
  - Si $\text{A} \in (\mathscr{P}')$, les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont confondus.
  - Si $\text{A} \notin (\mathscr{P})$, les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont strictement parallèles.
- $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont perpendiculaires si, et seulement si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux.

Ainsi,

$$\boxed{(\mathscr{P}) \,/\!/\, (\mathscr{P}') \iff \vec{n} \wedge \overrightarrow{n'} = \vec{0} \quad \text{et} \quad (\mathscr{P}) \perp (\mathscr{P}') \iff \vec{n} \cdot \overrightarrow{n'} = 0.}$$

Petite remarque en passant : deux droites contenues dans des plans perpendiculaires ne sont pas nécessairement perpendiculaires (elles peuvent être parallèles), et deux droites incluses dans des plans parallèles ne sont pas forcément parallèles (elles peuvent être orthogonales).

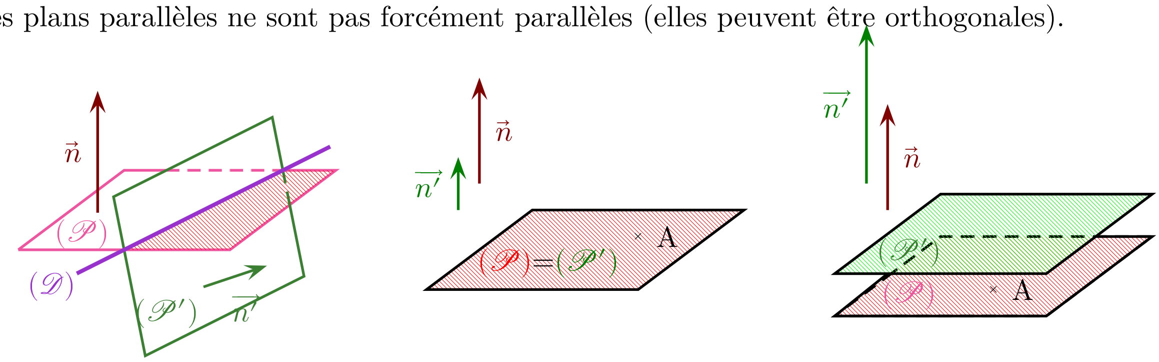


Table XXXII.1 – Position relative de plans.

Preuve :

– *Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires alors les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont parallèles. Reste à savoir s'ils sont confondus ou disjoints.*

– *Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires, les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont sécants suivant une droite $(\mathscr{D})$.*

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in (\mathscr{P}) \cap (\mathscr{P}') &\iff \begin{cases} \mathrm{M} \in (\mathscr{P}) \\ \mathrm{M} \in (\mathscr{P}') \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{AM}} \perp \vec{n} \\ \overrightarrow{\mathrm{AM}} \perp \vec{n'} \end{cases} \\ &\iff \overrightarrow{\mathrm{AM}} \text{ est colinéaire à } \vec{n} \wedge \vec{n'}. \\ &\iff \mathrm{M} \text{ appartient à la droite passant par A et dirigée par } \vec{n} \wedge \vec{n'}. \end{aligned}$$

Pour résumé : $\vec{n} \wedge \vec{n'} \neq \vec{0} \implies (\mathscr{D}) = (\mathscr{P}) \cap (\mathscr{P}')$ *est une droite dirigée par* $\vec{n} \wedge \vec{n'}$.

Remarque : Dans l'espace, une droite $(\mathscr{D})$ n'est pas représentée par une seule équation cartésienne mais par deux : celles de deux plans sécants dont elle est l'intersection.

Plus précisément, en posant

$$\begin{cases} (\mathscr{P}) : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ un plan de vecteur normal } \overrightarrow{n_1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}, \\ (\mathscr{P}') : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \text{ un plan de vecteur normal } \overrightarrow{n_2} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}. \end{cases}$$

Si $\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} \neq \vec{0}$ alors $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont sécants suivant une droite $(\mathscr{D})$ dont un système d'équations cartésienne est :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Exercice 9 : Soit $\mathrm{A}\,(0\,;-1\,;4)$ et $(\mathscr{D}) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Déterminer une équation cartésienne du plan contenant A et $(\mathscr{D})$.

VI Distance

VI.1 Projection orthogonale d'un point sur un plan ou sur une droite

Définition 10 (Projeté orthogonal sur un plan) : Soient un plan $(\mathscr{P})$ de vecteur normal $\vec{n}$ et un point A de l'espace.

On appelle *projeté orthogonal* de A sur $(\mathscr{P})$, l'intersection du plan $(\mathscr{P})$ et de la droite de vecteur directeur $\vec{n}$ passant par A.

Remarque : Si $\mathrm{A} \in (\mathscr{P})$, il est son propre projeté orthogonal.

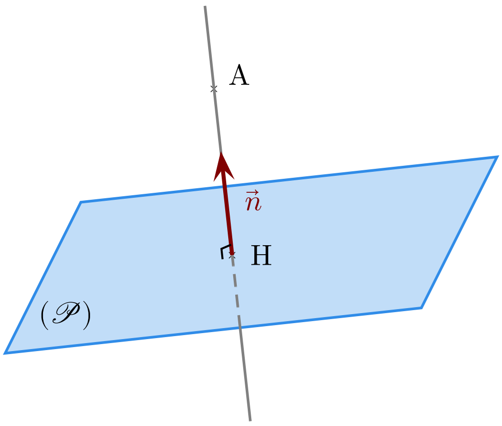


Figure XXXII.15 – H est le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{P})$.

Méthode 1 (Déterminer un projeté orthogonal sur un plan) :
Soient $(\mathscr{P})$ un plan et A un point de l'espace.

1. On détermine un vecteur normal au plan.
2. On trouve une représentation paramétrique de la droite $(\mathscr{D})$ perpendiculaire au plan passant par A.
3. On trouve le point d'intersection de $(\mathscr{D})$ et de $(\mathscr{P})$.

Exercice 10 : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point A sur le plan $(\mathscr{P})$.

1. $A\,(1\,;-1\,;0)$ et $(\mathscr{P})$: $2x - y - 16 = 0$.
2. $A\,(2\,;1\,;3)$ et $(\mathscr{P})$: $x + y + z = 0$.

Définition 11 (Projeté orthogonal sur une droite) : Soient une droite $(\mathscr{D})$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et un point A de l'espace.

On appelle *projeté orthogonal* de A sur $(\mathscr{D})$, l'intersection de la droite $(\mathscr{D})$ et du plan de vecteur normal $\vec{u}$ et passant par A.

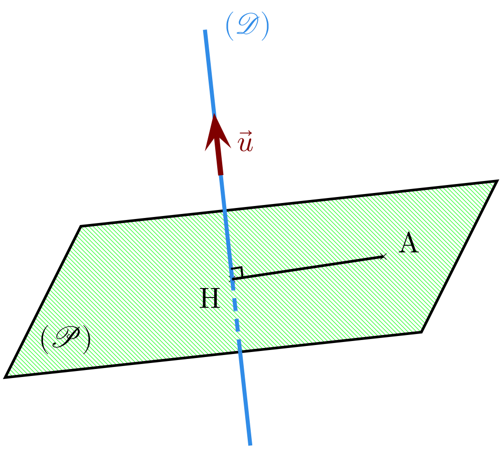


Figure XXXII.16 – H est le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{D})$.

Remarque : Ici aussi, si $A \in (\mathscr{D})$, il est son propre projeté orthogonal.

VI.2 Distance d'un point à un plan

Définition 12 : Soient $(\mathscr{P})$ un plan et A un point de l'espace.
On appelle *distance de* A *à* $(\mathscr{P})$, notée $d(\mathrm{A}\,;(\mathscr{P}))$, la plus petite des longueurs AM où $\mathrm{M} \in (\mathscr{P})$.

$$d(\mathrm{A}\,;(\mathscr{P})) = \min\{\mathrm{AM},\ \mathrm{M} \in (\mathscr{P})\}.$$

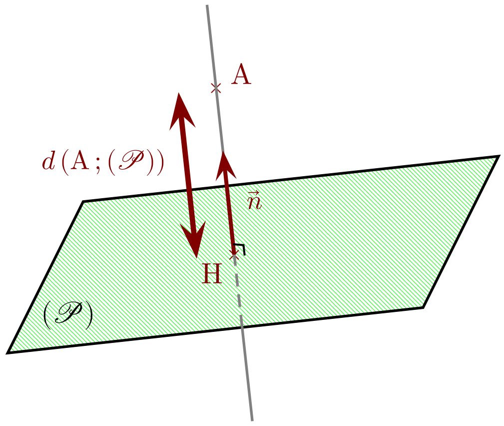


Figure XXXII.17 – $d(\mathrm{A}\,;(\mathscr{P})) = \mathrm{AH}$.

Remarque : Si $\mathrm{A} \in (\mathscr{P})$ alors $d(\mathrm{A}\,;(\mathscr{P})) = 0$!

Théorème 15 : Soient $(\mathscr{P})$ un plan et A un point de l'espace.
Si H est le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{P})$ alors $d(\mathrm{A}\,;(\mathscr{P})) = \mathrm{AH}$.

Preuve : Soient $(\mathscr{P})$ un plan, A un point, H son projeté orthogonal sur $(\mathscr{P})$. On considère M un point quelconque de $(\mathscr{P})$.
Par construction, le triangle AMH est rectangle en H donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\mathrm{AM}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{HM}^2 \implies \mathrm{AM}^2 \geqslant \mathrm{AH}^2 \iff \mathrm{AM} \geqslant \mathrm{AH}.$$

La longueur AH est donc bien la plus petite longueur d'un point de $(\mathscr{P})$ à A.
Donc $d(\mathrm{A}\,;(\mathscr{P})) = \mathrm{AH}$.

Proposition 16 : Soient $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ un repère quelconque et $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$.

Cas d'un plan défini par un point et un vecteur normal :
Soit $(\mathscr{P})$ le plan passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

$$\mathrm{d}(\mathrm{M}\,;(\mathscr{P})) = \frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|}{\|\vec{n}\|}. \qquad \text{(XXXII.3)}$$

Cas d'un plan défini par un point et deux vecteurs directeurs :
Soit $(\mathscr{P})$ le plan passant par le point A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On note $(\mathscr{P}) = \mathrm{A} + \mathrm{vect}\, \vec{u};\, \vec{v}$.

$$\mathrm{d}\left(\mathrm{M}\,;(\mathscr{P})\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{\mathrm{AM}}\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right]\right|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}.$$

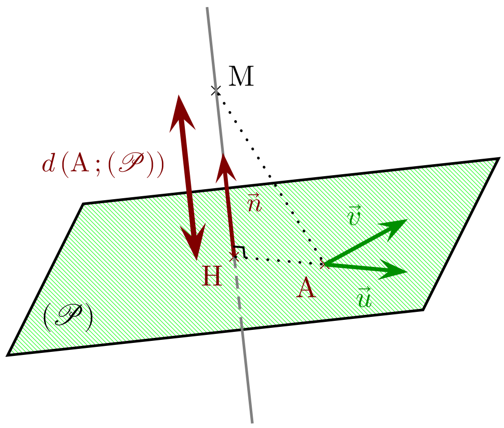


Figure XXXII.18 – Distance d'un point à un plan.

Preuve : Soit $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$ un repère quelconque.
Soient $(\mathscr{P})$ le plan passant par A et $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$.

1. Supposons que $(\mathscr{P})$ ait pour vecteur normal $\vec{n}$. On note H le projeté orthogonal de M sur le plan $(\mathscr{P})$ alors :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \vec{n}.(\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{HM}}) = \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HM}}.$$

Or, $\vec{n}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ sont orthogonaux i.e. $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}} = 0$.

Par ailleurs, $\vec{n}$ et $\overrightarrow{\mathrm{HM}}$ sont colinéaires donc $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HM}} = \pm\|\vec{n}\|\times\left\|\overrightarrow{\mathrm{HM}}\right\| = \pm\|\vec{n}\|\times\mathrm{HM}$.

$$\text{Ainsi, } \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \pm\|\vec{n}\|\times\mathrm{HM} \implies \left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right| = \|\vec{n}\|\times\mathrm{HM}$$
$$\implies d\left(\mathrm{M}\,;(\mathscr{P})\right) = \frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|}{\|\vec{n}\|}. \tag{XXXII.4}$$

2. Supposons que $(\mathscr{P})$ soit dirigé par les vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Le vecteur $\vec{n} = \vec{u}\wedge\vec{v}$ est un vecteur normal au plan $(\mathscr{P})$.

De plus, par invariance par permutation circulaire,

$$\left[\overrightarrow{\mathrm{AM}}\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right] = \left[\vec{u}\,;\vec{v}\,;\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right] = (\vec{u}\wedge\vec{v}).\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}.$$

Il ne reste plus qu'à appliquer la relation (XXXII.4) :

$$d\left(\mathrm{M}\,;(\mathscr{P})\right) = \frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|}{\|\vec{n}\|} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{\mathrm{AM}}\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right]\right|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}.$$

Exercice 11 : Calculer la distance du point $B(1;1;1)$ au plan $\mathcal{Q}$ représenté par le paramétrage :

$$\begin{cases} x & = 2+s+t \\ y & = 3-s+2t \qquad s,t\in\mathbb{R}. \\ z & = 1+2s+t \end{cases}$$

Corollaire 16.1 (Cas d'un plan défini par une équation cartésienne dans un RON) : Soit $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$ un repère orthonormé.

Soit $(\mathscr{P})$ le plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ où $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R}$ et $(a\,;b\,;c)\ (0\,;0\,;0)$.

Pour tout point $\mathrm{M}\,(x_{\mathrm{M}}\,;y_{\mathrm{M}}\,;z_{\mathrm{M}})\in\mathscr{E}$, on a :

$$d\,(\mathrm{M}\,;(\mathscr{P}))=\frac{|ax_{\mathrm{M}}+by_{\mathrm{M}}+cz_{\mathrm{M}}+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Preuve : *Il suffit d'appliquer la relation* (XXXII.4).

Soit $\mathrm{M}\,(x_{\mathrm{M}}\,;y_{\mathrm{M}})\,z_{\mathrm{M}}\in\mathscr{E}$. *Alors* :

$$d\,(\mathrm{M}\,;(\mathscr{P}))=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|}{\|\vec{n}\|}=\frac{|a(x_{\mathrm{M}}-x_{\mathrm{A}})+b(y_{\mathrm{M}}-y_{\mathrm{A}})+(z_{\mathrm{M}}-z_{\mathrm{A}}|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$=\frac{|ax_{\mathrm{M}}+by_{\mathrm{M}}+cz_{\mathrm{M}}-(ax_{\mathrm{A}}+by_{\mathrm{A}}+cz_{\mathrm{M}})|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Or, $\mathrm{A}\in(\mathscr{D})\iff d=-(ax_{\mathrm{A}}+by_{\mathrm{A}}+cz_{\mathrm{A}})$.

Donc, $d\,(\mathrm{M}\,;(\mathscr{P}))=\dfrac{|ax_{\mathrm{M}}+by_{\mathrm{M}}+cz_{\mathrm{M}}|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Exercice 12 : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$.

1. Déterminer la distance du point $A(1,-2,3)$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x+3y-4z-6=0$.
2. Déterminer la distance du point $B(1,1,1)$ au plan $\mathcal{Q}$ représenté par la paramétrage :

$$\begin{cases} x & = & 2+\lambda+\mu \\ y & = & 3-\lambda+2\mu \qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R} \\ z & = & 1+2\lambda+\mu \end{cases}$$

VI.3 Distance d'un point à une droite

Proposition 17 : Soient $\mathrm{A},\ \mathrm{M}\in\mathscr{E}$ et $\vec{u}\in\vec{\mathscr{E}}$ non nul. On considère la droite $(\mathscr{D})=\mathrm{A}+\mathbb{R}\vec{u}$.

$$d\,(\mathrm{M}\,;(\mathscr{D}))=\frac{\left\|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}.$$

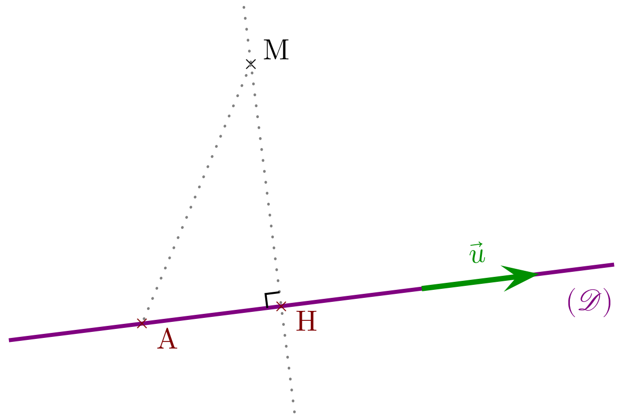


Figure XXXII.19 – Distance d'un point à une droite.

Preuve : Soit $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ un repère quelconque de $\mathscr{E}$.
Soient $(\mathscr{D})$ la droite passant par le point A et dirigée par $\vec{u}$.
Pour $M \in \mathscr{E}$, on note H le projeté orthogonal du point M sur la droite $(\mathscr{D})$ alors :
Par linéarité du produit vectoriel, on a :

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \wedge \vec{u} = \overrightarrow{AH} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}.$$

Or, $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires i.e. $\overrightarrow{AH} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.
On en déduit que $\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}\right\|$.
Par ailleurs, $\vec{u}$ et $\overrightarrow{HM}$ sont orthogonaux donc $\left\|\overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{HM}\right\| \times \|\vec{u}\| = HM \times \|\vec{u}\|$.

Ainsi, $\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\| = HM \times \|\vec{u}\| \implies d\,(M\,;(\mathscr{D})) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$.

Exercice 13 : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

1. Déterminer la distance du point $A(1,-2,3)$ à la droite $\mathcal{D}$ passant par $C(0,1,2)$, dirigée par $\vec{u}(4,3,1)$.
2. Déterminer la distance du point $E(1,0,-1)$ à la droite $\mathcal{D}'$ donnée par le système d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ -x+2y+z &= 0 \end{cases}$$

VII Sphères

Dans ce paragraphe, l'espace est muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ orthonormé.

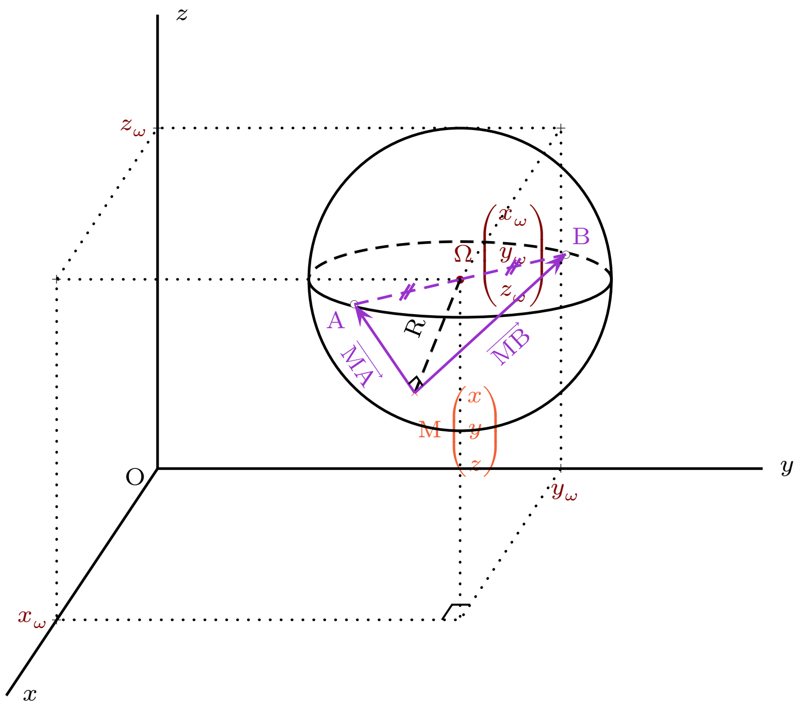


Figure XXXII.20 – Sphère de l'espace.

VII.1 Équations cartésiennes de sphères

Proposition 18 : Soient $\mathscr{S}$ la sphère de centre $\Omega\,(x_\omega\,;y_\omega\,;z_\omega)$ où $(x_\omega\,;y_\omega\,;z_\omega) \in \mathbb{R}^3$ et de rayon $\mathrm{R} \geqslant 0$.

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$ un point. Alors,

$$\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z) \in \mathscr{S} \iff (x-x_\omega)^2 + (y-y_\omega)^2 + (z-z_\omega)^2 = \mathrm{R}^2.$$

La sphère de centre $\Omega\,(x_\omega\,;y_\omega\,;z_\omega)$ et de rayon R, ou la sphère de diamètre [AB] est aussi l'ensemble des points $\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)$ de l'espace vérifiant :

$$\Omega\mathrm{M} = \mathrm{R} \iff \overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0.$$

Preuve : Soient $\mathscr{S}$ la sphère de centre $\Omega\,(x_\omega\,;y_\omega\,;z_\omega)$ où $(x_\omega\,;y_\omega)\,z_\omega \in \mathbb{R}^3$ et de rayon $\mathrm{R} \geqslant 0$ et $\mathrm{M} \in \mathscr{P}$ un point du plan. Soit $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z) \in \mathscr{S} \iff \Omega\mathrm{M} = \mathrm{R} \iff \Omega\mathrm{M}^2 = \mathrm{R}^2 \iff (x-x_\omega)^2 + (y-y_\omega)^2 + (z-z_\omega)^2 = \mathrm{R}^2.$$

Remarques : On appelle *boule* de centre $\Omega\,(x_\omega\,;y_\omega\,;z_\omega)$ et de rayon $\mathrm{R} \geqslant 0$ l'ensemble

$$\mathscr{B} = \left\{\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)\ /\ (x-x_\omega)^2 + (y-y_\omega)^2 + (z-z_\omega)^2 \leqslant \mathrm{R}^2\right\}.$$

Plus particulièrement,

— $\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)$ est strictement à l'extérieur de la sphère $\mathscr{S} \iff (x-x_\omega)^2+(y-y_\omega)^2+(z-z_\omega)^2 > \mathrm{R}^2$.

— $\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)$ est strictement à l'intérieur de la sphère $\mathscr{S} \iff (x-x_\omega)^2+(y-y_\omega)^2+(z-z_\omega)^2 < \mathrm{R}^2$.

Exercice 14 : Reconnaitre dans chacun des cas l'ensemble des points M vérifiant l'équation cartésienne donnée.

1. $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-10=0$
2. $x^2+y^2+z^2+y-2z+3=0$
3. $4y-4x+4z=2x^2+2y^2+2z^2$
4. $x^2+y^2+z^2+6z+9=0$
5. $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$.

Proposition 19 : Soient a, b, c et d des réels et $\mathscr{S}$ l'ensemble d'équation :

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0.$$

- Si $d < a^2+b^2+c^2$ alors est la sphère de centre $\Omega\,(a\,;b\,;c)$ et de rayon $\mathrm{R}=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.
- Si $d=a^2+b^2+c^2$ alors $\mathscr{S}$ est réduit au point $\Omega\,(a\,;b\,;c)$.
- Si $d>a^2+b^2+c^2$ alors $\mathscr{S}$ est vide.

Preuve : Soit $(x\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)\in\mathscr{S} &\iff x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0\\ &\iff (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+b^2+c^2-d.\end{aligned}$$

– Si $d<a^2+b^2+c^2$ alors, en posant $\mathrm{R}=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$, on a :

$$\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)\in\mathscr{S} \iff (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\mathrm{R}^2 \iff \Omega\mathrm{M}=\mathrm{R},\ \text{où}\ \Omega\,(a\,;b\,;c)\,.$$

$\mathscr{S}$ est donc la sphère de centre $\Omega\,(a\,;b\,;c)$ et de rayon $\mathrm{R}=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

– Si $d=a^2+b^2+c^2$ alors

$$\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)\in\mathscr{S} \iff (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=0 \iff \begin{cases}x=a\\ y=b\\ z=c\end{cases}$$

$\mathscr{S}$ est donc réduit au point $\Omega\,(a\,;b\,;c)$.

– Si $d>a^2+b^2+c^2$ alors l'équation $\underbrace{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-zc)^2}_{\geqslant 0}=\underbrace{a^2+b^2+c^2-d}_{<0}$ n'a pas de solutions.

Donc $\mathscr{S}$ est vide.

Exercice 15 : Soient $\mathrm{A}\,(1\,;2\,;3)$, $\mathrm{B}\,(2\,;1\,;3)$, $\mathrm{C}\,(3\,;1\,;2)$ et $\mathrm{D}\,(1\,;0\,;-1)$.
Déterminer une équation cartésienne de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

VII.2 Intersection Sphère et Droite

Proposition 20 : Soient $\mathscr{S}$ une sphère de centre Ω et de rayon R et $(\mathscr{D})$ une droite de $\mathscr{E}$.

1. Si $\mathrm{d}\,(\Omega\,;(\mathscr{D}))<\mathrm{R}$ alors $\mathscr{S}$ et $(\mathscr{D})$ se coupent en deux points distincts.

   On dit que $\mathscr{S}$ et $(\mathscr{D})$ sont sécants.
2. Si $\mathrm{d}\,(\Omega\,;(\mathscr{D}))=\mathrm{R}$ alors $\mathscr{S}$ et $(\mathscr{D})$ se coupent en un unique point.

   On dit que $\mathscr{S}$ et $(\mathscr{D})$ sont tangents.
3. Si $\mathrm{d}\,(\Omega\,;(\mathscr{D}))>\mathrm{R}$ alors $\mathscr{S}\cap(\mathscr{D})=\varnothing$.

   On dit que $\mathscr{S}$ et $(\mathscr{D})$ sont extérieurs.

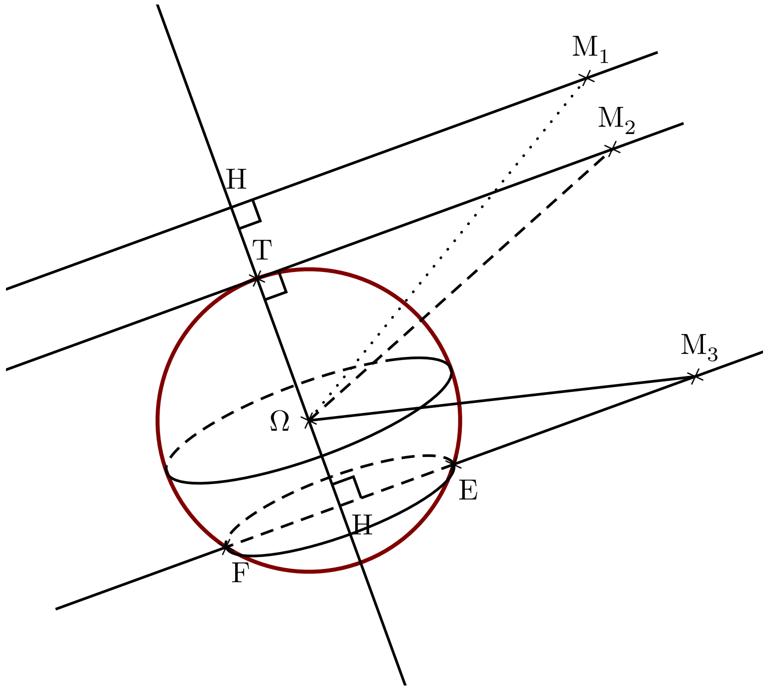


Figure XXXII.21 – Intersection d'une sphère et d'une droite.

Preuve : Soient $\mathscr{S}$ une sphère de centre Ω et de rayon R, $(\mathscr{D})$ une droite de $\mathscr{E}$ et H le projeté orthogonal de Ω sur $(\mathscr{D})$ i.e. $\Omega\mathrm{H} = \mathrm{d}(\Omega\,;(\mathscr{D}))$.

Pour tout point M de $(\mathscr{D})$, le triangle ΩHM est rectangle en H et, d'après le théorème de Pythagore,

$$\Omega\mathrm{H}^2 + \mathrm{HM}^2 = \Omega\mathrm{M}^2 \iff \mathrm{HM}^2 = \Omega\mathrm{M}^2 - \Omega\mathrm{H}^2.$$

D'où,

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in \mathscr{S} \iff \Omega\mathrm{M} = \mathrm{R} \implies & \mathrm{HM}^2 = \mathrm{R}^2 - \Omega\mathrm{H}^2. \\ & \mathrm{HM}^2 = \mathrm{R}^2 - \mathrm{d}(\Omega\,;(\mathscr{D}))^2. \end{aligned} \tag{XXXII.5}$$

1. Si $\mathrm{d}(\Omega\,;(\mathscr{D})) > \mathrm{R} \iff \mathrm{R}^2 - \Omega\mathrm{H}^2 < 0$ alors XXXII.5 n'a pas de solution et $\mathscr{S} \cap (\mathscr{D}) = \varnothing$.
2. Si $\mathrm{d}(\Omega\,;(\mathscr{D})) = \mathrm{R} \iff \mathrm{HM}^2 = \mathrm{R}^2 - \Omega\mathrm{H}^2 = 0$ alors $\mathrm{M} = \mathrm{H}$: $\mathscr{S}$ et $(\mathscr{D})$ se coupent en un seul point T.
3. Si $\mathrm{d}(\Omega\,;(\mathscr{D})) < \mathrm{R}$ alors XXXII.5 a deux points E et F solutions vérifiant $\mathrm{HM} = \sqrt{\mathrm{R}^2 - \Omega\mathrm{H}^2}$.

Remarque : Dans le cas de 2, on redémontre, en particulier, que la tangente à un sphère est perpendiculaire à son rayon en le point de tangence.

Exercice 16 : Déterminer les points d'intersection de la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $\begin{cases} x - 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et de la sphère d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y + z - 3 = 0$.

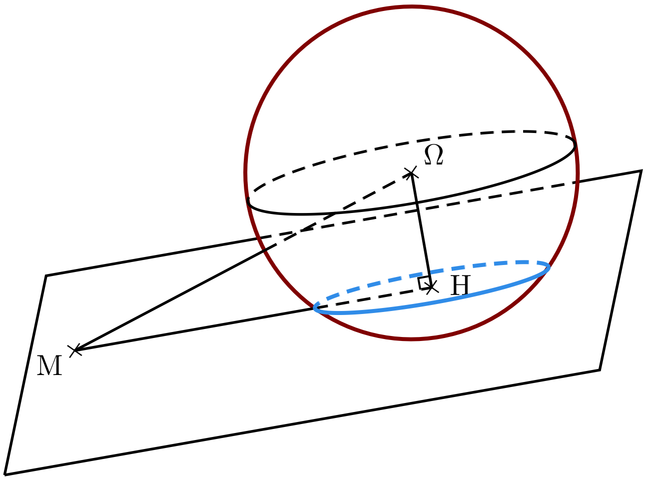


Figure XXXII.22 – Intersection d'une sphère et d'un plan.

VII.3 Intersection Sphère et Plan

Proposition 21 : Soient $\mathscr{S}$ une sphère de centre Ω et de rayon R et $(\mathscr{P})$ un plan de $\mathscr{E}$.

1. Si $d(\Omega\,;(\mathscr{P})) < R$ alors $\mathscr{S}$ et $(\mathscr{P})$ sont sécants

   Dans ce cas, $\mathscr{S} \cap (\mathscr{P})$ est un cercle de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$ et de centre H, projeté orthogonal de Ω sur le plan $(\mathscr{P})$.
2. Si $d(\Omega\,;(\mathscr{P})) = R$ alors $\mathscr{S}$ et $(\mathscr{P})$ se coupent en un unique point.

   On dit que $\mathscr{S}$ et $(\mathscr{P})$ sont tangents.
3. Si $d(\Omega\,;(\mathscr{P})) > R$ alors $\mathscr{S} \cap (\mathscr{P}) = \varnothing$.

   On dit que $\mathscr{S}$ et $(\mathscr{P})$ sont disjoints.

Preuve : Soient $\mathscr{S}$ une sphère de centre Ω et de rayon R, $(\mathscr{P})$ un plan de $\mathscr{E}$ et H le projeté orthogonal de Ω sur $(\mathscr{P})$ i.e. $\Omega H = d(\Omega\,;(\mathscr{P}))$.

Pour tout point M de $(\mathscr{P})$, le triangle ΩHM est rectangle en H et, d'après le théorème de Pythagore,

$$\Omega H^2 + HM^2 = \Omega M^2 \iff HM^2 = \Omega M^2 - \Omega H^2.$$

D'où,

$$M \in \mathscr{S} \iff \Omega M = R \iff HM^2 = R^2 - \Omega H^2 \iff HM^2 = R^2 - d(\Omega\,;(\mathscr{P}))^2. \tag{XXXII.6}$$

1. Si $d(\Omega\,;(\mathscr{P})) > R \iff R^2 - \Omega H^2 < 0$ alors XXXII.6 n'a pas de solution et $\mathscr{S} \cap (\mathscr{P}) = \varnothing$.
2. Si $d(\Omega\,;(\mathscr{P})) = R \iff HM^2 = R^2 - \Omega H^2 = 0$ alors $M = H$: $\mathscr{S}$ et $(\mathscr{P})$ se coupent en un seul point T.
3. Si $d(\Omega\,;(\mathscr{P})) < R$ alors XXXII.6 a pour solutions tous les points de $(\mathscr{P})$ vérifiant $HM = \sqrt{R^2 - d(\Omega\,;(\mathscr{P}))^2}$.

   $\mathscr{S} \cap (\mathscr{P})$ est donc le cercle de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - d(\Omega\,;(\mathscr{P}))^2}$, inclus dans $(\mathscr{P})$.

Exercice 17 : L'espace est muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ orthonormé.

Montrer que $\mathscr{S}$ et $(\mathscr{P})$ se coupent suivant un cercle dont on donnera le rayon, l'axe et le centre

1. $\mathscr{S} : x^2+y^2+z^2-2x-3=0$ et $(\mathscr{P}) : x+y-2z-2=0$.
2. $\mathscr{S} : x^2+y^2+z^2-2x-y+z-3=0$ et $(\mathscr{P}) : x+y-2z-2=0$.

Exercice 18 : Déterminer l'intersection des courbes suivantes :

1. $\mathrm{S} : x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$ et $\mathrm{P} : x-2y+z-2=0$.
2. $\mathrm{P} : 2x+y-4z=6$ et $\mathrm{R} : x-y+3z=2$.
3. $\mathcal{Q}$ le plan passant par $\mathrm{A}(1,-1,0)$ et dirigé par $\vec{u}(2,1,-1)$ et $\vec{v}(1,4,1)$.

   $\mathcal{D}$ la droite passant par $\mathrm{B}(1,-1,2)$ et dirigée par $\vec{w}(1,1,2)$.

Exercice 19 : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Déterminer une équation de la sphère de centre $\Omega(1,0,1)$ et tangente au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y+z-1=0$.

Exercice 20 : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

1. Reconnaitre les deux courbes données, et déterminer leur intersection :

   a. $\mathrm{S} : x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$ et $\mathrm{P} : x-2y+z-2=0$.

   b. $\mathrm{S}' : x^2+y^2+z^2-2x-3=0$ et $\mathrm{Q} : x+y-2z-2=0$.

   c. $\mathrm{P} : 5x-2y=7$ et $\mathrm{P}' : -x+3y-z-1=0$.

   d. $\mathrm{S}'' : x^2+y^2+z^2-2x-y+z-3=0$ et $\delta : \begin{cases} x=-1+2t \\ y=2t \\ z=1-3t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

2. Soit $\mathcal{Q}$ le plan passant par $\mathrm{A}(1,-1,0)$ et dirigé par $\vec{u}(2,1,-1)$ et $\vec{v}(1,4,1)$.

   Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $\mathrm{B}(1,-1,2)$ et dirigée par $\vec{w}(1,1,2)$.

   Déterminer $\mathcal{Q}\cap\mathcal{D}$.

VII.4 Intersection de deux sphères

Proposition 22 : Soient deux sphères $\mathscr{S}(\Omega\,;\mathrm{R})$ et $\mathscr{S}'(\Omega'\,;\mathrm{R}')$ de centres distincts.

Alors :

$$\mathscr{S}\cap\mathscr{S}'\neq\varnothing \iff |\mathrm{R}-\mathrm{R}'|\leqslant \mathrm{d}(\Omega\,;\Omega')\leqslant \mathrm{R}+\mathrm{R}'.$$

Plus précisément :

- Si $\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega')=\mathrm{R}+\mathrm{R}'$ alors les deux sphères sont tangentes extérieurement.

  Leur intersection est réduite à un point de $(\Omega\Omega')$.
- Si $\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega')=|\mathrm{R}-\mathrm{R}'|$ alors les deux sphères sont tangentes intérieurement.

  Leur intersection est réduite à un point de $(\Omega\Omega')$.
- Si $|\mathrm{R}-\mathrm{R}'|<\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega')<\mathrm{R}+\mathrm{R}'$ alors les deux sphères sont sécantes.

  Leur intersection est un cercle d'axe $(\Omega\Omega')$.

Preuve : *Soient deux sphères* $\mathscr{S}(\Omega\,;\mathrm{R})$ *et* $\mathscr{S}'(\Omega'\,;\mathrm{R}')$ *de centres distincts.*

Posons $d=\Omega\Omega'$ *et plaçons nous dans le repère orthonormé direct* $(\Omega,\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$ *où* $\vec{i}=\dfrac{1}{d}\overrightarrow{\Omega\Omega'}$.

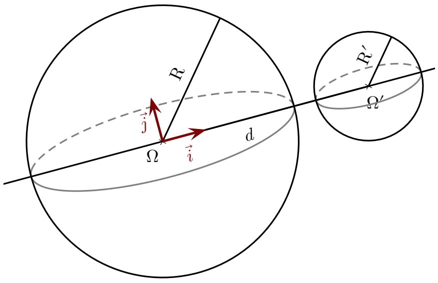


Figure XXXII.23 – $\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega') > \mathrm{R}+\mathrm{R}'$.

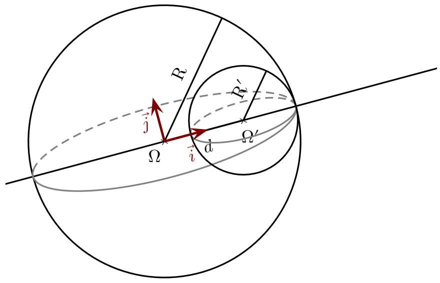


Figure XXXII.26 – $\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega') = |\mathrm{R}-\mathrm{R}'|$.

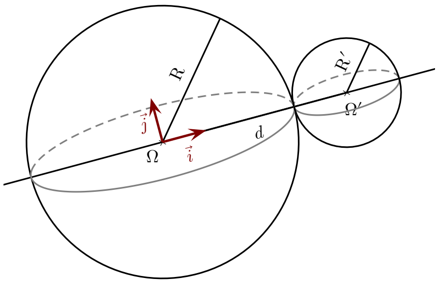


Figure XXXII.24 – $\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega') = \mathrm{R}+\mathrm{R}'$.

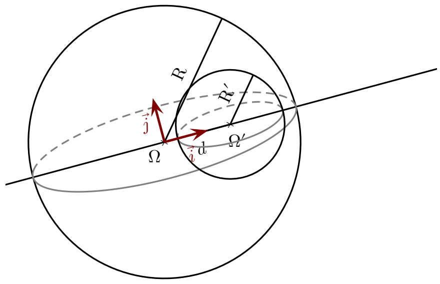


Figure XXXII.27 – $0 < \mathrm{d}(\Omega\,;\Omega') < |\mathrm{R}-\mathrm{R}'|$.

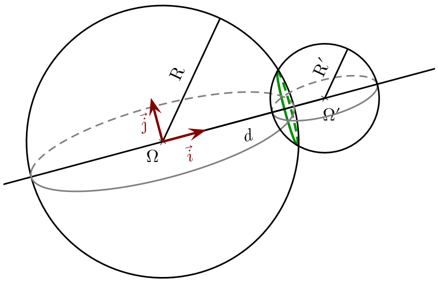


Figure XXXII.25 – $|\mathrm{R}-\mathrm{R}'| < \mathrm{d}(\Omega\,;\Omega') < \mathrm{R}+\mathrm{R}'$.

Figure XXXII.28 – Positions relatives de deux sphères.

Dans ce repère, $\mathscr{S}$ a pour équation $x^2+y^2+z^2=\mathrm{R}^2$ et $\mathscr{S}'$ a pour équation $(x-d)^2+y^2+z^2=\mathrm{R}^2$.

Soit x, y et z des réels. On a :

$$\mathrm{M}(x\,;y\,;z) \in \mathscr{S}\cap\mathscr{S}' \iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2+z^2 &=& \mathrm{R}^2 \\ (x-d)^2+y^2+z^2 &=& \mathrm{R}'^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2+z^2 &=& \mathrm{R}^2 \\ x^2+y^2+z^2-2dx &=& \mathrm{R}'^2-d^2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2+z^2 &=& \mathrm{R}^2 \\ x &=& \dfrac{\mathrm{R}^2-\mathrm{R}'^2+d^2}{2d} \end{array}\right.$$

Ce système exprime le fait que déterminer $\mathscr{S}\cap\mathscr{S}'$ revient à déterminer $\mathscr{S}\cap(\mathscr{P})$ où $(\mathscr{P})$ est le plan d'équation $x=\dfrac{\mathrm{R}^2-\mathrm{R}'^2+d^2}{2d}$.

Or, $\mathrm{d}(\Omega\,;(\mathscr{P})) = \dfrac{|\mathrm{R}^2-\mathrm{R}'^2+d^2|}{2d}$.

On retrouve donc, comme pour les deux cercles dans le plan, les trois cas d'intersection suivant que $\dfrac{\left|R^2 - R'^2 + d^2\right|}{2d}$ est strictement inférieur, égal ou strictement supérieur à R :

$$\mathscr{S} \cap \mathscr{S}' \neq \varnothing \iff |R - R'| \leqslant \mathrm{d}\,(\Omega\,;\Omega') \leqslant R + R'.$$

De même pour les cas de tangence :

$$\frac{\left|R^2 - R'^2 + d^2\right|}{2d} = R \iff |R - R'| = d \ \text{ ou } \ R + R' = d.$$

Index