Nom : .... **Prénom :** ....

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *Convergence des séries de Riemann.*

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général $\left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

Exercice 2 : Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y+z, x+y+z, x) \end{array}$.

1. Donner les images par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer des bases de $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.
3. Soit $u = (0,-1,1)$, $v = (1,0,-1)$ et $w = (2,3,1)$. Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$, et déterminer les formules analytiques de f dans cette base.

Exercice 3 : Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Déterminer une base de $\ker(f - \mathrm{I}d)$ et de $\ker(f - 2\mathrm{I}d)$.
2. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice Δ de f est diagonale.
3. Calculer Δ^n, puis A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *$\mathscr{F}$ est une base de E si, et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathscr{F}_{\mathrm{E}}}(\mathscr{F})$ est inversible.*

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général $(1+2+\ldots+n)^{-\alpha}$.

Exercice 2 : On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ $f : (x, y) \mapsto (-13x + 6y, -9x + 8y)$.

1. Déterminer sa matrice dans la base canonique ;
2. Soient $u = (1, 3)$ et $v = (2, 1)$.

   Vérifier que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$, et déterminer $\mathrm{mat}_{(u,v)}(f)$

Exercice 3 : Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ de matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

1. Montrer que $\mathscr{B}' = (e_2, e_1, e_3)$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *Théorème de comparaison pour les séries positives.*

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)}$.

Exercice 2 : Soit $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}-\mathrm{P}' \end{array}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.
3. f est-il un isomorphisme ?

Exercice 3 : Soit $\mathrm{E}=\mathbb{R}^n$ de base $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_n)$.

On considère $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ de matrice $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} \alpha & & (\beta) \\ & \ddots & \\ (\beta) & & \alpha \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

1. Soit $\mathcal{B}'=(e'_1,\cdots,e'_n)$ où $e'_i=\sum_{k=1}^{i} e_k$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *Si* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *et* $x \in \mathrm{E}, \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_\mathrm{F}}(f(x)) = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_\mathrm{E},\mathscr{B}_\mathrm{F}}(f) \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_\mathrm{E}}(x)$.

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{\binom{5n}{2n}}$.

Exercice 2 : Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Y a-t-il une base dans laquelle la matrice de f est $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

Exercice 3 : Soit E un espace de dimension finie. Montrer que la trace d'un projecteur est son rang.

Nom : .... **Prénom :** ....

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *Comparaison série-intégrale.*

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}}$.

Exercice 2 : La famille suivante de $\mathbb{R}^4$ est-elle libre ou liée ? Fournir des relations de dépendance linéaire quand des relations existent.

(e_1, e_2, e_3) où $e_1 = (3, 0, 1, -2)$, $e_2 = (1, 5, 0, -1)$ et $e_3 = (7, 5, 2, 1)$.

Exercice 3 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. u est l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E},\ u(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}.$$

1. Déterminer $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$.
2. Déterminer explicitement une base dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *est isomorphe à* $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général $\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)^n$.

Exercice 2 : La famille suivante de $\mathbb{R}^4$ est-elle libre ou liée ? Fournir des relations de dépendance linéaire quand des relations existent.

(e_1, e_2, e_3, e_4) où $e_1 = (1,1,1,1)$, $e_2 = (1,1,1,-1)$, $e_3 = (1,1,-1,1)$ et $e_4 = (1,-1,1,1)$.

Exercice 3 : Soient $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}$ des espaces de dimension finie. On considère $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$.

Montrer que

$$\operatorname{Im} f = \ker g \iff \begin{cases} g \circ f = 0 \\ \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = \dim \mathrm{F}. \end{cases}$$

Nom : .... **Prénom :** ....

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *Convergence des séries de Riemann.*

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Exercice 2 : La famille suivante de $\mathbb{R}^4$ est-elle libre ou liée ? Fournir des relations de dépendance linéaire quand des relations existent.

(e_1, e_2, e_3, e_4) où $e_1 = (0,0,1,0)$, $e_2 = (0,0,0,1)$, $e_3 = (1,0,0,0)$ et $e_4 = (0,1,0,0)$.

Exercice 3 : La famille suivante de $\mathbb{R}^4$ est-elle libre ou liée ? Fournir des relations de dépendance linéaire quand ces relations existent.

(e_1, e_2, e_3, e_4) où $e_1 = (2,-1,3,1)$, $e_2 = (1,1,1,1)$, $e_3 = (4,1,5,3)$ et $e_4 = (1,-2,2,0)$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *$\mathscr{F}$ est une base de E si, et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathscr{F}_{\mathrm{E}}}(\mathscr{F})$ est inversible.*

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Exercice 2 : La famille suivante de $\mathbb{R}^4$ est-elle libre ou liée ? Fournir des relations de dépendance linéaire quand des relations existent.

(e_1, e_2, e_3, e_4) où $e_1 = (2, -1, 3, 1)$, $e_2 = (1, 1, 1, 1)$, $e_3 = (4, 1, 5, 3)$ et $e_4 = (1, -2, 2, 0)$.

Exercice 3 : Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.

1. On pose $\mathscr{B}' = (e_1 + 2e_2 + e_3, e_1 + 2e_2 + 2e_3, e_2 + 2e_3)$. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E.
2. Soit ϕ l'endomorphisme de E tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 14 & -10 & 4 \\ 16 & -10 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(\phi)$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *Théorème de comparaison pour les séries positives.*

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$(1+2+...+n)^{-\alpha}.$$

Exercice 2 : Déterminer $\ker f_i$ et $\operatorname{Im}(f)_i$.
En déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f_1(x,y) = (2x+y, x-y)$$

Exercice 3 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_3[X] \\ P & \longmapsto & \frac{1}{2}X^2P'' - XP' + P \end{array}$.

1. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$.
2. Montrer que $\mathbb{C}_3[X] = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$.
3. Quelle est la nature de f ?
4. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.

Nom : .... **Prénom :** ....

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *Si* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *et* $x \in \mathrm{E}, \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{F}}}(f(x)) = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}},\mathscr{B}_{\mathrm{F}}}(f) \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}}}(x)$.

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)}.$$

Exercice 2 : Déterminer $\ker f_i$ et $\operatorname{Im}(f)_i$.
En déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

$$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f_2(x, y, z) = (2x + y + z, y - z, x + y)$$

Exercice 3 : Soient $b_1 = (1, 1, 2)$, $b_2 = (-2, -1, 3)$, et $b_3 = (0, -3, -1)$.
On note $\mathrm{F} = \operatorname{vect}(b_1, b_2)$ et $\mathrm{G} = \operatorname{vect}(b_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Que peut-on en déduire pour F et G ?
3. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Déterminer la matrice M de p dans la base $\mathcal{B}$
4. En déduire la matrice N de p dans la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *Comparaison série-intégrale.*

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 2 : Déterminer $\ker f_i$ et $\operatorname{Im}(f)_i$.
En déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

$$f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4,\ f_3(x, y) = (y, 0, x - 7y, x + y)$$

Exercice 3 : Soit E un espace de dimension finie. Montrer que la trace d'un projecteur est son rang.

Nom : .... **Prénom :** ....

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *$\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est isomorphe à $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\frac{1}{n\ln n} \text{ pour } n \geqslant 2.$$

Exercice 2 : Déterminer $\ker f_i$ et $\operatorname{Im}(f)_i$.
En déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

$$f_4 : \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}^3,\ f_4(\mathrm{P}) = (\mathrm{P}(-1), \mathrm{P}(0), \mathrm{P}(1))$$

Exercice 3 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y+z, x+y+z, x) \end{array}$.

1. Donner les images par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer des bases de $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.
3. Soit $u = (0,-1,1)$, $v = (1,0,-1)$ et $w = (2,3,1)$. Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$, et déterminer les formules analytiques de f dans cette base.

Nom : .... **Prénom :** ....

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *Convergence des séries de Riemann.*

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$$

Exercice 2 : On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ $f : (x, y) \mapsto (-13x + 6y, -9x + 8y)$.

1. Déterminer sa matrice dans la base canonique ;
2. Soient $u = (1, 3)$ et $v = (2, 1)$.

   Vérifier que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$, et déterminer $\text{mat}_{(u,v)}(f)$

Exercice 3 : Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.

1. On pose $\mathcal{B}' = (e_1 + 2e_2 + e_3, e_1 + 2e_2 + 2e_3, e_2 + 2e_3)$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E.
2. Soit ϕ l'endomorphisme de E tel que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 14 & -10 & 4 \\ 16 & -10 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer $\text{mat}_{\mathcal{B}'}(\phi)$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *$\mathscr{F}$ est une base de E si, et seulement si* $\text{mat}_{\mathscr{F}_{\text{E}}}(\mathscr{F})$ *est inversible.*

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\frac{n!}{n^n}.$$

Exercice 2 : Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\text{S}_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ diverge.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{a_n}{\text{S}_n}$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 3 : Soit $\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Déterminer une base de $\ker(f - \text{I}d)$ et de $\ker(f - 2\text{I}d)$.
2. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice Δ de f est diagonale.
3. Calculer Δ^n, puis A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *Théorème de comparaison pour les séries positives.*

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\frac{n^\alpha (\ln n)^n}{n!}.$$

Exercice 2 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}.$$

1. Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
2. En déduire l'existence d'un réel $k > 0$ tel que :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} k\sqrt{n}\,\frac{n^n}{e^n}.$$

Exercice 3 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Y a-t-il une base dans laquelle la matrice de f est $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

Nom : .... **Prénom :** ....

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *Si* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *et* $x \in \mathrm{E}, \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{F}}}(f(x)) = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}}, \mathscr{B}_{\mathrm{F}}}(f) \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}}}(x)$.

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\frac{1}{\binom{5n}{2n}}.$$

Exercice 2 : Déterminer la nature de la série de terme général $\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)^n$.

Exercice 3 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ de matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_2, e_1, e_3)$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *Comparaison série-intégrale.*

Exercice 1 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x + y, x - y) \end{array}$

Déterminer une base du noyau et de l'image de f et en déduire si f est injective, surjective, bijective.

Exercice 2 : Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ diverge.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{a_n}{\mathrm{S}_n}$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 3 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ de base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$.

On considère $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ de matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \alpha & & (\beta) \\ & \ddots & \\ (\beta) & & \alpha \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

1. Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ où $e'_i = \sum_{k=1}^{i} e_k$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *$\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est isomorphe à $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*

Exercice 1 : Soit E un espace vectoriel et soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E, on définit l'application $f\colon \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \to \mathrm{E}$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Que donne le théorème du rang ?

Exercice 2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite strictement positive. On pose $v_n = \dfrac{u_n}{\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)}$.

1. Déterminer la somme $\mathrm{T}_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$, en fonction de $\mathrm{P}_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)$.
2. Montrer que la série $\sum v_n$ converge.
3. Montrer que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = 1 \iff \sum u_n$ diverge.

Exercice 3 : Soient $b_1 = (1,1,2)$, $b_2 = (-2,-1,3)$, et $b_3 = (0,-3,-1)$.
On note $\mathrm{F} = \mathrm{vect}\,(b_1, b_2)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{vect}\,(b_3)$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Que peut-on en déduire pour F et G ?
3. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Déterminer la matrice M de p dans la base $\mathscr{B}$
4. En déduire la matrice N de p dans la base canonique $\mathscr{E}$ de $\mathbb{R}^3$.