Fichiers Applications-Lineaires-Matrices a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y+z, x+y+z, x) \end{array}$.

1. Donner les images par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer des bases de $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.
3. Soit $u = (0,-1,1)$, $v = (1,0,-1)$ et $w = (2,3,1)$. Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$, et déterminer les formules analytiques de f dans cette base.

Exercice 2 : On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ $f : (x,y) \mapsto (-13x+6y, -9x+8y)$.

1. Déterminer sa matrice dans la base canonique ;
2. Soient $u = (1,3)$ et $v = (2,1)$.

   Vérifier que (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$, et déterminer $\operatorname{mat}_{(u,v)}(f)$

Exercice 3 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P - P' \end{array}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. f est-il un isomorphisme ?

Exercice 4 : Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Y a-t-il une base dans laquelle la matrice de f est $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

Exercice 5 : La famille suivante de $\mathbb{R}^4$ est-elle libre ou liée ? Fournir des relations de dépendance linéaire quand des relations existent.

(e_1, e_2, e_3) où $e_1 = (3,0,1,-2)$, $e_2 = (1,5,0,-1)$ et $e_3 = (7,5,2,1)$.

Correction : *La matrice de la famille (e_1,e_2,e_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est* $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Les trois dernières équations du système $\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0$ d'inconnues λ, μ et ν forment un sous-système de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

En développant le déterminant de cette matrice suivant sa première colonne, on obtient

$$\det(A) = -10 - 2 \times 10 = -30 \neq 0.$$

Ce sous-système est de Cramer et admet donc l'unique solution $(\lambda,\mu,\nu) = (0,0,0)$. Par suite, la famille (e_1,e_2,e_3) est libre.

Exercice 6 : La famille suivante de $\mathbb{R}^4$ est-elle libre ou liée ? Fournir des relations de dépendance linéaire quand des relations existent.

(e_1, e_2, e_3, e_4) où $e_1 = (1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 1, -1)$, $e_3 = (1, 1, -1, 1)$ et $e_4 = (1, -1, 1, 1)$.

Correction :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{(pour } 2 \leqslant i \leqslant 4,\ \mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i - \mathrm{L}_1\text{)}$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0.$$

Donc la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est une famille libre (et donc une base de E).

Exercice 7 : La famille suivante de $\mathbb{R}^4$ est-elle libre ou liée ? Fournir des relations de dépendance linéaire quand des relations existent.

(e_1, e_2, e_3, e_4) où $e_1 = (0, 0, 1, 0)$, $e_2 = (0, 0, 0, 1)$, $e_3 = (1, 0, 0, 0)$ et $e_4 = (0, 1, 0, 0)$.

Correction : Notons (u_1, u_2, u_3, u_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

La famille $(e_1, e_2, e_3, e_4) = (u_3, u_4, u_1, u_2)$ a même rang que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) c'est-à-dire 4. La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

La matrice de la famille (e_2, e_1, e_3, e_4) dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Cette matrice a même rang que les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{(}e_5 = e_1 - 2e_2,\ e_6 = e_3 - 4e_2 \text{ et } e_7 = e_4 - e_2\text{)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{(}e_8 = e_6 - e_5 \text{ et } e_9 = e_7 - e_5\text{)}.$$

La matrice ci-dessus est de rang 2.

Exercice 8 : La famille suivante de $\mathbb{R}^4$ est-elle libre ou liée ? Fournir des relations de dépendance linéaire quand des relations existent.

(e_1, e_2, e_3, e_4) où $e_1 = (2, -1, 3, 1)$, $e_2 = (1, 1, 1, 1)$, $e_3 = (4, 1, 5, 3)$ et $e_4 = (1, -2, 2, 0)$.

Correction : La famille est de rang 2. Elle est en particulier liée.

La nullité de la troisième colonne fournit $0 = e_8 = e_6 - e_5 = (e_3 - 4e_2) - (e_1 - 2e_2) = -e_1 - 2e_2 + e_3$ et donc $e_3 = e_1 + 2e_2$.

La nullité de la quatrième colonne fournit $0 = e_9 = e_7 - e_5 = (e_4 - e_2) - (e_1 - 2e_2) = e_4 + e_2 - e_1$ et donc $e_4 = e_1 - e_2$.

Exercice 9 : Déterminer $\ker f_i$ et $\mathrm{Im}\,(f)_i$.
En déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f_1(x,y) = (2x+y, x-y)$$

Exercice 10 : Déterminer $\ker f_i$ et $\mathrm{Im}\,(f)_i$.
En déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

$$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f_2(x,y,z) = (2x+y+z, y-z, x+y)$$

Exercice 11 : Déterminer $\ker f_i$ et $\mathrm{Im}\,(f)_i$.
En déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

$$f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4,\ f_3(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y)$$

Exercice 12 : Déterminer $\ker f_i$ et $\mathrm{Im}\,(f)_i$.
En déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

$$f_4 : \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}^3,\ f_4(\mathrm{P}) = (\mathrm{P}(-1), \mathrm{P}(0), \mathrm{P}(1))$$

Exercice 13 : On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ $f : (x,y) \mapsto (-13x+6y, -9x+8y)$.

1. Déterminer sa matrice dans la base canonique ;
2. Soient $u = (1,3)$ et $v = (2,1)$.

   Vérifier que (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$, et déterminer $\mathrm{mat}_{(u,v)}(f)$

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : La famille suivante de $\mathbb{R}^4$ est-elle libre ou liée ? Fournir des relations de dépendance linéaire quand ces relations existent.

(e_1, e_2, e_3, e_4) où $e_1 = (2,-1,3,1)$, $e_2 = (1,1,1,1)$, $e_3 = (4,1,5,3)$ et $e_4 = (1,-2,2,0)$.

Correction : La matrice de la famille (e_2, e_1, e_3, e_4) dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Cette matrice a même rang que les matrices suivantes :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $(e_5 = e_1 - 2e_2,\ e_6 = e_3 - 4e_2$ et $e_7 = e_4 - e_2)$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(e_8 = e_6 - e_5$ et $e_9 = e_7 - e_5)$.

La matrice ci-dessus est de rang 2.

Il en est de même de la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) qui est en particulier liée. La nullité de la troisième colonne fournit $0 = e_8 = e_6 - e_5 = (e_3 - 4e_2) - (e_1 - 2e_2) = -e_1 - 2e_2 + e_3$ et donc $e_3 = e_1 + 2e_2$.

La nullité de la quatrième colonne fournit $0 = e_9 = e_7 - e_5 = (e_4 - e_2) - (e_1 - 2e_2) = e_4 + e_2 - e_1$ et donc $e_4 = e_1 - e_2$.

Exercice 2 : Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.

1. On pose $\mathcal{B}' = (e_1 + 2e_2 + e_3, e_1 + 2e_2 + 2e_3, e_2 + 2e_3)$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E.
2. Soit ϕ l'endomorphisme de E tel que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 14 & -10 & 4 \\ 16 & -10 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(\phi)$.

Exercice 3 : Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}_3[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{C}_3[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \frac{1}{2}\mathrm{X}^2\mathrm{P}'' - \mathrm{X}\mathrm{P}' + \mathrm{P} \end{array}$.

1. Déterminer $\mathrm{Im}\, f$ et $\ker f$.
2. Montrer que $\mathbb{C}_3[\mathrm{X}] = \mathrm{Im}\, f \oplus \ker f$.
3. Quelle est la nature de f ?
4. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.

Exercice 4 : Soient $b_1 = (1, 1, 2)$, $b_2 = (-2, -1, 3)$, et $b_3 = (0, -3, -1)$.
On note $\mathrm{F} = \mathrm{vect}\,(b_1, b_2)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{vect}\,(b_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Que peut-on en déduire pour F et G ?
3. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Déterminer la matrice M de p dans la base $\mathcal{B}$
4. En déduire la matrice N de p dans la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5 : Soit E un espace de dimension finie. Montrer que la trace d'un projecteur est son rang.

Correction : *Soit p un projecteur de E. Si $p = 0$, $\mathcal{T}r(p) = rg(p) = 0$ et si $p = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$, $\mathcal{T}r(p) = rg(p) = n$. Dorénavant, p est un projecteur de rang $r \in [\![1\,;n-1]\!]$. On choisit une base de E $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $\mathrm{E} = \mathcal{I}m(p) \oplus \ker(p)$. Dans cette base, la matrice de p s'écrit* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & & \\ & & & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *où le nombre de 1 est $\dim(\mathcal{I}m(p)) = r$. Mais alors $\mathcal{T}r(p) = r$.*

En dimension finie, la trace d'un projecteur est son rang.

Exercice 6 : Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (y + z, x + y + z, x) \end{array}$.

1. Donner les images par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer des bases de $\ker f$ et $\mathrm{Im}\, f$.
3. Soit $u = (0, -1, 1)$, $v = (1, 0, -1)$ et $w = (2, 3, 1)$. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$, et déterminer les formules analytiques de f dans cette base.

Exercice 7 : On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ $f : (x, y) \mapsto (-13x + 6y, -9x + 8y)$.

1. Déterminer sa matrice dans la base canonique ;
2. Soient $u = (1, 3)$ et $v = (2, 1)$.

   Vérifier que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$, et déterminer $\mathrm{mat}_{(u,v)}(f)$

Exercice 8 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_3[X] \\ P & \longmapsto & \frac{1}{2}X^2P'' - XP' + P \end{array}$.

1. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$.
2. Montrer que $\mathbb{C}_3[X] = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$.
3. Quelle est la nature de f ?
4. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.

Exercice 9 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P - P' \end{array}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. f est-il un isomorphisme ?

Exercice 10 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_3[X] \\ P & \longmapsto & \frac{1}{2}X^2P'' - XP' + P \end{array}$.

1. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$.
2. Montrer que $\mathbb{C}_3[X] = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$.
3. Quelle est la nature de f ?
4. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.

Exercice 11 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P - P' \end{array}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. f est-il un isomorphisme ?

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Déterminer une base de $\ker(f - \mathrm{I}d)$ et de $\ker(f - 2\mathrm{I}d)$.
2. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice Δ de f est diagonale.
3. Calculer Δ^n, puis A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_2, e_1, e_3)$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 3 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ de base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$.

On considère $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ de matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \alpha & & (\beta) \\ & \ddots & \\ (\beta) & & \alpha \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

1. Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ où $e'_i = \sum_{k=1}^{i} e_k$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 4 : Soit E un espace de dimension finie. Montrer que la trace d'un projecteur est son rang.

Correction : Soit p un projecteur de E. Si $p = 0$, $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p) = 0$ et si $p = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$, $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p) = n$.
Dorénavant, p est un projecteur de rang $r \in [\![1, n-1]\!]$. On choisit une base de E $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p)$. Dans cette base, la matrice de p s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & & \\ & & & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où le nombre de 1 est $\dim(\mathrm{Im}(p)) = r$. Mais alors $\mathrm{Tr}(p) = r$.
En dimension finie, la trace d'un projecteur est son rang.

Exercice 5 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. u est l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E},\ u(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}.$$

1. Déterminer $\ker u$ et $\mathrm{Im} u$.
2. Déterminer explicitement une base dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Correction :

1. u est dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ car u est linéaire et si P est un polynôme de degré au plus n alors $u(\mathrm{P})$ est un polynôme de degré au plus n.
   - Les polynômes constants sont dans $\ker u$. Réciproquement, soit P un élément de $\ker u$ puis $\mathrm{Q} = \mathrm{P} - \mathrm{P}(0)$. Par hypothèse, $\mathrm{P}(0) = \mathrm{P}(1) = \mathrm{P}(2) = \dots$ et donc 0, 1, 2, ... sont des racines de Q. Puisque le polynôme Q admet une infinité de racines, Q est nul et donc $\mathrm{P} = \mathrm{P}(0)$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}_0[\mathrm{X}]$. Ainsi, $\ker u = \mathbb{K}_0[\mathrm{X}]$.
   - Mais alors, d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg} u = (n+1) - 1 = n$. D'autre part, si P est dans $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}$ est dans $\mathbb{K}_{n-1}[\mathrm{X}]$ (si on pose $\mathrm{P} = a_n \mathrm{X}^n + \dots$, le coefficient de X^n dans $u(\mathrm{P})$ est $a_n - a_n = 0$).
   En résumé, $\mathrm{Im} u \subset \mathbb{K}_{n-1}[\mathrm{X}]$ et $\dim \mathrm{Im} u = \dim \mathbb{K}_{n-1}[\mathrm{X}] < +\infty$ et donc $\mathrm{Im} u = \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$.

$$\ker u = \mathbb{K}_0[\mathrm{X}] \text{ et } \mathrm{Im} u = \mathbb{K}_{n-1}[\mathrm{X}].$$

2. On part de $P_0 = 1$ et aussi de $P_1 = X$ qui vérifient bien $u(P_0) = 0$ et $u(P_1) = P_0$.
Trouvons $P_2 = aX^2 + bX$ tel que $u(P_2) = P_1$ (il est clair que si $\deg(P) \geqslant 1$, $\deg(u(P)) = \deg(P) - 1$ et d'autre part, les constantes sont inutiles car $\ker u = \mathbb{K}_0[X]$).

$$u(P_2) = P_1 \Leftrightarrow a(X+1)^2 + b(X+1) - aX^2 - bX = X \Leftrightarrow (2a-1)X + a + b = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -a.$$

On prend $P_2 = \frac{1}{2}(X^2 - X) = \frac{1}{2}X(X-1)$.
Trouvons $P_3 = aX^3 + bX^2 + cX$ tel que $u(P_3) = P_2$.

$$\begin{aligned} u(P_3) = P_2 &\Leftrightarrow a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) - aX^3 - bX^2 - cX = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X \\ &\Leftrightarrow \left(3a - \frac{1}{2}\right)X^2 + \left(3a + 2b - \frac{1}{2}\right)X + a + b + c = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{6} \text{ et } b = -\frac{1}{2} \text{ et } c = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

On prend $P_3 = \frac{1}{6}(X^3 - 3X^2 + 2X) = \frac{1}{6}X(X-1)(X-2)$.
Essayons, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $P_k = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X-i)$. Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$\begin{aligned} u(P_{k+1}) &= \frac{1}{(k+1)!}\prod_{i=0}^{k}(X+1-i) - \frac{1}{(k+1)!}\prod_{i=0}^{k}(X-i) = \frac{1}{(k+1)!}((X+1)-(X-k))\prod_{i=0}^{k-1}(X-i) \\ &= \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X-i) = P_k. \end{aligned}$$

Enfin, les P_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, constituent une famille de $n+1 = \dim \mathbb{K}_n[X]$ polynômes de degrés échelonnés de $\mathbb{K}_n[X]$ et donc la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
Dans cette base, la matrice de u a la forme désirée.

Exercice 6 : Soient E, F, G des espaces de dimension finie. On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
Montrer que

$$\operatorname{Im} f = \ker g \iff \begin{cases} g \circ f = 0 \\ \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = \dim F. \end{cases}$$

Exercice 7 : Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.

1. On pose $\mathcal{B}' = (e_1 + 2e_2 + e_3, e_1 + 2e_2 + 2e_3, e_2 + 2e_3)$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E.
2. Soit ϕ l'endomorphisme de E tel que $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 14 & -10 & 4 \\ 16 & -10 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}'}(\phi)$.

Exercice 8 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Déterminer une base de $\ker(f - \mathrm{Id})$ et de $\ker(f - 2\mathrm{Id})$.

2. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice Δ de f est diagonale.
3. Calculer Δ^n, puis A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Y a-t-il une base dans laquelle la matrice de f est $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

Exercice 10 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_2, e_1, e_3)$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 11 : Soit $E = \mathbb{R}^n$ de base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$.

On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & & (\beta) \\ & \ddots & \\ (\beta) & & \alpha \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

1. Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ où $e'_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} e_k$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 12 : Soient $b_1 = (1, 1, 2)$, $b_2 = (-2, -1, 3)$, et $b_3 = (0, -3, -1)$.
On note $F = \text{vect}(b_1, b_2)$ et $G = \text{vect}(b_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Que peut-on en déduire pour F et G ?
3. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Déterminer la matrice M de p dans la base $\mathcal{B}$
4. En déduire la matrice N de p dans la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$.