

Variables aléatoires

Un employé d'un centre d'appels doit joindre N personnes.

- Le premier jour, il appelle ces N personnes, chacune ayant une probabilité $p \in]0; 1[$ de répondre, et ce de façon indépendante des autres personnes. On note alors X_1 le nombre de personnes ayant répondu ce premier jour.
- Le deuxième jour, l'employé rappelle tous ceux qui n'ont pas répondu à son premier appel, mais ne rappelle pas ceux qui ont déjà répondu le premier jour. On suppose que la probabilité p de répondre est inchangée. On note alors X_2 le nombre de personnes ayant répondu ce deuxième jour.
- L'employé, voulant suivre les directives du centre d'appels, est tenace : il rappelle le troisième jour tous ceux qui n'ont pas répondu lors des deux jours précédents et ainsi de suite...
- Il rappelle donc le jour n toutes les personnes n'ayant pas répondu les $(n-1)$ jours précédents. La probabilité de répondre est toujours de p pour chaque personne, et le fait de répondre est indépendant des autres. On note X_n le nombre de personnes ayant répondu le jour n .
- Enfin, on note Z_n le nombre total de personnes qui ont pu être jointes durant les n premiers jours.

On supposera que les variables aléatoires sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.

Partie A. *Les deux premiers jours*

- A1. ☐ (a) Reconnaître la loi suivie par X_1 (justifier).
☐ (b) En déduire l'ensemble des valeurs $X_1(\Omega)$ ainsi que l'espérance et la variance de X_1 .
- A2. Soit $i \in \llbracket 0; N \rrbracket$.
☐ (a) Sachant $(X_1 = i)$, quelles sont les valeurs prises par X_2 ?
☐ (b) En déduire la loi conditionnelle de X_2 sachant $(X_1 = i)$ en donnant les valeurs $\mathbb{P}(X_2 = j \mid X_1 = i)$ pour tout $j \in \llbracket 0; N \rrbracket$.
☐ (c) Conclure en donnant la loi du couple (X_1, X_2) .

Partie B. *Un cas particulier des deux premiers jours.*

On suppose dans cette partie que $N = 2$ et $p = \frac{1}{2}$. On donne le tableau décrivant la loi de (X_1, X_2) ci-dessous :

$\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j)$		j		
		0	1	2
i	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
	1	λ	λ	0
	2	λ	0	0

- B1. Que vaut λ ?
 B2. Par un exemple de calcul de probabilité (qui ne renvoie pas la valeur 0), vérifier la cohérence de ce tableau avec le résultat obtenu en ☒ (c).

- B3. Déterminer la loi de X_2 en justifiant soigneusement (*un calcul littéral et numérique est attendu*).
- B4. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
- B5. Calculer $\mathbb{E}(X_2)$ et $\mathbb{V}(X_2)$.

Partie C. Les prémices de la loi de Z_n .

On revient au cas général où $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$.

- C1. Si $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer Z_n en fonction des X_k .
- C2. Soit $k \geq 2$. Calculer $\mathbb{P}(X_k = 0 \mid X_1 = 0, \dots, X_{k-1} = 0)$.
- C3. En déduire que $\mathbb{P}(Z_n = 0) = (1-p)^{nN}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- C4. Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0)$?

Partie D. Loi de Z_n .

- D1. À l'aide de la question (b), montrer que pour tout $(i, j) \in \llbracket 0; N \rrbracket^2$,

$$\mathbb{P}(Z_2 = j \mid Z_1 = i) = \begin{cases} \binom{N-i}{j-i} p^{j-i} (1-p)^{N-j} & \text{si } j \geq i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- D2. Si $j \in \llbracket 0; N \rrbracket$, en déduire que :

$$\mathbb{P}(Z_2 = j) = p^j (1-p)^{2N-2j} \sum_{i=0}^j \binom{N-i}{j-i} \binom{N}{i} (1-p)^{j-i}.$$

- D3. Simplifier $\frac{\binom{N-i}{j-i} \binom{N}{i}}{\binom{j}{i}}$.

- D4. En déduire que $Z_2 \sim \mathcal{B}(N, p_2)$ où $p_2 = p(2-p)$.

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $Z_n \sim \mathcal{B}(N, p_n)$ où (p_n) est une suite de réels définie par la relation de récurrence suivante :

$$p_1 = p \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = (1-p)p_n + p.$$

- D5. Déterminer une expression de p_n en fonction de p et de n .
- D6. Retrouver le résultat de la question (C4.).