XXXII

Géométrie de l'espace

Dans l'espace, personne ne vous entendra crier.

Tagline du film Alien, le huitième passager.

Nous continuons dans ce chapitre notre étude des techniques de base en géométrie, mais cette fois-ci dans l'espace. Rien ne change très profondément par rapport à ce que nous avons vu dans le plan, il y a simplement une coordonnée de plus … et un peu plus de place re… !

Contenu

Dans tout le chapitre, on note $\vec{\mathscr{E}}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace et $\mathscr{E}$ l'ensemble des points de l'espace et, dans tous les exercices, l'espace sera muni d'un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ orthonormé direct.

I Mode de repérage

Définition 1 (Vecteurs coplanaires) : Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont dits *coplanaires* s'il existe un triplet $(\alpha\,;\beta\,;\gamma) \neq (0\,;0\,;0)$ de réels tels que :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}.$$

I.1 Coordonnées cartésiennes

Définition 2 :

- On appelle *base* de $\vec{\mathscr{E}}$ tout triplet de vecteurs non coplanaires $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$.
- On appelle *repère* (cartésien) de $\mathscr{E}$ tout quadruplet $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$, où O est un point de $\mathscr{E}$ et $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ est une base de $\vec{\mathscr{E}}$.

  O est appelé *origine* du repère.

Cas particuliers :

— Le repère et la base sont dits *orthogonaux* si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux.

— Si de plus, les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont *unitaires* alors le repère et la base sont dits *orthonormés*.

Proposition 1 : Soit $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base de $\vec{\mathscr{E}}$.

Tout vecteur $\vec{u} \in \vec{\mathscr{E}}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{où } (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3. \tag{XXXII.1}$$

On dit que $\vec{u}$ est une *combinaison linéaire* des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

En particulier, pour tout point M de l'espace $\mathscr{E}$, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ se décompose de manière unique dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{où } (x\,;y)\,z \in \mathbb{R}^3. \tag{XXXII.2}$$

Définition 3 (Coordonnées cartésiennes) :

- Soient $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base de l'espace $\vec{\mathscr{E}}$ et $\vec{u} \in \vec{\mathscr{E}}$.

  On appelle *coordonnées* du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$, notées $\vec{u}\,(x\,;y\,;z)_{\mathcal{B}}$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$,

  le triplet $(x\,;y\,;z)$ de la décomposition (XXXII.1).
- On appelle *coordonnées* du point M dans le repère $\mathcal{R}$, notées $\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)_{\mathcal{B}}$ ou $\mathrm{M}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$,

  le triplet $(x\,;y\,;z)$ de la décomposition (XXXII.2).

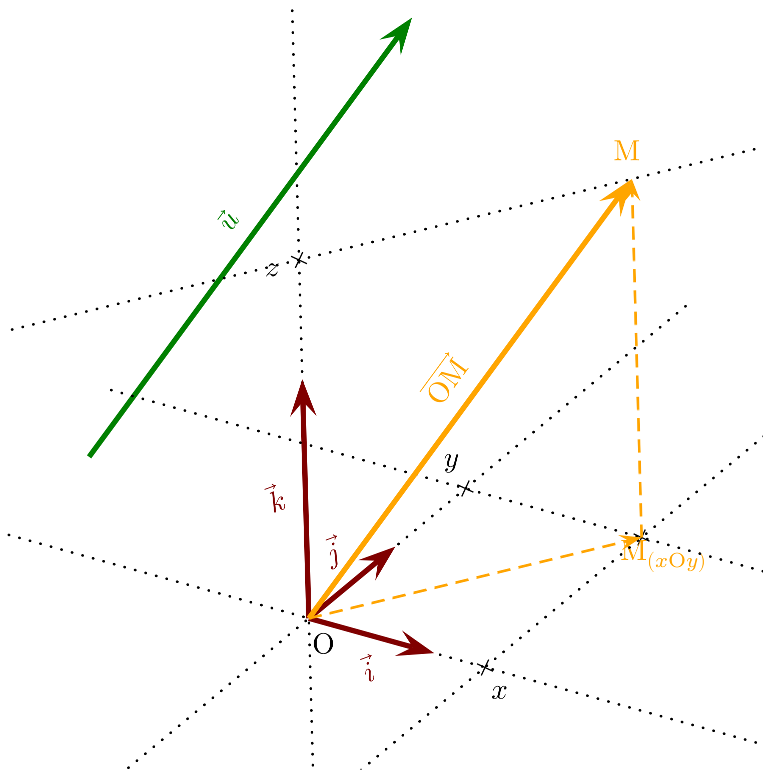


Figure XXXII.1 – Coordonnées cartésiennes d'un point et d'un vecteur de l'espace.

Vocabulaire : x, y et z sont respectivement appelés, *abscisse*, *ordonnée* et *côte* de M dans le repère $\mathcal{R}$.

Rappel 1 (Coordonnées de vecteurs) : Soit $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$.

- Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}.$$

- $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.
- Si I est le milieu de [AB] alors $I\left(\frac{x_B+x_A}{2}\,;\frac{y_B+y_A}{2}\,;\frac{z_B+z_A}{2}\right)$.

I.2 Coordonnées cylindriques

La repérage cylindrique consiste tout simplement à remplacer les deux premières coordonnées cartésiennes x et y par des coordonnées polaires dans le plan engendré par $\vec{i}$ et $\vec{j}$, sans toucher à la troisième coordonnée z.

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$ et M' son projeté orthogonal sur le plan $(\mathrm{O}xy)$.

$\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ est un repère du plan $(\mathrm{O}xy)$.

M' admet pour coordonnées polaires $[\rho\,;\theta]$ dans ce repère *i.e.*

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}'} = \rho u_\theta = \rho\cos(\theta)\vec{i} + \rho\sin(\theta)\vec{j}.$$

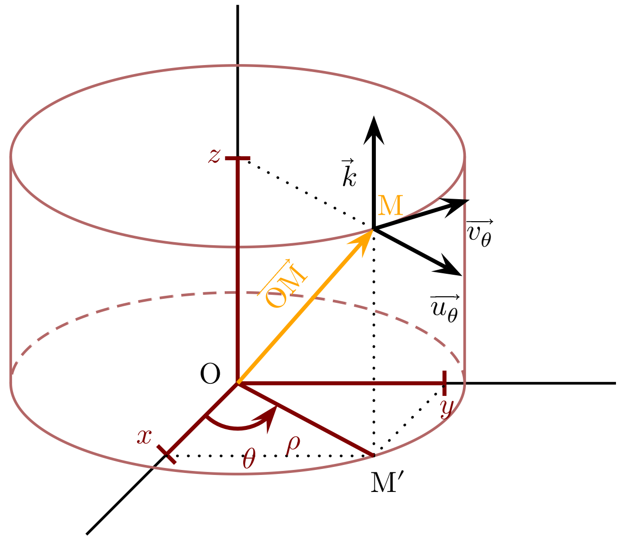


Figure XXXII.2 – Coordonnées cylindriques d'un point de l'espace.

Définition 4 (Coordonnées cylindriques) : On appelle *coordonnées cylindriques* de M tout triplet $(\rho\,;\theta\,;z)$ tel que :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \rho\cos(\theta)\vec{\imath} + \rho\sin(\theta)\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

Remarques :

— Comme les coordonnées polaires dans le plan, les coordonnées cylindriques ne sont pas uniques.

On impose l'unicité si on exige $\rho > 0$ et $\theta \in [0\,;2\pi[$, ce qui exclut le point O. (sic !)

— Si un point M a pour coordonnées cartésiennes $(x\,;y\,;z)$ et pour coordonnées cylindriques $(\rho\,;\theta\,;z)$ dans un repère orthonormé $\mathscr{R}(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ alors :

$$x = \rho\cos(\theta), \quad y = \rho\sin(\theta) \quad \text{et } z \text{ est inchangé !}$$

ATTENTION $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ ne correspond pas à la distance du point M à l'origine du repère, mais à la distance OM', où M' est le projeté orthogonal du point M sur le plan $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

I.3 Coordonnées sphériques (Hors-Programme)

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Définition 5 (Coordonnées sphériques) : On appelle *coordonnées sphériques* de M tout triplet $(r\,;\theta\,;\varphi)$ tel que :

- $r = \mathrm{OM}$
- Les coordonnées polaires de P, projeté orthogonal de M sur $(\mathrm{O}xy)$, sont $[r\sin(\varphi)\,;\theta]$ dans $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.
- $\varphi \equiv \left(\widehat{\vec{k}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}}\right) \in [0\,;\pi]$. C'est un angle non orienté.

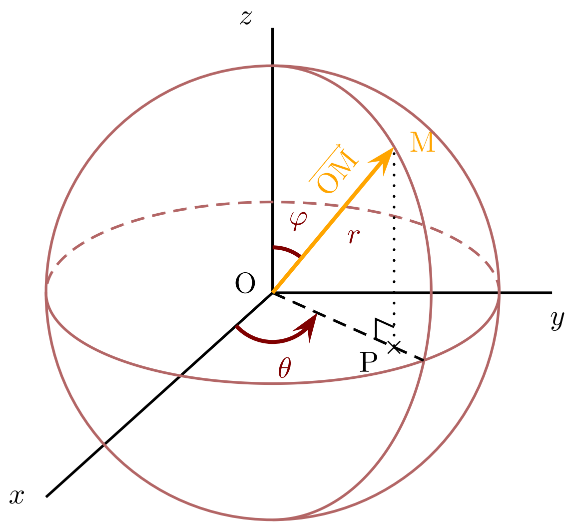


Figure XXXII.3 – Coordonnées sphériques d'un point de l'espace.

Vocabulaire : r, θ et φ sont respectivement appelés *rayon*, *longitude* et *colatitude* de M dans le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Si un point M a pour coordonnées sphériques $(r\,;\theta\,;\varphi)$ alors P, le projeté orthogonal de M sur $(\mathrm{O}xy)$, a pour coordonnées polaires $[r\sin(\varphi)\,;\theta]$ dans $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

Ainsi, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = r\sin(\varphi)\cos(\theta)\vec{i} + r\sin(\varphi)\sin(\theta)\vec{j}$.

Or, $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PM}}$ avec $\overrightarrow{\mathrm{PM}} = r\cos(\varphi)\vec{k}$.

On a donc

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\sin(\varphi)\cos(\theta)\vec{i} + r\sin(\varphi)\sin(\theta)\vec{j} + r\cos(\varphi)\vec{k} \iff \mathrm{M}\begin{pmatrix} r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ r\cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Exercice 1 : Déterminer les coordonnées sphériques du point $\mathrm{M}\left(1\,;1\,;\sqrt{2}\right)$.

ATTENTION Ne pas confondre latitude et colatitude ! La latitude est un angle appartenant à $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

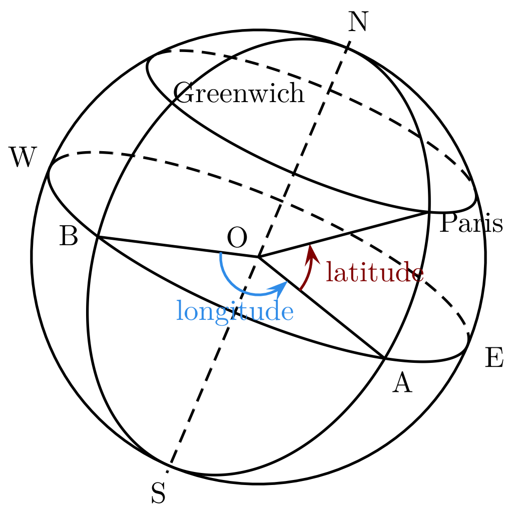


Figure XXXII.4 – Coordonnées géographiques.

II PRODUIT SCALAIRE

II.1 Produit scalaire en dimension 3

Définition 6 (Produit scalaire) : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\mathscr{E}}$.

Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$, B et C de $\mathscr{E}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $(\mathscr{P})$ un plan contenant les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

On appelle *produit scalaire* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le produit scalaire de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ calculé dans le plan $(\mathscr{P})$.

Ainsi,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{cases} \mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\cos\left(\widehat{\mathrm{BAC}}\right) = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) & \text{si } \vec{u}\neq\vec{0} \text{ et } \vec{v}\neq\vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u}=\vec{0} \text{ ou } \vec{v}=\vec{0} \end{cases} \tag{P.S 1}$$

$$= \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}} \text{ avec H le projeté orthogonal de C sur (AB)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) \tag{P.S 2}$$

Remarque : $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ désigne l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il est compris entre 0 et π.

Le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace se ramenant au produit scalaire de ces deux vecteurs dans un plan, le produit scalaire conserve ses propriétés, en particulier la bilinéarité et la symétrie :

$\forall\, \vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w} \in \vec{\mathscr{E}},\ \forall\ (\alpha\,;\beta)\in\mathbb{R}^2$,

(i) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.

(ii) $\vec{u}.(\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}) = \alpha\vec{u}.\vec{v} + \beta\vec{u}.\vec{w}$

$(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}).\vec{w} = \alpha\vec{u}.\vec{w} + \beta\vec{v}.\vec{w}$

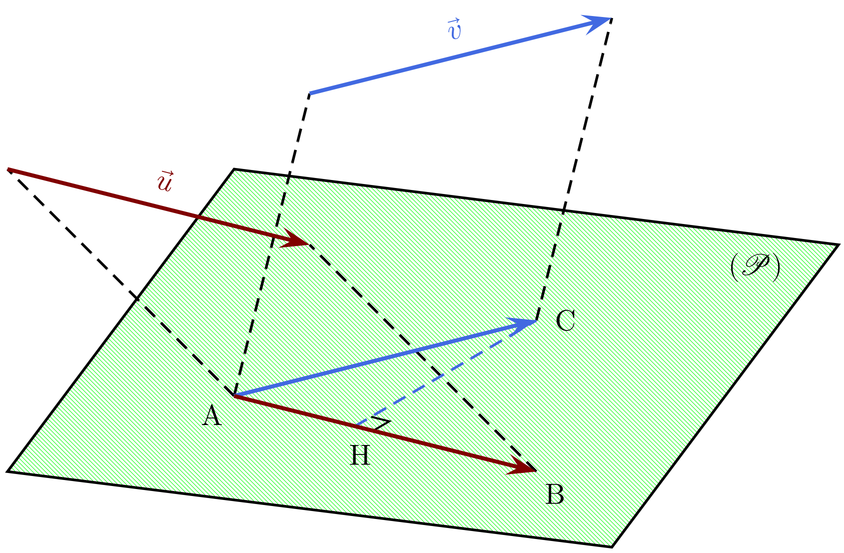


Figure XXXII.5 – Produit scalaire dans l'espace.

II.2 Expression dans une base orthonormale

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère **orthonormé** $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Proposition 2 : Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ dans une base $\mathcal{B}=\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ de $\vec{\mathcal{E}}$.

Alors,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'. \tag{P.S 3}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

En particulier,

$$\mathrm{AB} = \left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\| = \sqrt{(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}})^2+(y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}})^2+(z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}})^2}.$$

Preuve : Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ i.e. $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$

D'où,

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= (x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}).(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k})\\ &= xx'\underbrace{\vec{i}\cdot\vec{i}}_{=\|\vec{i}\|=1}+yy'\underbrace{\vec{j}\cdot\vec{j}}_{=\|\vec{j}\|=1}+zz'\underbrace{\vec{k}\cdot\vec{k}}_{=\|\vec{k}\|=1}\\ &\qquad+\underbrace{xy'\vec{i}\cdot\vec{j}+xz'\vec{i}\cdot\vec{k}+yx'\vec{j}\cdot\vec{i}+yz'\vec{j}\cdot\vec{k}+zx'\vec{k}\cdot\vec{i}+zy'\vec{k}\cdot\vec{j}}_{=0 \text{ par orthogonalité de la base } \mathcal{B}=\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)}\\ &= xx'+yy'+zz'.\end{aligned}$$

Exercice 2 : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère $\vec{a} = \vec{i} - \vec{k}$ et $\vec{b} = \vec{i} + \sqrt{6}\vec{j} - \vec{k}$.

Déterminer une mesure de l'angle non orienté $(\vec{a}, \vec{b})$

III Produit vectoriel

III.1 Orientation de l'espace

Une fois choisis deux vecteurs unitaires et orthogonaux $\vec{i}$ et $\vec{j}$ de l'espace, il reste deux possibilités pour compléter la base orthonormée, comme l'indique les deux schémas ci-dessous dans lesquels $\overrightarrow{k_1}$ et $\overrightarrow{k_2}$ sont des vecteurs unitaires orthogonaux aux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

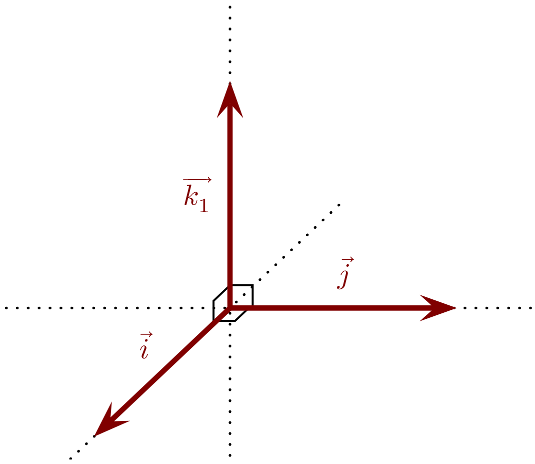


Figure XXXII.6 – Base directe

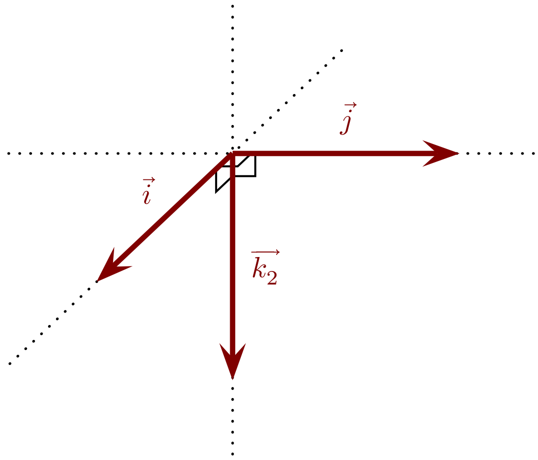


Figure XXXII.7 – Base indirecte

Figure XXXII.8 – Bases orthonormées de l'espace.

On convient de dire que $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\overrightarrow{k_1}\right)$ est directe alors que $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\overrightarrow{k_2}\right)$ est indirecte.

Plusieurs moyens pour s'en souvenir :

— Bonhomme d'Ampère : adossé à $\overrightarrow{k_1}$, il a son pied droit sur $\vec{i}$ et son pied gauche sur $\vec{j}$.

— Règle des « trois doigts » : le pouce de la main droite sur $\vec{i}$, l'index sur $\vec{j}$ et le majeur sur $\overrightarrow{k_1}$.

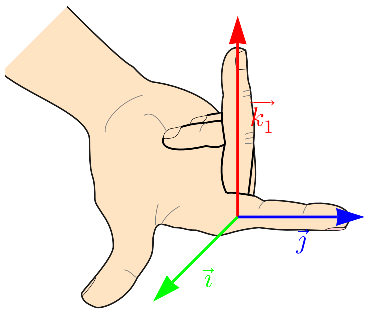


Figure XXXII.9 – Règle des trois doigts pour orienter l'espace de manière directe (avec la main droite !!!!)

Proposition 3 : Soit $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base orthonormale.

- Si l'on remplace un des vecteurs par son opposé, la base change d'orientation.
- Si on échange deux vecteurs, la base change d'orientation.
- Si on effectue une permutation circulaire sur les vecteurs, la base ne change pas d'orientation.

III.2 Produit vectoriel en dimension 3

Définition 7 (Produit vectoriel) : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\mathcal{E}}$.
On appelle *produit vectoriel* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, le vecteur défini par :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \\ \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \sin\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) \vec{k} & \text{sinon où } \vec{k} \text{ est unitaire et directement orthogonal à } (\vec{u}\,;\vec{v}) \end{cases} \tag{P.V 1}$$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\mathcal{E}}$.

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}}$$

En particulier, $\sin\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) > 0$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a la même direction et le même sens que $\vec{k}$.

Corollaire 3.1 : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors $(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe de l'espace.

Remarque : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ est toujours l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice 3 : Soit $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base orthonormale directe de $\vec{\mathcal{E}}$.

Déterminer $\vec{i} \wedge \vec{j}$, $\vec{i} \wedge \vec{k}$ et $\vec{j} \wedge \vec{k}$.

III.3 Propriétés algébriques

Proposition 4 : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$ et soient α et β des réels.

Alors :

1. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ (Le produit vectoriel est anti-symétrique).
2. $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \wedge \vec{w} = \alpha\vec{u} \wedge \vec{w} + \beta\vec{v} \wedge \vec{w}$
   $\vec{u} \wedge (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha\vec{u} \wedge \vec{v} + \beta\vec{u} \wedge \vec{w}$
   (Le produit vectoriel est linéaire à gauche et à droite)

On dit que l'application

$$\wedge : \begin{array}{ccc} \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} & \longrightarrow & \vec{\mathcal{E}} \\ (\vec{u}\,;\vec{v}) & \longmapsto & \vec{u} \wedge \vec{v} \end{array}$$

est bilinéaire (2) alternée (1).

Preuve :

1 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{v} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ et la propriété est vérifiée.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, on note $\vec{k}$ le vecteur unitaire et directement orthogonal à $(\vec{u}\,;\vec{v})$. $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{k}\right)$ est alors une base directe de l'espace et

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \sin\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)\vec{k}.$$

La base $\left(\vec{v}\,;\vec{u}\,;-\vec{k}\right)$ est aussi une base directe de l'espace et le vecteur $-\vec{k}$ est un vecteur unitaire directement orthogonal à $(\vec{v}\,;\vec{u})$.

D'où,

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \sin\left(\widehat{\vec{v}\,;\vec{u}}\right)\left(-\vec{k}\right) = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \sin\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)\vec{k} = -\vec{u} \wedge \vec{v}.$$

2 Résultat admis !

ATTENTION Le produit vectoriel n'est pas associatif.

$$\left(\vec{i} \wedge \vec{j}\right) \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \neq \vec{i} \wedge \left(\vec{j} \wedge \vec{j}\right) = \vec{i} \wedge \vec{0} = \vec{0}.$$

Exercice 4 : Soit A, B, C trois points de l'espace. Montrer que pour tout point M de l'espace :

$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}.$$

III.4 Expression dans une base orthonormée directe

Proposition 5 : Soit $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base orthonormale directe de $\vec{\mathcal{E}}$.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix} yz' - y'z \\ x'z - xz' \\ xy' - x'y \end{pmatrix}$.

Autrement dit,

$$\vec{u} \wedge \vec{v}\left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} ; -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\right).$$

Exemple 1 : On peut toujours calculer des aires de triangle à l'aide du produit vectoriel.
Par exemple, si $A(1\,;2\,;3)$, $B(-1\,;1\,;-1)$ et $C(0\,;2\,;4)$ alors :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ puis } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \dfrac{\sqrt{38}}{2}$.

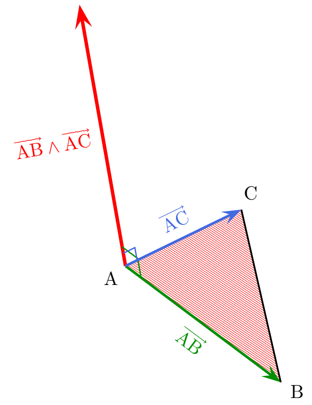


Figure XXXII.10 – $\mathcal{A}_{\text{ABC}} = \dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{\text{AB}} \wedge \overrightarrow{\text{AC}}\right\|$.

Preuve : Soit $\mathcal{B} = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base orthonormale directe de $\vec{\mathcal{E}}$.
Il suffit simplement d'utiliser la bilinéarité et l'anti-symétrie du produit vectoriel dans la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}
\vec{u} \wedge \vec{v} &= \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) \wedge \left(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}\right) \\
&= \cancel{xx'\vec{i} \wedge \vec{i}} + xy'\underbrace{\vec{i} \wedge \vec{j}}_{=\vec{k}} + xz'\underbrace{\vec{i} \wedge \vec{k}}_{=-\vec{j}} + yx'\underbrace{\vec{j} \wedge \vec{i}}_{=-\vec{k}} + \cancel{yy'\vec{j} \wedge \vec{j}} + yz'\underbrace{\vec{j} \wedge \vec{k}}_{=\vec{i}} \\
&\qquad + zx'\underbrace{\vec{k} \wedge \vec{i}}_{=\vec{j}} + zy'\underbrace{\vec{k} \wedge \vec{j}}_{=-\vec{i}} + \cancel{zz'\vec{k} \wedge \vec{k}} \\
&= (yz' - y'z)\vec{i} + (x'z - xz')\vec{j} + (xy' - x'y)\vec{k}.
\end{aligned}$$

Corollaire 5.1 (Double produit vectoriel) : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$.

$$\vec{u} \wedge \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right) = \left(\vec{u} \cdot \vec{w}\right)\vec{v} - \left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)\vec{w}.$$

Preuve : La démonstration n'apporte aucune difficulté dans une base orthonormée directe en utilisant les expressions des produits scalaires et vectoriels dans cette base.

IV Déterminant de trois vecteurs

Définition 8 : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$.
On appelle *déterminant* ou *produit mixte* de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, noté $\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w})$, le réel :

$$\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = \left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right).\vec{w}.$$

Exemple 2 : Si $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ est une base orthonormée directe alors

$$\det\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right) = \left(\vec{i}\wedge\vec{j}\right).\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{k} = \left\|\vec{k}\right\|^2 = 1.$$

IV.1 Interprétation géométrique du produit mixte

Proposition 6 : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$ **non coplanaires**.
Alors, $|\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w})|$ est l'aire du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

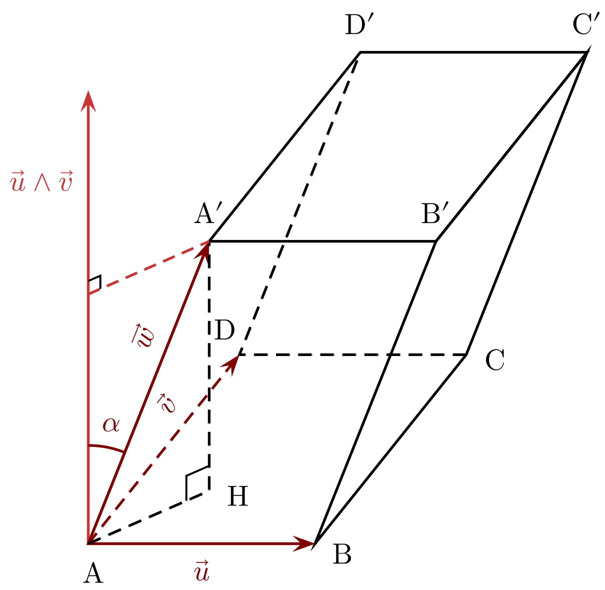


Figure XXXII.11 – Volume d'un parallélépipède dans l'espace.

Preuve : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$ **non coplanaires.**
On note ABCDA′B′C′D′ le parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
Notons $\alpha = (\widehat{\vec{w}\,;\vec{u}\wedge\vec{v}}) \in [0\,;\pi[$ et H le projeté orthogonal de A′ sur le plan (ABCD).
La hauteur de ce parallélépipède est $\mathrm{A'H} = \|\vec{w}\| \times |\cos\alpha|$.
La base est un parallélogramme dont l'aire est égale à $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$.

Le volume du parallélépipède est donc $\mathcal{V} = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \times \|\overrightarrow{w}\| \times |\cos \alpha| = \left|\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right).\overrightarrow{w}\right|$
$= |\det (\vec{u}\,;\vec{v}\,;\overrightarrow{w})|$.

IV.2 Expression du déterminant dans une base orthonormée directe

Proposition 7 : Soit $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ est une base orthonormée directe de $\vec{\mathcal{E}}$.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} x" \\ y" \\ z" \end{pmatrix}$ alors

$$\det (\vec{u}\,;\vec{v}\,;\overrightarrow{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x" \\ y & y' & y" \\ z & z' & z" \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} y' & y" \\ z' & z" \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & x" \\ z' & z" \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & x" \\ y' & y" \end{vmatrix} \qquad (\det_{C_1})$$

$$= -x'\begin{vmatrix} y & y" \\ z & z" \end{vmatrix} + y'\begin{vmatrix} x & x" \\ z & z" \end{vmatrix} - z'\begin{vmatrix} x & x" \\ y & y" \end{vmatrix} \qquad (\det_{C_2})$$

$$= x"\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} - y"\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} + z"\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}. \qquad (\det_{C_3})$$

On dit que l'on a respectivement développé par rapport à la première, deuxième ou troisième colonne.

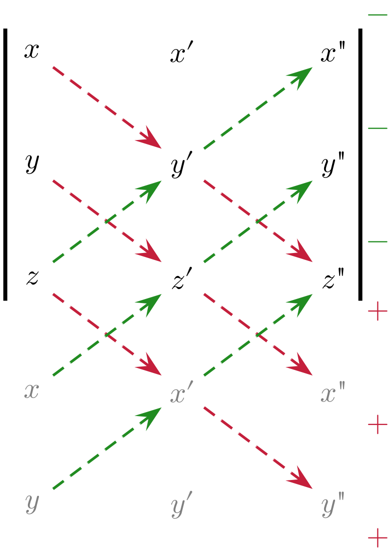
Preuve : Il suffit de calculer $\det (\vec{u}\,;\vec{v}\,;\overrightarrow{w}) = \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right).\overrightarrow{w}$ dans la base orthonormée directe $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$:

$$\det (\vec{u}\,;\vec{v}\,;\overrightarrow{w}) = \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right).\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x" \\ y" \\ z" \end{pmatrix}$$

$$= x"\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} - y"\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} + z"\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = (\det_{C_3}).$$

En l'état de nos connaissances, pour montrer que $(\det_{C_3})$=$(\det_{C_2})$=$(\det_{C_1})$, on ne peut malheureusement que développer chacune de ces expressions et constater leur égalité. Laissé à l'étudiant courageux.

Corollaire 7.1 : Soit $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ est une base orthonormée directe de $\vec{\mathcal{E}}$.



$$= xy'z" + yz'x" + zx'y" - (zy'x" + xz'y" + yx'z")$$

Pour calculer un peu plus rapidement les produits mixtes (et ne pas se tromper dans les signes), on peut appliquer la règle de Sarrus. On écrit le diagramme ci-contre :

- On additionne les trois produits obtenus le long des diagonales descendantes,
- et on soustrait les trois produits obtenus le long des diagonales ascendantes.

Figure XXXII.12 – Règle de Sarrus

$$\det\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right) = 1.$$

Exercice 5 : Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs :

$$\vec{u}\,(1\,;2\,;-1),\ \vec{v}\,(-1\,;3\,;-1) \text{ et } \vec{w}\,(-8\,;1\,;0).$$

IV.3 Propriétés algébriques

Proposition 8 : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{e}$ des vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$ et soient α et β des réels.

Alors :

1. $\det\,(\alpha\vec{u}+\beta\vec{r}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = \alpha\det\,(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) + \beta\det\,(\vec{r}\,;\vec{v}\,;\vec{w})$.
   $\det\,(\vec{u}\,;\alpha\vec{v}+\beta\vec{r}\,;\vec{w}) = \alpha\det\,(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) + \beta\det\,(\vec{u}\,;\vec{r}\,;\vec{w})$.
   $\det\,(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\alpha\vec{w}+\beta\vec{r}) = \alpha\det\,(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) + \beta\det\,(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{r})$.

On dit que le déterminant est *trilinéaire* dans $\vec{\mathcal{E}}$.

2. $\det\,(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = \det\,(\vec{w}\,;\vec{u}\,;\vec{v}) = \det\,(\vec{v}\,;\vec{w}\,;\vec{u})$.

On dit que le déterminant est invariant par permutation circulaire.

3. $\det\,(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = -\det\,(\vec{v}\,;\vec{u}\,;\vec{w}) = -\det\,(\vec{u}\,;\vec{w}\,;\vec{v}) = -\det\,(\vec{w}\,;\vec{v}\,;\vec{u})$.

On dit que le déterminant est anti-symétrique.

Le déterminant change donc de signe si l'on échange deux vecteurs.

Preuve : Rien de bien compliqué en utilisant les propriétés et définitions précédentes.

IV.4 Condition de coplanarité

Théorème 9 : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$. Alors,

$$\vec{u},\ \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires si, et seulement si } \det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = 0.$$

Preuve : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}$.

Soit $\mathrm{O} \in \mathcal{E}$ et A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$.

$\Rightarrow$: Supposons que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient coplanaires.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ puis $\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right).\vec{w} = 0$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors $\mathrm{C} \in (\mathrm{OAB})$ et $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ i.e. $\exists\ (\alpha\,;\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

  On a alors :

  $$\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = \det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{u}) + \beta\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{v})\,.$$

  $$\text{Or, } \begin{cases} \vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u} \implies \det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{u}) = \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right).\vec{u} = 0 \\ \vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v} \implies \det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{v}) = \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right).\vec{v} = 0 \end{cases}$$

  Donc, $\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = 0$.

$\Leftarrow$: Supposons que $\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = 0$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, on pose $\mathrm{P} \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$.

  Par définition, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ est directement orthogonal à $(\vec{u}\,;\vec{v})$ i.e. orthogonal au plan (OAB).

  Or, $\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = 0 \iff \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right).\vec{w} = 0 \iff \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$ i.e. $\mathrm{C} \in (\mathrm{OAB})$.

  Il en résulte que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Exercice 6 : Soient $\vec{u}(-1,1,1), \vec{v}(3,1,2), \vec{w}(1,1,2)$ trois vecteurs de l'espace.
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont-ils coplanaires ? Si non forment-ils une base directe ?

À retenir ! :

Si
- un des des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est nul

ou
- deux des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont égaux

ou
- deux des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires

ou
- un des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est combinaison linéaire des deux autres

, alors $\det(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) = 0$.

L'application

$$\begin{array}{rccc} \det : & \vec{\mathcal{E}}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) & \longmapsto & \det\,(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) \end{array}$$

est une forme trilinéaire alternée.

Exercice 7 : Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

1. Montrer l'inégalité de Hadamard :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \leqslant \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|.$$

2. Montrer l'identité de Lagrange :

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + \|(\vec{u} \wedge \vec{v})\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2.$$

V Droites et plans de l'espace

V.1 Représentations paramétriques

L'espace est muni d'un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Proposition 10 (Droite) : Soient $\mathrm{A}\,(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A}\,;z_\mathrm{A}) \in \mathscr{E}$ et $\vec{u}\,(\alpha\,;\beta\,;\gamma) \in \vec{\mathcal{E}}$ un vecteur non nul.

La droite $(\mathscr{D}) = \mathrm{A} + \mathbb{R}\vec{u}$ passant par A et dirigée par $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_\mathrm{A} + \alpha t \\ y = y_\mathrm{A} + \beta t \\ z = z_\mathrm{A} + \gamma t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

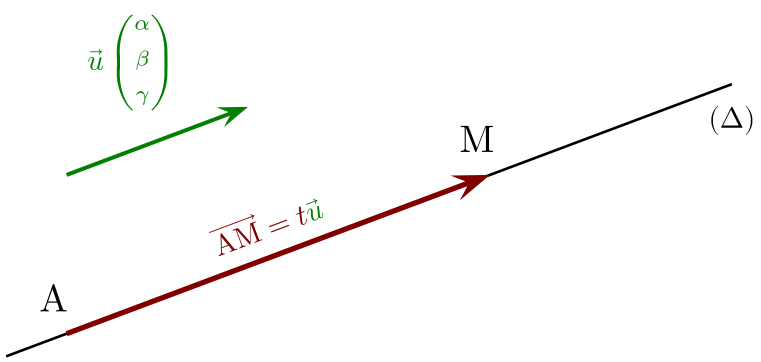


Figure XXXII.13 – Équations paramétriques d'une droite.

Preuve : Il suffit simplement de traduire le fait que :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z) \in (\mathscr{D}) &\iff \overrightarrow{\mathrm{AM}} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\
&\iff \exists t \in \mathbb{R} \,/\, \overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\vec{u} \iff \exists t \in \mathbb{R} \,/\, \begin{pmatrix} x - x_{\mathrm{A}} \\ y - y_{\mathrm{A}} \\ z - z_{\mathrm{A}} \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\
&\iff \exists t \in \mathbb{R} \,/\, \begin{cases} x - x_{\mathrm{A}} = t\alpha \\ y - y_{\mathrm{A}} = t\beta \\ z - z_{\mathrm{A}} = t\gamma \end{cases} \iff \exists t \in \mathbb{R} \,/\, \begin{cases} x = x_{\mathrm{A}} + t\alpha \\ y = y_{\mathrm{A}} + t\beta \\ z = z_{\mathrm{A}} + t\gamma \end{cases}
\end{aligned}
$$

Proposition 11 (Plan) : Soit $\mathrm{A}\,(x_{\mathrm{A}}\,;y_{\mathrm{A}}\,;z_{\mathrm{A}}) \in \mathscr{E}$ un point et soient $\vec{u}\,(\alpha_1\,;\beta_1\,;\gamma_1)$ et $\vec{v}\,(\alpha_2\,;\beta_2\,;\gamma_2)$ deux vecteurs non colinéaires de $\vec{\mathscr{E}}$.

Le plan $(\mathscr{P}) = \mathrm{A} + \mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v}$, passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ admet pour représentation paramétrique : représentation paramétrique, de la forme :

$$
(\mathscr{P}) : \begin{cases} x = x_{\mathrm{A}} + t\alpha_1 + s\alpha_2 \\ y = y_{\mathrm{A}} + t\beta_1 + s\beta_2 \\ z = z_{\mathrm{A}} + t\gamma_1 + s\gamma_2 \end{cases}, \quad (t\,;s) \in \mathbb{R}^2.
$$

$$
(\mathscr{P}) = \mathrm{A} + \mathrm{vect}\,(\vec{u};\ \vec{v})\,.
$$

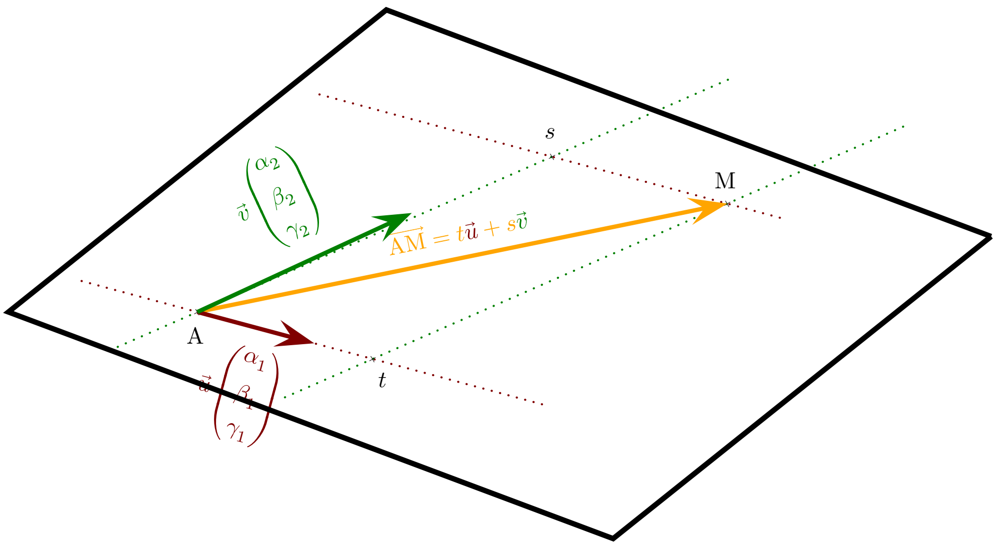


Figure XXXII.14 – Équations paramétriques d'un plan.

Preuve : *Le point* M *appartient au plan* $(\mathscr{P})$ *si, et seulement si les vecteurs* $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$, $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont coplanaires* :

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\,(x\,;y\,;x) \in (\mathscr{P}) &\iff \exists\,(t\,;s) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\vec{u} + s\vec{v} \\
&\iff \exists\,(t\,;s) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \begin{pmatrix} x - x_{\mathrm{A}} \\ y - y_{\mathrm{A}} \\ z - z_{\mathrm{A}} \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \\
&\iff \exists\,(t\,;s) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \begin{cases} x - x_{\mathrm{A}} = t\alpha_1 + s\alpha_2 \\ y - y_{\mathrm{A}} = t\beta_1 + s\beta_2 \\ z - z_{\mathrm{A}} = t\gamma_1 + s\gamma_2 \end{cases} \\
&\iff \exists\,(t\,;s) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \begin{cases} x = x_{\mathrm{A}} + t\alpha_1 + s\alpha_2 \\ y = y_{\mathrm{A}} + t\beta_1 + s\beta_2 \\ z = z_{\mathrm{A}} + t\gamma_1 + s\gamma_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

V.2 Équations cartésiennes de plan

Proposition 12 : Soit $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$ un repère orthonormé direct de $\mathscr{E}$. Soit $\mathrm{A}\,(x_{\mathrm{A}}\,;y_{\mathrm{A}}\,;z_{\mathrm{A}}) \in \mathscr{E}$ un point et soient $\vec{u}\,(\alpha_1\,;\beta_1\,;\gamma_1)$ et $\vec{v}\,(\alpha_2\,;\beta_2\,;\gamma_2)$ deux vecteurs non colinéaires de $\vec{\mathscr{E}}$.

Le plan $(\mathscr{P})$ passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ admet pour équation cartésienne :

$$\begin{vmatrix} x - x_{\mathrm{A}} & \alpha_1 & \alpha_2 \\ y - y_{\mathrm{A}} & \beta_1 & \beta_2 \\ z - z_{\mathrm{A}} & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Preuve : *Soit* $(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z) \in (\mathscr{P}) \iff \overrightarrow{\mathrm{AM}},\ \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont coplanaires} \iff \det\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right).$$

Proposition 13 : Soit $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$ un repère quelconque de $\mathscr{E}$.

1. Tout plan $(\mathscr{P})$ admet une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a\,;b\,;c) \neq (0\,;0\,;0)$.

   Cette équation est appelée *équation cartésienne* du plan $(\mathscr{P})$.
2. Réciproquement, soit $(a;\ b;\ c;\ d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $(a\,;b\,;c) \neq (0\,;0\,;0)$ alors l'ensemble des points $\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)$ dont les coordonnées sont solutions de l'équation $ax+by+cz+d = 0$ est un plan $(\mathscr{P})$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Preuve : *Deux implications à montrer* :

– Si $\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)$ est un point de l'espace appartenant au plan $(\mathscr{P})$ passant par $\mathrm{A}\,(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A}\,;z_\mathrm{A})$ et de vecteur normal $\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$ alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}.\vec{n}=0 \iff \begin{pmatrix} x-x_\mathrm{A}\\ y-y_\mathrm{A}\\ z-z_\mathrm{A}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=0$$

$$a(x-x_\mathrm{A})+(y-y_\mathrm{A})+(z-z_\mathrm{A})=0 \iff ax+by+cz\underbrace{-(ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+cz_\mathrm{A})}_{d}=0$$

$$ax+by+cz+d=0.$$

– Réciproquement, supposons que les coordonnées d'un point $\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)$ soient solution de l'équation $ax+by+cz+d=0$ et montrons qu'il appartient alors à un certain plan $(\mathscr{P})$ dont on devra trouver un vecteur normal $\vec{n}$ et un point A.

Comme a, b et c sont non tous nuls, on peut, par exemple, supposer que $a\neq 0$. Le point $\mathrm{A}\left(-\dfrac{d}{a}\,;0\,;0\right)$ appartient donc au plan $(\mathscr{P})$.

On peut aussi poser $\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$, vecteur non nul car a, b et c sont non tous nuls.

On calcule alors $\overrightarrow{\mathrm{AM}}.\vec{n}=\begin{pmatrix} x+\dfrac{d}{a}\\ y\\ z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\left(x+\dfrac{d}{a}\right)\times a+by+cz$

$$=ax+by+cz+d=0.$$

Le point M appartient donc au plan $(\mathscr{P})$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Exemple 3 : Les Plans $(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j})$, $(\mathrm{O};\vec{i};\vec{k})$ et $(\mathrm{O};\vec{j};\vec{k})$ passant par $\mathrm{O}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et de vecteur normal respectif $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ont, respectivement, comme équation $z=0$, $y=0$ et $x=0$.

Exercice 8 : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Déterminer une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques du plan :

1. passant par $\mathrm{A}(1,-1,2)$ et dirigée par les vecteurs $\vec{u}(2,0,1)$ et $\vec{v}(2,1,0)$.
2. passant par les points $\mathrm{B}(-1,1,1),\mathrm{C}(1,-1,1)$ et $\mathrm{D}(1,1,-1)$.
3. passant par C et normal au vecteur $\vec{u}$.

Définition 9 (Équation normale d'un plan) : Soients a, b, c et d des réels tels que $(a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)$ et $(\mathscr{P})$ le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$.

L'équation est dite normale si $a^2+b^2+c^2=1$ *i.e.* $\|\vec{n}\|=1$ où $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Théorème 14 : Soient $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs $\vec{n} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{n'} \neq \vec{0}$.

- Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires, les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont sécants suivant une droite $(\mathscr{D})$ dirigée par $\vec{n} \wedge \overrightarrow{n'}$.
- Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires et si A est un point quelconque de $(\mathscr{P})$:
  - Si $A \in (\mathscr{P}')$, les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont confondus.
  - Si $A \notin (\mathscr{P})$, les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont strictement parallèles.
- $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont perpendiculaires si, et seulement si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux.

Ainsi,

$$\boxed{(\mathscr{P}) \mathbin{/\!/} (\mathscr{P}') \iff \vec{n} \wedge \overrightarrow{n'} = \vec{0} \quad \text{et} \quad (\mathscr{P}) \perp (\mathscr{P}') \iff \vec{n} \cdot \overrightarrow{n'} = 0.}$$

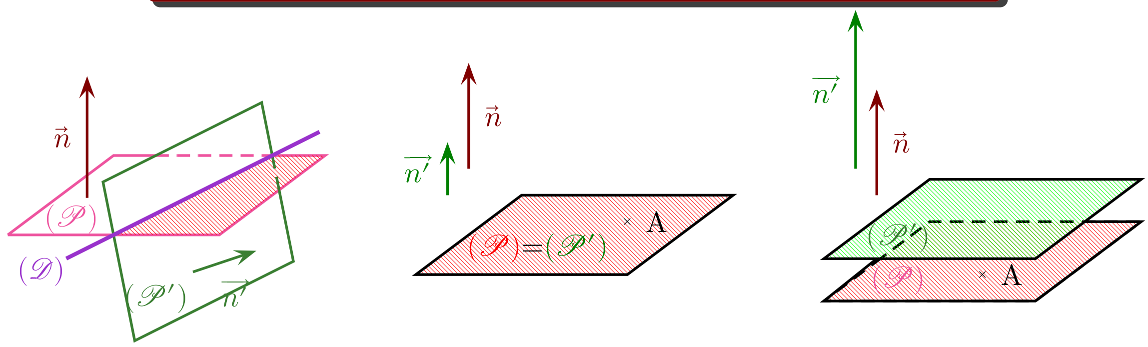


Table XXXII.1 – Position relative de plans.

Preuve :

– *Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires alors les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont parallèles. Reste à savoir s'ils sont confondus ou disjoints.*

– *Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires, les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont sécants suivant une droite $(\mathscr{D})$.*

$$\begin{aligned}
M \in (\mathscr{P}) \cap (\mathscr{P}') &\iff \begin{cases} M \in (\mathscr{P}) \\ M \in (\mathscr{P}') \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \\ \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{n'} \end{cases} \\
&\iff \overrightarrow{AM} \text{ est colinéaire à } \vec{n} \wedge \overrightarrow{n'}. \\
&\iff M \text{ appartient à la droite passant par A et dirigée par } \vec{n} \wedge \overrightarrow{n'}.
\end{aligned}$$

Pour résumé : $\vec{n} \wedge \overrightarrow{n'} \neq \vec{0} \implies (\mathscr{D}) = (\mathscr{P}) \cap (\mathscr{P}')$ *est une droite dirigée par* $\vec{n} \wedge \overrightarrow{n'}$.

Remarque : Dans l'espace, une droite $(\mathscr{D})$ n'est pas représentée par une seule équation cartésienne mais par deux : celles de deux plans sécants dont elle est l'intersection.

Plus précisément, en posant

$$\begin{cases} (\mathscr{P}) : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ un plan de vecteur normal } \overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}, \\ (\mathscr{P}') : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \text{ un plan de vecteur normal } \overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}. \end{cases}$$

Si $\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} \neq \vec{0}$ alors $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont sécants suivant une droite $(\mathscr{D})$ dont un système d'équations cartésienne est :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Exercice 9 : Soit $A\,(0\,;-1\,;4)$ et $(\mathscr{D}) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Déterminer une équation cartésienne du plan contenant A et $(\mathscr{D})$.

VI Distance

VI.1 Projection orthogonale d'un point sur un plan ou sur une droite

Définition 10 (Projeté orthogonal sur un plan) : Soient un plan $(\mathscr{P})$ de vecteur normal $\vec{n}$ et un point A de l'espace.

On appelle *projeté orthogonal* de A sur $(\mathscr{P})$, l'intersection du plan $(\mathscr{P})$ et de la droite de vecteur directeur $\vec{n}$ passant par A.

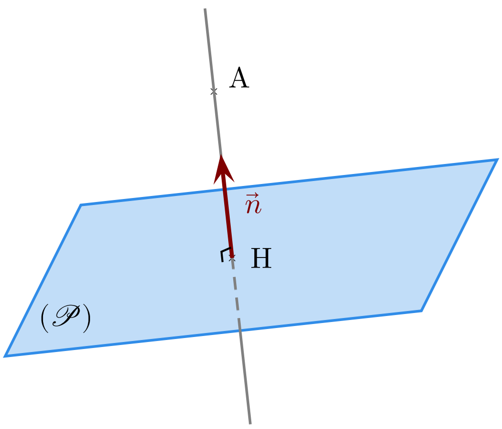


Figure XXXII.15 – H est le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{P})$.

Méthode 1 (Déterminer un projeté orthogonal sur un plan) :
Soient $(\mathscr{P})$ un plan et A un point de l'espace.

1. On détermine un vecteur normal au plan.
2. On trouve une représentation paramétrique de la droite $(\mathscr{D})$ perpendiculaire au plan passant par A.
3. On trouve le point d'intersection de $(\mathscr{D})$ et de $(\mathscr{P})$.

Exercice 10 : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point A sur le plan $(\mathscr{P})$.

1. $A(1;-1;0)$ et $(\mathscr{P}) : 2x-y-16=0$.
2. $A(2;1;3)$ et $(\mathscr{P}) : x+y+z=0$.

Définition 11 (Projeté orthogonal sur une droite) : Soient une droite $(\mathscr{D})$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et un point A de l'espace.

On appelle *projeté orthogonal* de A sur $(\mathscr{D})$, l'intersection de la droite $(\mathscr{D})$ et du plan de vecteur normal $\vec{u}$ et passant par A.

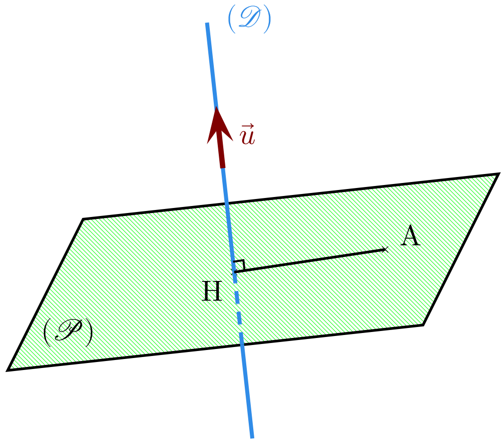


Figure XXXII.16 – H est le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{D})$.

VI.2 Distance d'un point à un plan

Définition 12 : Soient $(\mathscr{P})$ un plan et A un point de l'espace.

On appelle *distance de* A *à* $(\mathscr{P})$, notée $d(A;(\mathscr{P}))$, la plus petite des longueurs AM où $M \in (\mathscr{P})$.

$$d(A;(\mathscr{P})) = \min\{AM,\ M \in (\mathscr{P})\}.$$

Théorème 15 : Soient $(\mathscr{P})$ un plan et A un point de l'espace.

Si H est le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{P})$ alors $d(A;(\mathscr{P})) = AH$.

Preuve : Soient $(\mathscr{P})$ un plan, A un point, H son projeté orthogonal sur $(\mathscr{P})$. On considère M un point quelconque de $(\mathscr{P})$.

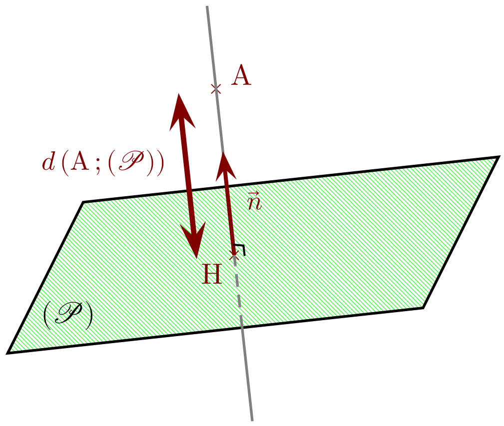


Figure XXXII.17 – $d(\mathrm{A}\,;(\mathscr{P})) = \mathrm{AH}$.

Par construction, le triangle AMH est rectangle en H dnc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\mathrm{AM}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{HM}^2 \implies \mathrm{AM}^2 \geqslant \mathrm{AH}^2 \iff \mathrm{AM} \geqslant \mathrm{AH}.$$

La longueur AH est donc bien la plus petite longueur d'un point de $(\mathscr{P})$ à A.

Donc $d(\mathrm{A}\,;(\mathscr{P})) = \mathrm{AH}$.

Proposition 16 : Soient $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ un repère quelconque et $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$.

Cas d'un plan défini par un point et un vecteur normal :

Soit $(\mathscr{P})$ le plan passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

$$\mathrm{d}(\mathrm{M}\,;(\mathscr{P})) = \frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|}{\|\vec{n}\|}. \tag{XXXII.3}$$

Cas d'un plan défini par un point et deux vecteurs directeurs :

Soit $(\mathscr{P})$ le plan passant par le point A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On note $(\mathscr{P}) = \mathrm{A} + \mathrm{vect}\,\vec{u};\,\vec{v}$.

$$\mathrm{d}(\mathrm{M}\,;(\mathscr{P})) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{\mathrm{AM}}\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right]\right|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}.$$

Preuve : Soit $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ un repère quelconque.

Soient $(\mathscr{P})$ le plan passant par A et $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$.

1. Supposons que $(\mathscr{P})$ ait pour vecteur normal $\vec{n}$. On note H le projeté orthogonal de M sur le plan $(\mathscr{P})$ alors :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \vec{n}.(\overrightarrow{\mathrm{AH}} + \overrightarrow{\mathrm{HM}}) = \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}} + \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HM}}.$$

Or, $\vec{n}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ sont orthogonaux i.e. $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}} = 0$.

Par ailleurs, $\vec{n}$ et $\overrightarrow{\mathrm{HM}}$ sont colinéaires donc $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HM}} = \pm\|\vec{n}\|\times\left\|\overrightarrow{\mathrm{HM}}\right\| = \pm\|\vec{n}\|\times\mathrm{HM}$.

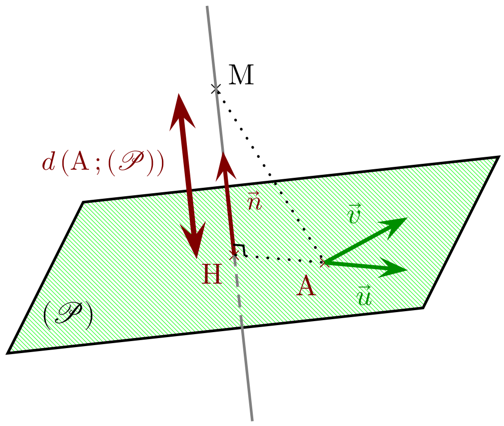


Figure XXXII.18 – Distance d'un point à un plan.

$$\text{Ainsi, } \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \pm\|\vec{n}\|\times \mathrm{HM} \implies \left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right| = \|\vec{n}\|\times\mathrm{HM}$$

$$\implies d\,(\mathrm{M}\,;(\mathscr{P})) = \frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|}{\|\vec{n}\|}. \qquad \text{(XXXII.4)}$$

2 Supposons que $(\mathscr{P})$ soit dirigé par les vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Le vecteur $\vec{n} = \vec{u}\wedge\vec{v}$ est un vecteur normal au plan $(\mathscr{P})$.

De plus, par invariance par permutation circulaire,

$$\left[\overrightarrow{\mathrm{AM}}\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right] = \left[\vec{u}\,;\vec{v}\,;\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right] = (\vec{u}\wedge\vec{v}).\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}.$$

Il ne reste plus qu'à appliquer la relation (XXXII.4) :

$$d\,(\mathrm{M}\,;(\mathscr{P})) = \frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|}{\|\vec{n}\|} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{\mathrm{AM}}\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right]\right|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}.$$

Exercice 11 : Calculer la distance du point B(1; 1; 1) au plan $\mathscr{Q}$ représenté par le paramétrage :

$$\begin{cases} x &= 2+s+t \\ y &= 3-s+2t \qquad s,t\in\mathbb{R}. \\ z &= 1+2s+t \end{cases}$$

Corollaire 16.1 (Cas d'un plan défini par une équation cartésienne dans un RON **) :** Soit $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$ un repère orthonormé.

Soit $(\mathscr{P})$ le plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ où a, b, c, $d\in\mathbb{R}$ et $(a\,;b\,;c)\,(0\,;0\,;0)$.

Pour tout point $\mathrm{M}\,(x_{\mathrm{M}}\,;y_{\mathrm{M}}\,;z_{\mathrm{M}})\in\mathscr{E}$, on a :

$$d\,(\mathrm{M}\,;(\mathscr{P})) = \frac{|ax_{\mathrm{M}}+by_{\mathrm{M}}+cz_{\mathrm{M}}+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Preuve : Il suffit d'appliquer la relation (XXXII.4).

Soit $\mathrm{M}(x_\mathrm{M}\,;y_\mathrm{M})\,z_\mathrm{M} \in \mathscr{E}$. Alors :

$$\begin{aligned} d\left(\mathrm{M}\,;(\mathscr{P})\right) &= \frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|a(x_\mathrm{M}-x_\mathrm{A})+b(y_\mathrm{M}-y_\mathrm{A})+(z_\mathrm{M}-z_\mathrm{A}|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &= \frac{|ax_\mathrm{M}+by_\mathrm{M}+cz_\mathrm{M}-(ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+cz_\mathrm{M})|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \end{aligned}$$

Or, $\mathrm{A}\in(\mathscr{D}) \iff d=-(ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+cz_\mathrm{A})$.

Donc, $d\left(\mathrm{M}\,;(\mathscr{P})\right) = \dfrac{|ax_\mathrm{M}+by_\mathrm{M}+cz_\mathrm{M}|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Exercice 12 : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$.

1. Déterminer la distance du point $\mathrm{A}(1,-2,3)$ au plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x+3y-4z-6=0$.
2. Déterminer la distance du point $\mathrm{B}(1,1,1)$ au plan $\mathscr{Q}$ représenté par la paramétrage :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+\lambda+\mu \\ y &=& 3-\lambda+2\mu \\ z &=& 1+2\lambda+\mu \end{array}\right. \qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

VI.3 Distance d'un point à une droite

Proposition 17 : Soient $\mathrm{A}, \mathrm{M}\in\mathscr{E}$ et $\vec{u}\in\vec{\mathscr{E}}$ non nul. On considère la droite $(\mathscr{D})=\mathrm{A}+\mathbb{R}\vec{u}$.

$$d\left(\mathrm{M}\,;(\mathscr{D})\right) = \frac{\left\|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}.$$

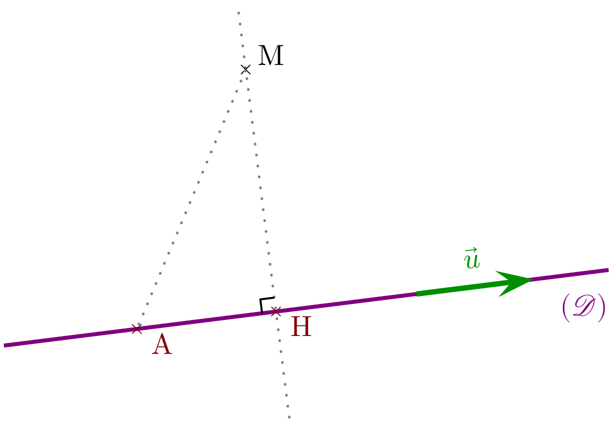


Figure XXXII.19 – Distance d'un point à une droite.

Preuve : Soit $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$ un repère quelconque de $\mathscr{E}$.

Soient $(\mathscr{D})$ la droite passant par le point A et dirigée par $\vec{u}$.

Pour $\mathrm{M}\in\mathscr{E}$, on note H le projeté orthogonal du point M sur la droite $(\mathscr{D})$ alors :

Par linéarité du produit vectoriel, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \vec{u} = (\overrightarrow{\mathrm{AH}} + \overrightarrow{\mathrm{HM}}) \wedge \vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AH}} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{\mathrm{HM}} \wedge \vec{u}.$$

Or, $\vec{u}$ *et* $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ *sont colinéaires i.e.* $\overrightarrow{\mathrm{AH}} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.
On en déduit que $\left\|\overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \vec{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{\mathrm{HM}} \wedge \vec{u}\right\|$.

Par ailleurs, $\vec{u}$ *et* $\overrightarrow{\mathrm{HM}}$ *sont orthogonaux donc* $\left\|\overrightarrow{\mathrm{HM}} \wedge \vec{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{\mathrm{HM}}\right\| \times \|\vec{u}\| = \mathrm{HM} \times \|\vec{u}\|$.

Ainsi, $\left\|\overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \vec{u}\right\| = \mathrm{HM} \times \|\vec{u}\| \implies d\,(\mathrm{M}\,;(\mathscr{D})) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$.

Exercice 13 : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$.

1. Déterminer la distance du point $\mathrm{A}(1,-2,3)$ à la droite $\mathcal{D}$ passant par $\mathrm{C}(0,1,2)$, dirigée par $\vec{u}(4,3,1)$.
2. Déterminer la distance du point $\mathrm{E}(1,0,-1)$ à la droite $\mathcal{D}'$ donnée par le système d'équations cartésiennes :
$$\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ -x+2y+z &= 0 \end{cases}$$

VII Sphères

Dans ce paragraphe, l'espace est muni d'un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$ orthonormé.

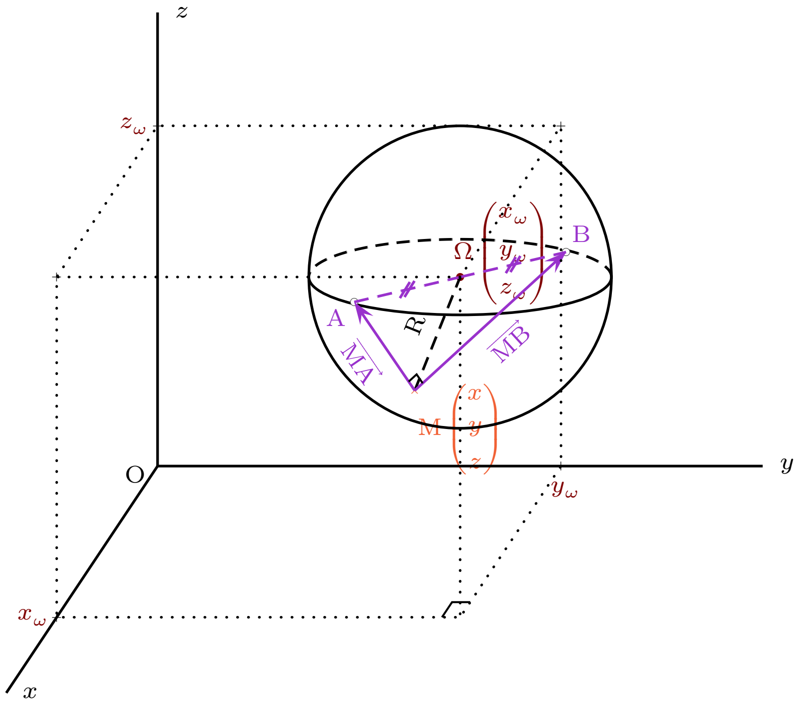


Figure XXXII.20 – Sphère de l'espace.

VII.1 Équations cartésiennes de sphères

Proposition 18 : Soient $\mathscr{S}$ la sphère de centre $\Omega\,(x_\omega\,;y_\omega\,;z_\omega)$ où $(x_\omega\,;y_\omega\,;z_\omega) \in \mathbb{R}^3$ et de rayon $\mathrm{R} \geqslant 0$.

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$ un point. Alors,

$$\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z) \in \mathscr{S} \iff (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 + (z - z_\omega)^2 = \mathrm{R}^2.$$

La sphère de centre $\Omega\,(x_\omega\,;y_\omega\,;z_\omega)$ et de rayon R, ou la sphère de diamètre [AB] est aussi l'ensemble des points $\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)$ de l'espace vérifiant :

$$\Omega\mathrm{M} = \mathrm{R} \iff \overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0.$$

Preuve : Soient $\mathscr{S}$ la sphère de centre $\Omega\,(x_\omega\,;y_\omega\,;z_\omega)$ où $(x_\omega\,;y_\omega)\,z_\omega \in \mathbb{R}^3$ et de rayon $\mathrm{R} \geqslant 0$ et $\mathrm{M} \in \mathscr{P}$ un point du plan. Soit $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z) \in \mathscr{S} \iff \Omega\mathrm{M} = \mathrm{R} \iff \Omega\mathrm{M}^2 = \mathrm{R}^2 \iff (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 + (z - z_\omega)^2 = \mathrm{R}^2.$$

Remarques : On appelle *boule* de centre $\Omega\,(x_\omega\,;y_\omega\,;z_\omega)$ et de rayon $\mathrm{R} \geqslant 0$ l'ensemble

$$\mathscr{B} = \left\{\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)\ /\ (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 + (z - z_\omega)^2 \leqslant \mathrm{R}^2\right\}.$$

Plus particulièrement,

— $\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)$ est strictement à l'extérieur de la sphère $\mathscr{S} \iff (x-x_\omega)^2+(y-y_\omega)^2+(z-z_\omega)^2 > \mathrm{R}^2$.

— $\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)$ est strictement à l'intérieur de la sphère $\mathscr{S} \iff (x-x_\omega)^2+(y-y_\omega)^2+(z-z_\omega)^2 < \mathrm{R}^2$.

Exercice 14 : Reconnaitre dans chacun des cas l'ensemble des points M vérifiant l'équation cartésienne donnée.

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 10 = 0$
2. $x^2 + y^2 + z^2 + y - 2z + 3 = 0$
3. $4y - 4x + 4z = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$
4. $x^2 + y^2 + z^2 + 6z + 9 = 0$
5. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$.

Proposition 19 : Soient a, b, c et d des réels et $\mathscr{S}$ l'ensemble d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

- Si $d < a^2 + b^2 + c^2$ alors est la sphère de centre $\Omega\,(a\,;b\,;c)$ et de rayon $\mathrm{R} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.
- Si $d = a^2 + b^2 + c^2$ alors $\mathscr{S}$ est réduit au point $\Omega\,(a\,;b\,;c)$.
- Si $d > a^2 + b^2 + c^2$ alors $\mathscr{S}$ est vide.

Preuve : Soit $(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z) \in \mathscr{S} &\iff x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0\\ &\iff (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d.\end{aligned}$$

– Si $d < a^2+b^2+c^2$ alors, en posant $\mathrm{R}=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$, on a :

$$\mathrm{M}(x\,;y\,;z)\in\mathscr{S} \iff (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\mathrm{R}^2 \iff \Omega\mathrm{M}=\mathrm{R},\text{ où } \Omega(a\,;b\,;c).$$

$\mathscr{S}$ est donc la sphère de centre $\Omega(a\,;b\,;c)$ et de rayon $\mathrm{R}=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

– Si $d = a^2+b^2+c^2$ alors

$$\mathrm{M}(x\,;y\,;z)\in\mathscr{S} \iff (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=0 \iff \begin{cases} x=a\\ y=b\\ z=c\end{cases}$$

$\mathscr{S}$ est donc réduit au point $\Omega(a\,;b\,;c)$.

– Si $d > a^2+b^2+c^2$ alors l'équation $\underbrace{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-zc)^2}_{\geqslant 0}=\underbrace{a^2+b^2+c^2-d}_{<0}$ n'a pas de solutions.

Donc $\mathscr{S}$ est vide.

Exercice 15 : Soient $\mathrm{A}(1\,;2\,;3)$, $\mathrm{B}(2\,;1\,;3)$, $\mathrm{C}(3\,;1\,;2)$ et $\mathrm{D}(1\,;0\,;-1)$.
Déterminer une équation cartésienne de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

VII.2 Intersection Sphère et Droite

Proposition 20 : Soient $\mathscr{S}$ une sphère de centre Ω et de rayon R et $(\mathscr{D})$ une droite de $\mathscr{E}$.

1. Si $\mathrm{d}(\Omega\,;(\mathscr{D}))<\mathrm{R}$ alors $\mathscr{S}$ et $(\mathscr{D})$ se coupent en deux points distincts.

   On dit que $\mathscr{S}$ et $(\mathscr{D})$ sont sécants.
2. Si $\mathrm{d}(\Omega\,;(\mathscr{D}))=\mathrm{R}$ alors $\mathscr{S}$ et $(\mathscr{D})$ se coupent en un unique point.

   On dit que $\mathscr{S}$ et $(\mathscr{D})$ sont tangents.
3. Si $\mathrm{d}(\Omega\,;(\mathscr{D}))>\mathrm{R}$ alors $\mathscr{S}\cap(\mathscr{D})=\varnothing$.

   On dit que $\mathscr{S}$ et $(\mathscr{D})$ sont extérieurs.

Preuve : Soient $\mathscr{S}$ une sphère de centre Ω et de rayon R, $(\mathscr{D})$ une droite de $\mathscr{E}$ et H le projeté orthogonal de Ω sur $(\mathscr{D})$ i.e. $\Omega\mathrm{H}=\mathrm{d}(\Omega\,;(\mathscr{D}))$.

Pour tout point M de $(\mathscr{D})$, le triangle ΩHM est rectangle en H et, d'après le théorème de Pythagore,

$$\Omega\mathrm{H}^2+\mathrm{HM}^2=\Omega\mathrm{M}^2 \iff \mathrm{HM}^2=\Omega\mathrm{M}^2-\Omega\mathrm{H}^2.$$

D'où,

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\in\mathscr{S} \iff \Omega\mathrm{M}=\mathrm{R} \implies & \mathrm{HM}^2=\mathrm{R}^2-\Omega\mathrm{H}^2.\\ & \mathrm{HM}^2=\mathrm{R}^2-\mathrm{d}(\Omega\,;(\mathscr{D}))^2. \qquad \text{(XXXII.5)}\end{aligned}$$

1. Si $\mathrm{d}(\Omega\,;(\mathscr{D}))>\mathrm{R} \iff \mathrm{R}^2-\Omega\mathrm{H}^2<0$ alors XXXII.5 n'a pas de solution et $\mathscr{S}\cap(\mathscr{D})=\varnothing$.
2. Si $\mathrm{d}(\Omega\,;(\mathscr{D}))=\mathrm{R} \iff \mathrm{HM}^2=\mathrm{R}^2-\Omega\mathrm{H}^2=0$ alors $\mathrm{M}=\mathrm{H}$: $\mathscr{S}$ et $(\mathscr{D})$ se coupent en un seul point T.

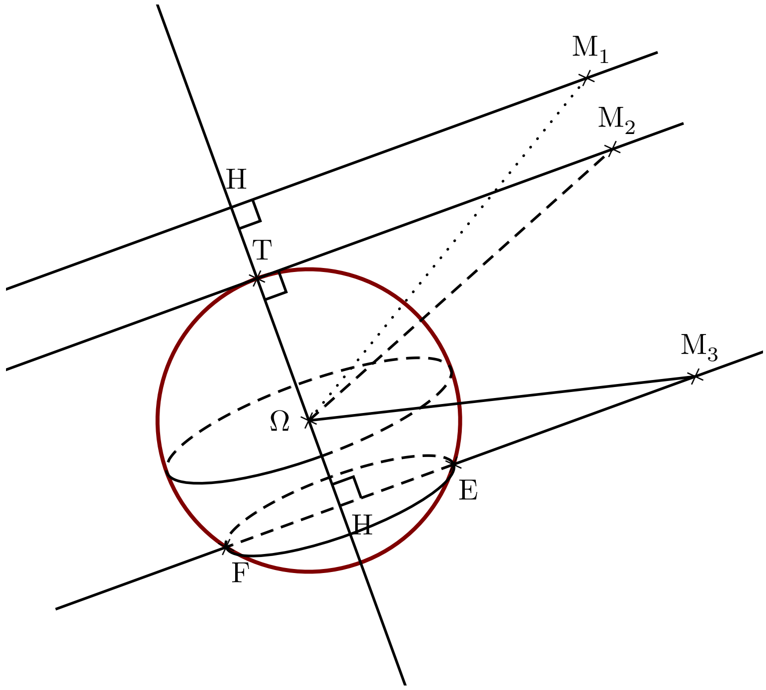


Figure XXXII.21 – Intersection d'une sphère et d'une droite.

3 Si $d(\Omega\,;(\mathscr{D})) < \mathrm{R}$ alors XXXII.5 a deux points E et F solutions vérifiant $\mathrm{HM} = \sqrt{\mathrm{R}^2 - \Omega\mathrm{H}^2}$.

Remarque : Dans le cas de 2, on redémontre, en particulier, que la tangente à un sphère est perpendiculaire à son rayon en le point de tangence.

Exercice 16 : Déterminer les points d'intersection de la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $\begin{cases} x - 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et de la sphère d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y + z - 3 = 0$.

VII.3 Intersection Sphère et Plan

Proposition 21 : Soient $\mathscr{S}$ une sphère de centre Ω et de rayon R et $(\mathscr{P})$ un plan de $\mathscr{E}$.

1. Si $d(\Omega\,;(\mathscr{P})) < \mathrm{R}$ alors $\mathscr{S}$ et $(\mathscr{P})$ sont sécants

   Dans ce cas, $\mathscr{S} \cap (\mathscr{P})$ est un cercle de rayon $\sqrt{\mathrm{R}^2 - d^2}$ et de centre H, projeté orthogonal de Ω sur le plan $(\mathscr{P})$.
2. Si $d(\Omega\,;(\mathscr{P})) = \mathrm{R}$ alors $\mathscr{S}$ et $(\mathscr{P})$ se coupent en un unique point.

   On dit que $\mathscr{S}$ et $(\mathscr{P})$ sont tangents.
3. Si $d(\Omega\,;(\mathscr{P})) > \mathrm{R}$ alors $\mathscr{S} \cap (\mathscr{P}) = \varnothing$.

   On dit que $\mathscr{S}$ et $(\mathscr{P})$ sont disjoints.

Preuve : Soient $\mathscr{S}$ une sphère de centre Ω et de rayon R, $(\mathscr{P})$ un plan de $\mathscr{E}$ et H le projeté orthogonal de Ω sur $(\mathscr{P})$ i.e. $\Omega\mathrm{H} = d(\Omega\,;(\mathscr{P}))$.

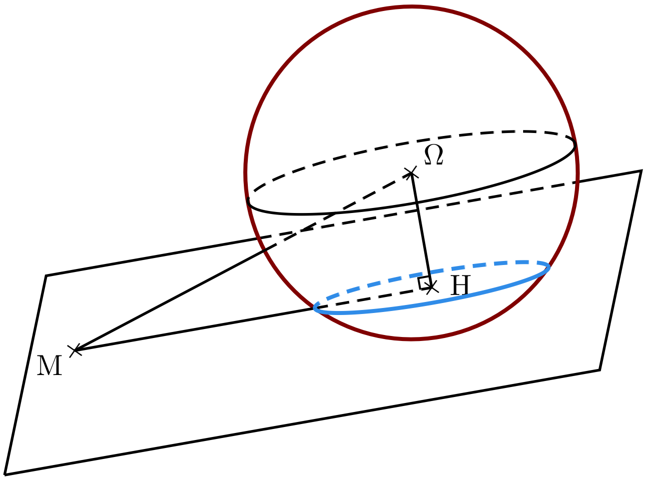


Figure XXXII.22 – Intersection d'une sphère et d'un plan.

Pour tout point M de $(\mathscr{P})$, le triangle ΩHM est rectangle en H et, d'après le théorème de Pythagore,

$$\Omega H^2 + HM^2 = \Omega M^2 \iff HM^2 = \Omega M^2 - \Omega H^2.$$

D'où,

$$M \in \mathscr{S} \iff \Omega M = R \iff HM^2 = R^2 - \Omega H^2 \iff HM^2 = R^2 - d(\Omega\,;(\mathscr{P}))^2. \qquad \text{(XXXII.6)}$$

1. Si $d(\Omega\,;(\mathscr{P})) > R \iff R^2 - \Omega H^2 < 0$ alors XXXII.6 n'a pas de solution et $\mathscr{S} \cap (\mathscr{P}) = \varnothing$.
2. Si $d(\Omega\,;(\mathscr{P})) = R \iff HM^2 = R^2 - \Omega H^2 = 0$ alors $M = H$: $\mathscr{S}$ et $(\mathscr{P})$ se coupent en un seul point T.
3. Si $d(\Omega\,;(\mathscr{P})) < R$ alors XXXII.6 a pour solutions tous les points de $(\mathscr{P})$ vérifiant $HM = \sqrt{R^2 - d(\Omega\,;(\mathscr{P}))^2}$.

   $\mathscr{S} \cap (\mathscr{P})$ est donc le cercle de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - d(\Omega\,;(\mathscr{P}))^2}$, inclus dans $(\mathscr{P})$.

Exercice 17 : L'espace est muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ orthonormé.

Montrer que $\mathscr{S}$ et $(\mathscr{P})$ se coupent suivant un cercle dont on donnera le rayon, l'axe et le centre

1. $\mathscr{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3 = 0$ et $(\mathscr{P}) : x + y - 2z - 2 = 0$.
2. $\mathscr{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y + z - 3 = 0$ et $(\mathscr{P}) : x + y - 2z - 2 = 0$.

Exercice 18 : Déterminer l'intersection des courbes suivantes :

1. $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$ et $P : x - 2y + z - 2 = 0$.
2. $P : 2x + y - 4z = 6$ et $R : x - y + 3z = 2$.
3. $\mathcal{Q}$ le plan passant par $A(1, -1, 0)$ et dirigé par $\vec{u}(2, 1, -1)$ et $\vec{v}(1, 4, 1)$.

   $\mathcal{D}$ la droite passant par $B(1, -1, 2)$ et dirigée par $\vec{w}(1, 1, 2)$.

Exercice 19 : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Déterminer une équation de la sphère de centre $\Omega(1, 0, 1)$ et tangente au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y + z - 1 = 0$.

Exercice 20 : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

1. Reconnaitre les deux courbes données, et déterminer leur intersection :

   a) $\mathrm{S} : x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$ et $\mathrm{P} : x-2y+z-2=0$.

   b) $\mathrm{S}' : x^2+y^2+z^2-2x-3=0$ et $\mathrm{Q} : x+y-2z-2=0$.

   c) $\mathrm{P} : 5x-2y=7$ et $\mathrm{P}' : -x+3y-z-1=0$.

   d) $\mathrm{S}'' : x^2+y^2+z^2-2x-y+z-3=0$ et $\delta : \begin{cases} x=-1+2t \\ y=2t \\ z=1-3t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

2. Soit $\mathcal{Q}$ le plan passant par $\mathrm{A}(1,-1,0)$ et dirigé par $\vec{u}(2,1,-1)$ et $\vec{v}(1,4,1)$.

   Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $\mathrm{B}(1,-1,2)$ et dirigée par $\vec{w}(1,1,2)$.

   Déterminer $\mathcal{Q}\cap\mathcal{D}$.

VII.4 Intersection de deux sphères

Proposition 22 : Soient deux sphères $\mathscr{S}(\Omega\,;\mathrm{R})$ et $\mathscr{S}'(\Omega'\,;\mathrm{R}')$ de centres distincts.

Alors :
$$\mathscr{S}\cap\mathscr{S}'\neq\varnothing \iff |\mathrm{R}-\mathrm{R}'|\leqslant \mathrm{d}(\Omega\,;\Omega')\leqslant \mathrm{R}+\mathrm{R}'.$$

Plus précisément :

- Si $\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega')=\mathrm{R}+\mathrm{R}'$ alors les deux sphères sont tangentes extérieurement.

  Leur intersection est réduite à un point de $(\Omega\Omega')$.
- Si $\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega')=|\mathrm{R}-\mathrm{R}'|$ alors les deux sphères sont tangentes intérieurement.

  Leur intersection est réduite à un point de $(\Omega\Omega')$.
- Si $|\mathrm{R}-\mathrm{R}'|<\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega')<\mathrm{R}+\mathrm{R}'$ alors les deux sphères sont sécantes.

  Leur intersection est un cercle d'axe $(\Omega\Omega')$.

Preuve : Soient deux sphères $\mathscr{S}(\Omega\,;\mathrm{R})$ et $\mathscr{S}'(\Omega'\,;\mathrm{R}')$ de centres distincts.

Posons $d=\Omega\Omega'$ et plaçons nous dans le repère orthonormé direct $(\Omega,\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$ où $\vec{i}=\dfrac{1}{d}\overrightarrow{\Omega\Omega'}$.

Dans ce repère, $\mathscr{S}$ a pour équation $x^2+y^2+z^2=\mathrm{R}^2$ et $\mathscr{S}'$ a pour équation $(x-d)^2+y^2+z^2=\mathrm{R}^2$.

Soit x, y et z des réels. On a :

$$\mathrm{M}(x\,;y\,;z)\in\mathscr{S}\cap\mathscr{S}' \iff \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = \mathrm{R}^2 \\ (x-d)^2+y^2+z^2 = \mathrm{R}'^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = \mathrm{R}^2 \\ x^2+y^2+z^2-2dx = \mathrm{R}'^2-d^2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = \mathrm{R}^2 \\ x = \dfrac{\mathrm{R}^2-\mathrm{R}'^2+d^2}{2d} \end{cases}$$

Ce système exprime le fait que déterminer $\mathscr{S}\cap\mathscr{S}'$ revient à déterminer $\mathscr{S}\cap(\mathscr{P})$ où $(\mathscr{P})$ est le plan d'équation $x=\dfrac{\mathrm{R}^2-\mathrm{R}'^2+d^2}{2d}$.

Or, $\mathrm{d}(\Omega\,;(\mathscr{P}))=\dfrac{|\mathrm{R}^2-\mathrm{R}'^2+d^2|}{2d}$.

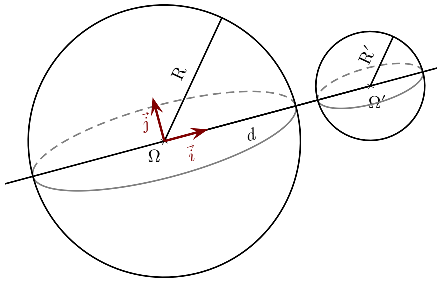


Figure XXXII.23 – $\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega') > \mathrm{R} + \mathrm{R}'$.

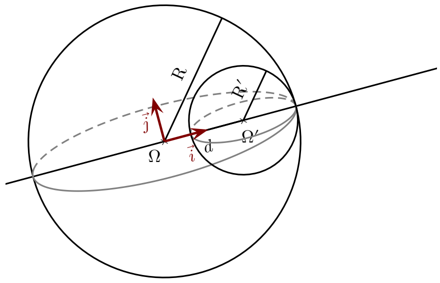


Figure XXXII.26 – $\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega') = |\mathrm{R} - \mathrm{R}'|$.

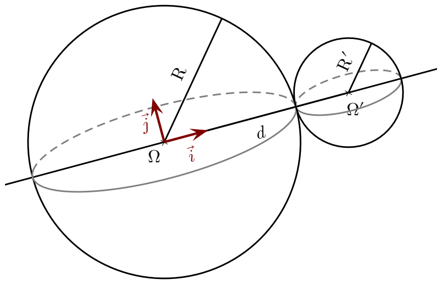


Figure XXXII.24 – $\mathrm{d}(\Omega\,;\Omega') = \mathrm{R} + \mathrm{R}'$.

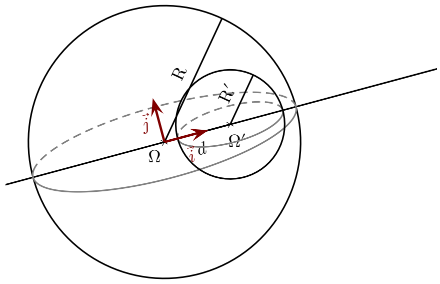


Figure XXXII.27 – $0 < \mathrm{d}(\Omega\,;\Omega') < |\mathrm{R} - \mathrm{R}'|$.

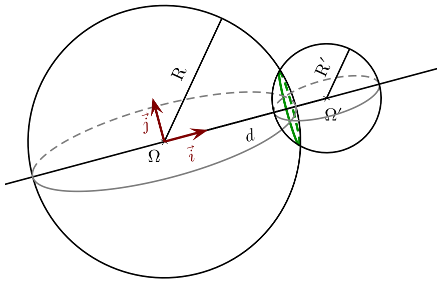


Figure XXXII.25 – $|\mathrm{R} - \mathrm{R}'| < \mathrm{d}(\Omega\,;\Omega') < \mathrm{R} + \mathrm{R}'$.

Figure XXXII.28 – Positions relatives de deux sphères.

On retrouve donc, comme pour les deux cercles dans le plan, les trois cas d'intersection suivant que $\dfrac{|\mathrm{R}^2 - \mathrm{R}'^2 + d^2|}{2d}$ est strictement inférieur, égal ou strictement supérieur à R :

$$\mathscr{S} \cap \mathscr{S}' \neq \varnothing \iff |\mathrm{R} - \mathrm{R}'| \leqslant \mathrm{d}(\Omega\,;\Omega') \leqslant \mathrm{R} + \mathrm{R}'.$$

De même pour les cas de tangence :

$$\frac{|\mathrm{R}^2 - \mathrm{R}'^2 + d^2|}{2d} = \mathrm{R} \iff |\mathrm{R} - \mathrm{R}'| = d \text{ ou } \mathrm{R} + \mathrm{R}' = d.$$