Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *Convergence des séries de Riemann.*

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général $\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Correction :

$$\begin{aligned}
\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}} = e^{n\ln\cos\frac{1}{\sqrt{n}}} - e^{-\frac{1}{2}} &= e^{n\ln\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} - e^{-\frac{1}{2}} \\
&= e^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} - e^{-\frac{1}{2}} \\
&= \left[e^{-\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} - 1\right] e^{-\frac{1}{2}} \\
&= \left[-\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right] e^{-\frac{1}{2}} \\
&\sim -\frac{1}{12n\sqrt{e}}
\end{aligned}$$

Donc la série (à termes négatifs) diverge.

Exercice 2 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y+z, x+y+z, x) \end{array}$.

1. Donner les images par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer des bases de $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.
3. Soit $u = (0,-1,1)$, $v = (1,0,-1)$ et $w = (2,3,1)$. Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$, et déterminer les formules analytiques de f dans cette base.

Exercice 3 : Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Déterminer une base de $\ker(f - \mathrm{Id})$ et de $\ker(f - 2\mathrm{Id})$.
2. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice Δ de f est diagonale.
3. Calculer Δ^n, puis A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *$\mathscr{F}$ est une base de E si, et seulement si $\text{mat}_{\mathscr{F}_E}(\mathscr{F})$ est inversible.*

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général $(1+2+\ldots+n)^{-\alpha}$.

Correction : $(1+2+\ldots+n)^{-\alpha} = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^{-\alpha} \sim \dfrac{2^\alpha}{n^{2\alpha}}$.

La série (à termes positifs) converge si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2 : On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ $f : (x,y) \mapsto (-13x+6y, -9x+8y)$.

1. Déterminer sa matrice dans la base canonique ;
2. Soient $u = (1,3)$ et $v = (2,1)$.

   Vérifier que (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$, et déterminer $\text{mat}_{(u,v)}(f)$

Exercice 3 : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

1. Montrer que $\mathscr{B}' = (e_2, e_1, e_3)$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *Théorème de comparaison pour les séries positives.*

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)}$.

Correction : $\dfrac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)} \sim \dfrac{\frac{e^n}{2}}{\frac{e^{2n}}{2}} = e^{-n}$. Donc la série (à TP) converge.

Exercice 2 : Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P - P' \end{array}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. f est-il un isomorphisme ?

Exercice 3 : Soit $E = \mathbb{R}^n$ de base $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$.

On considère $f \in \mathscr{L}(E)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & & (\beta) \\ & \ddots & \\ (\beta) & & \alpha \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$.

1. Soit $\mathscr{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ où $e'_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} e_k$. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *Si* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *et* $x \in \mathrm{E}$, $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_\mathrm{F}}(f(x)) = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_\mathrm{E}, \mathscr{B}_\mathrm{F}}(f) \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_\mathrm{E}}(x)$.

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{\binom{5n}{2n}}$.

Correction : Posons $u_n = \dfrac{1}{\binom{5n}{2n}} = \dfrac{(5n)!}{(2n)!(3n)!}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(5n+5)!}{(2n+2)!(3n+3)!}}{\frac{(5n)!}{(2n)!(3n)!}} = \frac{(5n+5)(5n+4)(5n+3)(5n+2)(5n+1)}{(2n+2)(2n+1)(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \sim \frac{5^5}{2^2 3^3} < 1.$$

Donc la série (à termes positifs) converge.

Exercice 2 : Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Y a-t-il une base dans laquelle la matrice de f est $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

Exercice 3 : Soit E un espace de dimension finie. Montrer que la trace d'un projecteur est son rang.

Correction : Soit p un projecteur de E. Si $p = 0$, $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p) = 0$ et si $p = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$, $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p) = n$.

Dorénavant, p est un projecteur de rang $r \in [\![1, n-1]\!]$. On choisit une base de E $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p)$. Dans cette base, la matrice de p s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & & \\ & & & \mathrm{O} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

où le nombre de 1 est $\dim(\mathrm{Im}(p)) = r$. Mais alors $\mathrm{Tr}(p) = r$.

En dimension finie, la trace d'un projecteur est son rang.

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *Comparaison série-intégrale.*

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}}$.

Correction :
$$\begin{aligned}
u_n &= n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}} \\
&= e^{\frac{\ln n}{n}} - e^{\frac{\ln n}{n+1}} \\
&= e^{\frac{\ln n}{n}} - e^{\frac{\ln n}{n}(1-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))} \\
&= e^{\frac{\ln n}{n}} - e^{\frac{\ln n}{n}-\frac{\ln n}{n^2}+o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)} \\
&= e^{\frac{\ln n}{n}}\left[1 - e^{-\frac{\ln n}{n^2}+o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)}\right]
\end{aligned}$$

Donc $u_n \sim e^{\frac{\ln n}{n}} \dfrac{\ln n}{n^2} \sim \dfrac{\ln n}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

Ainsi, la série à de TG positif u_n converge. Donc $\sum u_n$ converge.

Exercice 2 : La famille suivante de $\mathbb{R}^4$ est-elle libre ou liée ? Fournir des relations de dépendance linéaire quand des relations existent.

(e_1, e_2, e_3) où $e_1 = (3, 0, 1, -2)$, $e_2 = (1, 5, 0, -1)$ et $e_3 = (7, 5, 2, 1)$.

Correction : La matrice de la famille (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Les trois dernières équations du système $\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0$ d'inconnues λ, μ et ν forment un sous-système de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

En développant le déterminant de cette matrice suivant sa première colonne, on obtient

$$\det(A) = -10 - 2 \times 10 = -30 \neq 0.$$

Ce sous-système est de Cramer et admet donc l'unique solution $(\lambda, \mu, \nu) = (0, 0, 0)$. Par suite, la famille (e_1, e_2, e_3) est libre.

Exercice 3 : Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. u est l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall P \in E,\ u(P) = P(X+1) - P.$$

1. Déterminer $\ker u$ et $\mathrm{Im}\,u$.

2. Déterminer explicitement une base dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Correction :

1. u est dans $\mathcal{L}(E)$ car u est linéaire et si P est un polynôme de degré au plus n alors $u(P)$ est un polynôme de degré au plus n.

• Les polynômes constants sont dans $\ker u$. Réciproquement, soit P un élément de $\ker u$ puis $Q = P - P(0)$.

Par hypothèse, $P(0) = P(1) = P(2) = \dots$ et donc $0, 1, 2, \dots$ sont des racines de Q. Puisque le polynôme Q admet une infinité de racines, Q est nul et donc $P = P(0)$ et $P \in \mathbb{K}_0[X]$. Ainsi, $\ker u = \mathbb{K}_0[X]$.

• Mais alors, d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}\,u = (n+1) - 1 = n$. D'autre part, si P est dans $\mathbb{K}_n[X]$, $P(X+1) - P$ est dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ (si on pose $P = a_n X^n + \dots$, le coefficient de X^n dans $u(P)$ est $a_n - a_n = 0$).

En résumé, $\mathrm{Im}\,u \subset \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $\dim \mathrm{Im}\,u = \dim \mathbb{K}_{n-1}[X] < +\infty$ et donc $\mathrm{Im}\,u = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$$\ker u = \mathbb{K}_0[X] \text{ et } \mathrm{Im}\,u = \mathbb{K}_{n-1}[X].$$

2. On part de $P_0 = 1$ et aussi de $P_1 = X$ qui vérifient bien $u(P_0) = 0$ et $u(P_1) = P_0$.

Trouvons $P_2 = aX^2 + bX$ tel que $u(P_2) = P_1$ (il est clair que si $\deg(P) \geqslant 1$, $\deg(u(P)) = \deg(P) - 1$ et d'autre part, les constantes sont inutiles car $\ker u = \mathbb{K}_0[X]$).

$$u(P_2) = P_1 \Leftrightarrow a(X+1)^2 + b(X+1) - aX^2 - bX = X \Leftrightarrow (2a-1)X + a + b = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -a.$$

On prend $P_2 = \frac{1}{2}(X^2 - X) = \frac{1}{2}X(X-1)$.

Trouvons $P_3 = aX^3 + bX^2 + cX$ tel que $u(P_3) = P_2$.

$$\begin{aligned} u(P_3) = P_2 &\Leftrightarrow a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) - aX^3 - bX^2 - cX = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X \\ &\Leftrightarrow \left(3a - \frac{1}{2}\right)X^2 + \left(3a + 2b - \frac{1}{2}\right)X + a + b + c = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{6} \text{ et } b = -\frac{1}{2} \text{ et } c = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

On prend $P_3 = \frac{1}{6}(X^3 - 3X^2 + 2X) = \frac{1}{6}X(X-1)(X-2)$.

Essayons, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $P_k = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X - i)$. Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$u(\mathrm{P}_{k+1}) = \frac{1}{(k+1)!}\prod_{i=0}^{k}(\mathrm{X}+1-i) - \frac{1}{(k+1)!}\prod_{i=0}^{k}(\mathrm{X}-i) = \frac{1}{(k+1)!}((\mathrm{X}+1)-(\mathrm{X}-k))\prod_{i=0}^{k-1}(\mathrm{X}-i)$$
$$= \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(\mathrm{X}-i) = \mathrm{P}_k.$$

Enfin, les P_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, constituent une famille de $n+1 = \dim \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ polynômes de degrés échelonnés de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ et donc la famille $(\mathrm{P}_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.

Dans cette base, la matrice de u a la forme désirée.

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *est isomorphe à* $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général $\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)^n$.

Correction :

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)^n &= \left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)^n \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)^n} \\ &= e^{-n\ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} \\ &= e^{-n\ln(2+\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n}))} \\ &= e^{-n[\ln 2+\ln(1+\frac{1}{4n}+o(\frac{1}{n}))]} \\ &= \frac{1}{2^n}e^{-\frac{1}{4}+o(1)} \\ &\sim \frac{1}{2^n\sqrt[4]{e}}\end{aligned}$$

Ou encore $0 \leqslant \left(\sqrt{n^2+n}-n\right)^n = \dfrac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

Donc la série (à termes positifs) converge.

Exercice 2 : La famille suivante de $\mathbb{R}^4$ est-elle libre ou liée ? Fournir des relations de dépendance linéaire quand des relations existent.

(e_1,e_2,e_3,e_4) où $e_1=(1,1,1,1)$, $e_2=(1,1,1,-1)$, $e_3=(1,1,-1,1)$ et $e_4=(1,-1,1,1)$.

Correction :

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&-1\\1&1&-1&1\\1&-1&1&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&-2\\0&0&-2&0\\0&-2&0&0\end{vmatrix} \quad (\text{pour } 2\leqslant i\leqslant 4,\ \mathrm{L}_i\leftarrow \mathrm{L}_i-\mathrm{L}_1)$$

$$= \begin{vmatrix}0&0&-2\\0&-2&0\\-2&0&0\end{vmatrix} = -8 \neq 0.$$

Donc la famille (e_1,e_2,e_3,e_4) est une famille libre (et donc une base de E).

Exercice 3 : Soient $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}$ des espaces de dimension finie. On considère $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$.

Montrer que

$$\operatorname{Im} f = \ker g \iff \begin{cases} g \circ f = 0 \\ \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = \dim \mathrm{F}. \end{cases}$$

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *Convergence des séries de Riemann.*

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Correction :

$$\begin{aligned}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}} = e^{n\ln\cos\frac{1}{\sqrt{n}}} - e^{-\frac{1}{2}} &= e^{n\ln\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} - e^{-\frac{1}{2}}\\ &= e^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} - e^{-\frac{1}{2}}\\ &= \left[e^{-\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right]e^{-\frac{1}{2}}\\ &= \left[-\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]e^{-\frac{1}{2}}\\ &\sim -\frac{1}{12n\sqrt{e}}\end{aligned}$$

Donc la série (à termes négatifs) diverge.

Exercice 2 : La famille suivante de $\mathbb{R}^4$ est-elle libre ou liée ? Fournir des relations de dépendance linéaire quand des relations existent.

(e_1, e_2, e_3, e_4) où $e_1 = (0,0,1,0)$, $e_2 = (0,0,0,1)$, $e_3 = (1,0,0,0)$ et $e_4 = (0,1,0,0)$.

Correction : Notons (u_1, u_2, u_3, u_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

La famille $(e_1, e_2, e_3, e_4) = (u_3, u_4, u_1, u_2)$ a même rang que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) c'est-à-dire 4. La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

La matrice de la famille (e_2, e_1, e_3, e_4) dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -2\\ 1 & 3 & 5 & 2\\ 1 & 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

Cette matrice a même rang que les matrices suivantes :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -3 & -3 & -3\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ ($e_5 = e_1 - 2e_2$, $e_6 = e_3 - 4e_2$ et $e_7 = e_4 - e_2$)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 10 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ ($e_8 = e_6 - e_5$ et $e_9 = e_7 - e_5$).

La matrice ci-dessus est de rang 2.

Exercice 3 : La famille suivante de $\mathbb{R}^4$ est-elle libre ou liée ? Fournir des relations de dépendance linéaire quand ces relations existent.

(e_1, e_2, e_3, e_4) où $e_1 = (2, -1, 3, 1)$, $e_2 = (1, 1, 1, 1)$, $e_3 = (4, 1, 5, 3)$ et $e_4 = (1, -2, 2, 0)$.

Correction : La matrice de la famille (e_2, e_1, e_3, e_4) dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Cette matrice a même rang que les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} (e_5 = e_1 - 2e_2,\ e_6 = e_3 - 4e_2 \text{ et } e_7 = e_4 - e_2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (e_8 = e_6 - e_5 \text{ et } e_9 = e_7 - e_5).$$

La matrice ci-dessus est de rang 2.

Il en est de même de la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) qui est en particulier liée. La nullité de la troisième colonne fournit $0 = e_8 = e_6 - e_5 = (e_3 - 4e_2) - (e_1 - 2e_2) = -e_1 - 2e_2 + e_3$ et donc $e_3 = e_1 + 2e_2$.

La nullité de la quatrième colonne fournit $0 = e_9 = e_7 - e_5 = (e_4 - e_2) - (e_1 - 2e_2) = e_4 + e_2 - e_1$ et donc $e_4 = e_1 - e_2$.

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *$\mathscr{F}$ est une base de E si, et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathscr{F}_{\mathrm{E}}}(\mathscr{F})$ est inversible.*

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Correction :

$$\begin{aligned} e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e-e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} &= e-e^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\ &= e-e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= e\left[1-e^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\right] \\ &= e\left[\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\ &\sim \frac{e}{2n} \end{aligned}$$

Donc la série (à termes positifs) diverge.

Exercice 2 : La famille suivante de $\mathbb{R}^4$ est-elle libre ou liée ? Fournir des relations de dépendance linéaire quand des relations existent.

(e_1, e_2, e_3, e_4) où $e_1 = (2, -1, 3, 1)$, $e_2 = (1, 1, 1, 1)$, $e_3 = (4, 1, 5, 3)$ et $e_4 = (1, -2, 2, 0)$.

Correction : La famille est de rang 2. Elle est en particulier liée.

La nullité de la troisième colonne fournit $0 = e_8 = e_6 - e_5 = (e_3 - 4e_2) - (e_1 - 2e_2) = -e_1 - 2e_2 + e_3$ et donc $e_3 = e_1 + 2e_2$.

La nullité de la quatrième colonne fournit $0 = e_9 = e_7 - e_5 = (e_4 - e_2) - (e_1 - 2e_2) = e_4 + e_2 - e_1$ et donc $e_4 = e_1 - e_2$.

Exercice 3 : Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.

1. On pose $\mathcal{B}' = (e_1 + 2e_2 + e_3, e_1 + 2e_2 + 2e_3, e_2 + 2e_3)$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E.

2. Soit ϕ l'endomorphisme de E tel que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 14 & -10 & 4 \\ 16 & -10 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer $\text{mat}_{\mathcal{B}'}(\phi)$.

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *Théorème de comparaison pour les séries positives.*

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$(1+2+\ldots+n)^{-\alpha}.$$

Correction : $(1+2+\ldots+n)^{-\alpha} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{-\alpha} \sim \frac{2^\alpha}{n^{2\alpha}}$.

La série (à termes positifs) converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

Exercice 2 : Déterminer $\ker f_i$ et $\operatorname{Im}(f)_i$.
En déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f_1(x,y) = (2x+y, x-y)$$

Exercice 3 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_3[X] \\ P & \longmapsto & \frac{1}{2}X^2P'' - XP' + P \end{array}$.

1. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$.
2. Montrer que $\mathbb{C}_3[X] = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$.
3. Quelle est la nature de f ?
4. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *Si* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *et* $x \in \mathrm{E}$, $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_\mathrm{F}}(f(x)) = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_\mathrm{E}, \mathscr{B}_\mathrm{F}}(f) \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_\mathrm{E}}(x)$.

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)}.$$

Correction : $\dfrac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)} \sim \dfrac{\frac{e^n}{2}}{\frac{e^{2n}}{2}} = e^{-n}$. Donc la série (à TP) converge.

Exercice 2 : Déterminer $\ker f_i$ et $\operatorname{Im}(f)_i$.
En déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

$$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f_2(x, y, z) = (2x + y + z, y - z, x + y)$$

Exercice 3 : Soient $b_1 = (1, 1, 2)$, $b_2 = (-2, -1, 3)$, et $b_3 = (0, -3, -1)$.
On note $\mathrm{F} = \operatorname{vect}(b_1, b_2)$ et $\mathrm{G} = \operatorname{vect}(b_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Que peut-on en déduire pour F et G ?
3. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Déterminer la matrice M de p dans la base $\mathcal{B}$
4. En déduire la matrice N de p dans la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$.

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *Comparaison série-intégrale.*

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 2 : Déterminer $\ker f_i$ et $\operatorname{Im}(f)_i$.
En déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

$$f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4,\ f_3(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y)$$

Exercice 3 : Soit E un espace de dimension finie. Montrer que la trace d'un projecteur est son rang.

Correction : Soit p un projecteur de E. Si $p = 0$, $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p) = 0$ et si $p = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$, $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p) = n$.

Dorénavant, p est un projecteur de rang $r \in [\![1\,;n-1]\!]$. On choisit une base de E $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p)$. Dans cette base, la matrice de p s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & & \\ & & & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où le nombre de 1 est $\dim(\mathrm{Im}(p)) = r$. Mais alors $\mathrm{Tr}(p) = r$.

En dimension finie, la trace d'un projecteur est son rang.

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *$\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est isomorphe à $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\frac{1}{n\ln n} \text{ pour } n \geqslant 2.$$

Exercice 2 : Déterminer $\ker f_i$ et $\mathrm{Im}\,(f)_i$.
En déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

$$f_4 : \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}^3,\ f_4(\mathrm{P}) = \big(\mathrm{P}(-1), \mathrm{P}(0), \mathrm{P}(1)\big)$$

Exercice 3 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y+z, x+y+z, x) \end{array}$.

1. Donner les images par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer des bases de $\ker f$ et $\mathrm{Im}\, f$.
3. Soit $u = (0,-1,1)$, $v = (1,0,-1)$ et $w = (2,3,1)$. Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$, et déterminer les formules analytiques de f dans cette base.

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *Convergence des séries de Riemann.*

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$$

Exercice 2 : On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ $f : (x, y) \mapsto (-13x + 6y, -9x + 8y)$.

1. Déterminer sa matrice dans la base canonique ;
2. Soient $u = (1, 3)$ et $v = (2, 1)$.

   Vérifier que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$, et déterminer $\text{mat}_{(u,v)}(f)$

Exercice 3 : Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.

1. On pose $\mathcal{B}' = (e_1 + 2e_2 + e_3, e_1 + 2e_2 + 2e_3, e_2 + 2e_3)$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E.
2. Soit ϕ l'endomorphisme de E tel que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 14 & -10 & 4 \\ 16 & -10 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer $\text{mat}_{\mathcal{B}'}(\phi)$.

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *$\mathscr{F}$ est une base de E si, et seulement si $\operatorname{mat}_{\mathscr{F}_E}(\mathscr{F})$ est inversible.*

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\frac{n!}{n^n}.$$

Correction : Posons $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e} < 1$$

Donc la série (à termes positifs) converge.

Exercice 2 : Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ diverge.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{a_n}{S_n}$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Correction : On a $u_n = \dfrac{S_n - S_{n-1}}{S_n} = 1 - \dfrac{S_{n-1}}{S_n}$.

D'une part $0 < a_n < S_n$ donc $u_n < 1$ et $1 - u_n > 0$.

D'autre part $\ln\left(\dfrac{S_{n-1}}{S_n}\right) = \ln(1-u_n)$, et en sommant, $\ln S_0 - \ln S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1-u_k)$.

Par hypothèse, on a $\lim S_n = +\infty$ donc $\lim \sum_{k=1}^{n} \ln(1-u_k) = -\infty$.

- Si $u_n \not\to 0$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $u_n \to 0$, $\ln(1-u_n) \sim u_n$, et la série diverge encore.

Exercice 3 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Déterminer une base de $\ker(f - \mathrm{I}d)$ et de $\ker(f - 2\mathrm{I}d)$.
2. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice Δ de f est diagonale.
3. Calculer Δ^n, puis A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *Théorème de comparaison pour les séries positives.*

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\frac{n^\alpha (\ln n)^n}{n!}.$$

Correction : Posons $u_n = \dfrac{n^\alpha (\ln n)^n}{n!}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^\alpha (\ln(n+1))^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^\alpha (\ln n)^n}{n!}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \frac{\ln(n+1)}{n+1}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \frac{\ln(n+1)}{n+1} e^{n\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)}$$

Or $e^{n\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)} = e^{n\ln\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)} = e^{n\ln(1+\frac{1}{n\ln n}+o(\frac{1}{n\ln n}))} = e^{\frac{1}{\ln n}+o(\frac{1}{\ln n})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Ainsi $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et la série (à termes positifs) converge.

Exercice 2 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}.$$

1. Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
2. En déduire l'existence d'un réel $k>0$ tel que :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} k\sqrt{n}\,\frac{n^n}{e^n}.$$

Exercice 3 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Y a-t-il une base dans laquelle la matrice de f est $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *Si* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *et* $x \in \mathrm{E}$, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_\mathrm{F}}(f(x)) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_\mathrm{E},\mathscr{B}_\mathrm{F}}(f)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_\mathrm{E}}(x)$.

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\frac{1}{\binom{5n}{2n}}.$$

Correction : Posons $u_n = \dfrac{1}{\binom{5n}{2n}} = \dfrac{(5n)!}{(2n)!(3n)!}$. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{(5n+5)!}{(2n+2)!(3n+3)!}}{\frac{(5n)!}{(2n)!(3n)!}} = \dfrac{(5n+5)(5n+4)(5n+3)(5n+2)(5n+1)}{(2n+2)(2n+1)(3n+3)(3n+2)(3n+1)}$

donc la série (à termes positifs) converge.

Exercice 2 : Déterminer la nature de la série de terme général $\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)^n$.

Correction :

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)^n &= \left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)^n \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)^n} \\
&= e^{-n\ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} \\
&= e^{-n\ln(2+\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n}))} \\
&= e^{-n[\ln 2+\ln(1+\frac{1}{4n}+o(\frac{1}{n}))]} \\
&= \frac{1}{2^n}e^{-\frac{1}{4}+o(1)} \\
&\sim \frac{1}{2^n\sqrt[4]{e}}
\end{aligned}$$

Ou encore $0 \leqslant \left(\sqrt{n^2+n}-n\right)^n = \dfrac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$

Donc la série (à termes positifs) converge.

Exercice 3 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ de matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_2, e_1, e_3)$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *Comparaison série-intégrale.*

Exercice 1 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x-y) \end{array}$

Déterminer une base du noyau et de l'image de f et en déduire si f est injective, surjective, bijective.

Correction :

1. Calculons le noyau :

$$\begin{aligned} (x,y) \in \ker(f) &\iff f(x,y) = (0,0) \iff (2x+y, x-y) = (0,0) \\ &\iff \begin{cases} 2x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0) \end{aligned}$$

Ainsi $\ker(f) = \{(0,0)\}$ et donc f est injective. On sait déjà qu'elle est bijective d'après le théorème du rang.

2. Calculons l'image. Quels éléments (X, Y) peuvent s'écrire $f(x,y)$?

$$\begin{aligned} f(x,y) = (\mathrm{X},\mathrm{Y}) &\iff (2x+y, x-y) = (\mathrm{X},\mathrm{Y}) \\ &\iff \begin{cases} 2x+y=\mathrm{X} \\ x-y=\mathrm{Y} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}{3} \\ y = \dfrac{\mathrm{X}-2\mathrm{Y}}{3} \end{cases} \\ &\iff (x,y) = \left(\frac{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}{3}, \frac{\mathrm{X}-2\mathrm{Y}}{3}\right) \end{aligned}$$

Donc pour n'importe quel $(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in \mathbb{R}^2$ on trouve un antécédent $(x,y) = \left(\dfrac{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}{3}, \dfrac{\mathrm{X}-2\mathrm{Y}}{3}\right)$ qui vérifie donc $f(x,y) = (\mathrm{X},\mathrm{Y})$.

Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$. Ainsi f est surjective.

Remarque : Une autre méthode est d'extraire une base de l'image d'une base (la base canonique, par exemple) par f.

3. Conclusion : f est injective et surjective donc bijective.

Exercice 2 : Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ diverge.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{a_n}{S_n}$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Correction : On a $u_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n} = 1 - \frac{S_{n-1}}{S_n}$.

D'une part $0 < a_n < S_n$ donc $u_n < 1$ et $1 - u_n > 0$.

D'autre part $\ln \frac{S_{n-1}}{S_n} = \ln(1-u_n)$, et en sommant, $\ln S_0 - \ln S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1-u_k)$.

Par hypothèse, on a $\lim S_n = +\infty$ donc $\lim \sum_{k=1}^{n} \ln(1-u_k) = -\infty$.

- Si $u_n \nrightarrow 0$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $u_n \to 0$, $\ln(1-u_n) \sim u_n$, et la série diverge encore.

Exercice 3 : Soit $E = \mathbb{R}^n$ de base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$.

On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & & (\beta) \\ & \ddots & \\ (\beta) & & \alpha \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

1. Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ où $e'_i = \sum_{k=1}^{i} e_k$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Séries et Matrices d'applications linéaires

Question de cours : *$\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est isomorphe à $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*

Exercice 1 : Soit E un espace vectoriel et soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E, on définit l'application $f\colon \mathrm{E}_1\times\mathrm{E}_2\to\mathrm{E}$ par $f(x_1,x_2)=x_1+x_2$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Que donne le théorème du rang ?

Correction :

1. Aucun problème...
2. Par définition de f et de ce qu'est la somme de deux sous-espaces vectoriels, l'image est
$$\mathrm{Im}\,(f)=\{f(x_1,x_2)\mid x_1\in\mathrm{E}_1,x_2\in\mathrm{E}_2\}=\{x_1+x_2\mid x_1\in\mathrm{E}_1,x_2\in\mathrm{E}_2\}=\mathrm{E}_1+\mathrm{E}_2.$$
Pour le noyau :
$$\ker f=\{(x_1,x_2)\mid f(x_1,x_2)=0\}=\{(x_1,x_2)\mid x_1+x_2=0\}$$
Mais on peut aller un peu plus loin. En effet un élément $(x_1,x_2)\in\ker f$, vérifie $x_1\in\mathrm{E}_1$, $x_2\in\mathrm{E}_2$ et $x_1=-x_2$. Donc $x_1\in\mathrm{E}_2$. Donc $x_1\in\mathrm{E}_1\cap\mathrm{E}_2$. Réciproquement si $x\in\mathrm{E}_1\cap\mathrm{E}_2$, alors $(x,-x)\in\ker f$. Donc
$$\ker f=\{(x,-x)\mid x\in\mathrm{E}_1\cap\mathrm{E}_2\}.$$
De plus l'application $x\mapsto(x,-x)$ montre que $\ker f$ est isomorphe à $\mathrm{E}_1\cap\mathrm{E}_2$.
3. Le théorème du rang s'écrit :
$$\dim\ker f+\dim\mathrm{Im}\,(f)=\dim(\mathrm{E}_1\times\mathrm{E}_2).$$
Compte tenu de l'isomorphisme entre $\ker f$ et $\mathrm{E}_1\cap\mathrm{E}_2$ on obtient :
$$\dim(\mathrm{E}_1\cap\mathrm{E}_2)+\dim(\mathrm{E}_1+\mathrm{E}_2)=\dim(\mathrm{E}_1\times\mathrm{E}_2).$$
Mais $\dim(\mathrm{E}_1\times\mathrm{E}_2)=\dim\mathrm{E}_1+\dim\mathrm{E}_2$, donc on retrouve ce que l'on appelle le théorème des quatre dimensions :
$$\dim(\mathrm{E}_1+\mathrm{E}_2)=\dim\mathrm{E}_1+\dim\mathrm{E}_2-\dim(\mathrm{E}_1\cap\mathrm{E}_2).$$

Exercice 2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite strictement positive. On pose $v_n = \dfrac{u_n}{\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)}$.

1. Déterminer la somme $T_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$, en fonction de $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)$.
2. Montrer que la série $\sum v_n$ converge.
3. Montrer que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = 1 \iff \sum u_n$ diverge.

Correction :

1. Par récurrence, $T_n = 1 - \dfrac{1}{P_n}$
2. La suite des sommes partielles est majorée par 1, donc la série à TP converge.
3.
   - Supposons que la série $\sum u_n$ converge.

     On a $\ln P_n = \sum \ln(1+u_n)$. Mais $u_n \to 0$ donc $\ln(1+u_n) \sim u_n$ et donc $\ln P_n \to \ell$ et $P_n \to e^{\ell}$.

     Ainsi, $T_n \to 1 - e^{-\ell} < 1$.
   - Supposons que la série $\sum u_n$ diverge.

     Alors $\sum \ln(1+u_n)$ ne peut converger. Sinon, on aurait $\ln(1+u_n) \to 0$, $u_n \to 0$ et donc $\ln(1+u_n) \sim u_n$ et $\sum u_n$ convergerait.

     Par conséquent, $\sum \ln(1+u_n)$ étant à TP, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+u_n) = +\infty$. Donc $P_n \to +\infty$ et $T_n \to 1$.

Exercice 3 : Soient $b_1 = (1,1,2)$, $b_2 = (-2,-1,3)$, et $b_3 = (0,-3,-1)$.
On note $F = \text{vect}(b_1, b_2)$ et $G = \text{vect}(b_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Que peut-on en déduire pour F et G ?
3. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Déterminer la matrice M de p dans la base $\mathcal{B}$
4. En déduire la matrice N de p dans la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$.