

Fichiers Series-SATP a, B et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général $\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$.

$$\begin{aligned} \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}} &= e^{n \ln \cos \frac{1}{\sqrt{n}}} - e^{-\frac{1}{2}} = e^{n \ln \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} - e^{-\frac{1}{2}} \\ &= e^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} - e^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left[e^{-\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} - 1\right] e^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left[-\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] e^{-\frac{1}{2}} \\ &\sim -\frac{1}{12n\sqrt{e}} \end{aligned}$$

Correction :

Donc la série (à termes négatifs) diverge.

Exercice 2 : Déterminer la nature de la série de terme général $(1 + 2 + \dots + n)^{-\alpha}$.

Correction : $(1 + 2 + \dots + n)^{-\alpha} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{-\alpha} \sim \frac{2^\alpha}{n^{2\alpha}}.$

La série (à termes positifs) converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

Exercice 3 : Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{\text{ch } n}{\text{ch}(2n)}$.

Correction : $\frac{\text{ch } n}{\text{ch}(2n)} \sim \frac{\frac{e^n}{2}}{\frac{e^{2n}}{2}} = e^{-n}$. Donc la série (à $\mathbb{CP}$) converge.

Exercice 4 : Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{\binom{5n}{2n}}$.

Correction : Posons $u_n = \frac{1}{\binom{5n}{2n}} = \frac{(5n)!}{(2n)!(3n)!}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(5n+5)!}{(2n+2)!(3n+3)!}}{\frac{(5n)!}{(2n)!(3n)!}} = \frac{(5n+5)(5n+4)(5n+3)(5n+2)(5n+1)}{(2n+2)(2n+1)(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \sim \frac{5^5}{2^2 3^3} < 1.$$

Donc la série (à termes positifs) converge.

Exercice 5 : Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}}$.

$$\begin{aligned} u_n &= n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}} \\ &= e^{\frac{\ln n}{n}} - e^{\frac{\ln n}{n+1}} \\ &= e^{\frac{\ln n}{n}} - e^{\frac{\ln n}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\ &= e^{\frac{\ln n}{n}} - e^{\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)} \\ &= e^{\frac{\ln n}{n}} \left[1 - e^{-\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)}\right] \end{aligned}$$

Donc $u_n \sim e^{\frac{\ln n}{n}} \frac{\ln n}{n^2} \sim \frac{\ln n}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$

Ainsi, la série à de $\mathbb{CG}$ positif u_n converge. Donc $\sum u_n$ converge.

Exercice 6 : Déterminer la nature de la série de terme général $\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)^n$.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)^n &= \left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)^n \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)^n} \\ &= e^{-n \ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} \\ &= e^{-n \ln\left(2+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\ &= e^{-n\left[\ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{4n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]} \\ &= \frac{1}{2^n} e^{-\frac{1}{4}+o(1)} \\ &\sim \frac{1}{2^n \sqrt[4]{e}}\end{aligned}$$

Correction :

Où encore $0 \leq \left(\sqrt{n^2+n}-n\right)^n = \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)^n} \leq \frac{1}{2^n}$.

Donc la série (à termes positifs) converge.

Exercice 7 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Correction :

$$\begin{aligned}\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}} &= e^{n \ln \cos \frac{1}{\sqrt{n}}} - e^{-\frac{1}{2}} = e^{n \ln\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} - e^{-\frac{1}{2}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} - e^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left[e^{-\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} - 1\right] e^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left[-\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] e^{-\frac{1}{2}} \\ &\sim -\frac{1}{12n\sqrt{e}}\end{aligned}$$

Donc la série (à termes négatifs) diverge.

Exercice 8 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Correction :

$$\begin{aligned}e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= e - e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e - e^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\ &= e - e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= e \left[1 - e^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\right] \\ &= e \left[\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\ &\sim \frac{e}{2n}\end{aligned}$$

Donc la série (à termes positifs) diverge.

Exercice 9 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$(1 + 2 + \dots + n)^{-\alpha}.$$

Correction : $(1 + 2 + \dots + n)^{-\alpha} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{-\alpha} \sim \frac{2^\alpha}{n^{2\alpha}}.$

La série (à termes positifs) converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

Exercice 10 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)}.$$

Correction : $\frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)} \sim \frac{\frac{e^n}{2}}{\frac{e^{2n}}{2}} = e^{-n}$. Donc la série (à $\mathbb{C}$) converge.

Exercice 11 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 12 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\frac{1}{n \ln n} \text{ pour } n \geq 2.$$

Exercice 13 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$$

Exercice 14 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\frac{n!}{n^n}.$$

Correction : Posons $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} < 1$$

Donc la série (à termes positifs) converge.

Exercice 15 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\frac{n^\alpha (\ln n)^n}{n!}.$$

Correction : Posons $u_n = \frac{n^\alpha (\ln n)^n}{n!}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^\alpha (\ln(n+1))^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^\alpha (\ln n)^n}{n!}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \frac{\ln(n+1)}{n+1} \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \frac{\ln(n+1)}{n+1} e^{n \ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)}$$

$$\sim e^{n \ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)} = e^{n \ln\left(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)} = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)\right)} = e^{\frac{1}{\ln n} + o\left(\frac{1}{\ln n}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Ainsi $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et la série (à termes positifs) converge.

Exercice 16 : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\frac{1}{\binom{5n}{2n}}.$$

Correction : Posons $u_n = \frac{1}{\binom{5n}{2n}} = \frac{(5n)!}{(2n)!(3n)!} \cdot \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(5n+5)!}{(2n+2)!(3n+3)!}}{\frac{(5n)!}{(2n)!(3n)!}} = \frac{(5n+5)(5n+4)(5n+3)(5n+2)(5n+1)}{(2n+2)(2n+1)(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \sim \frac{5}{2}$
donc la série (à termes positifs) converge.

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Soit $a > 0$. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} a^n$.

Correction : $u_n = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n a^n \sim \frac{1}{n} e a^n$.

La série $\sum u_n$ est à termes positifs. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n} a \sim a$.

- Si $a < 1$, la série $\sum u_n$ converge.
- Si $a > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.
- Si $a = 1$, $u_n \sim \frac{e}{n}$, donc la série diverge.

Exercice 2 : Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ diverge.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{a_n}{S_n}$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Correction : On a $u_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n} = 1 - \frac{S_{n-1}}{S_n}$.

D'une part $0 < a_n < S_n$ donc $u_n < 1$ et $1 - u_n > 0$.

D'autre part $\ln \left(\frac{S_{n-1}}{S_n} \right) = \ln(1 - u_n)$, et en sommant, $\ln S_0 - \ln S_n = \sum_{k=1}^n \ln(1 - u_k)$.

Par hypothèse, on a $\lim S_n = +\infty$ donc $\lim \sum_{k=1}^n \ln(1 - u_k) = -\infty$.

- Si $u_n \not\rightarrow 0$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $u_n \rightarrow 0$, $\ln(1 - u_n) \sim -u_n$ et la série diverge encore.

Exercice 3 : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs.

Montrer que si, à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ alors $\sum v_n$ diverge si $\sum u_n$ diverge.

Exercice 4 :

[1] Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^n \ln^2 k$.

[2] La série de terme général $\frac{1}{u_n}$ est-elle convergente ?

Exercice 5 : Nature de la série $\sum \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$.

Correction : $\alpha \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}} \geq \frac{1}{n}$ donc la série diverge.

Exercice 6 : CNS portant sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour que $\frac{a}{\sqrt{1}} + \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{c}{\sqrt{3}} + \frac{a}{\sqrt{4}} + \frac{b}{\sqrt{5}} + \frac{c}{\sqrt{6}} + \dots$ converge.

Correction : Soit u_n le terme général de cette suite.

$$u_{3n+3} = \sum_{k=0}^n \frac{a}{\sqrt{3k+1}} + \frac{b}{\sqrt{3k+2}} + \frac{c}{\sqrt{3k+3}}.$$

Or $\frac{a}{\sqrt{3k+1}} + \frac{b}{\sqrt{3k+2}} + \frac{c}{\sqrt{3k+3}} \sim \frac{a+b+c}{\sqrt{3k}}$ donc une condition nécessaire pour la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est celle de (u_{3n}) , et donc $a+b+c=0$.

Inversement, si cette condition est remplie, on a $\frac{a}{\sqrt{3k+1}} + \frac{b}{\sqrt{3k+2}} + \frac{c}{\sqrt{3k+3}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k\sqrt{k}}\right)$ donc (u_{3n}) converge.

Et comme $u_{3n+1} = u_{3n} + o(1)$ et $u_{3n+2} = u_{3n} + o(1)$, on conclut à la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 7 : Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}}$.

Correction :

$$\begin{aligned} u_n &= n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}} \\ &= e^{\frac{\ln n}{n}} - e^{\frac{\ln n}{n+1}} \\ &= e^{\frac{\ln n}{n}} - e^{\frac{\ln n}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\ &= e^{\frac{\ln n}{n}} - e^{\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)} \\ &= e^{\frac{\ln n}{n}} \left[1 - e^{-\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)}\right] \end{aligned}$$

$$\text{Donc } u_n \sim e^{\frac{\ln n}{n}} \frac{\ln n}{n^2} \sim \frac{\ln n}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Ainsi, la série à de $\mathbb{C}\mathbb{C}$ positif u_n converge. Donc $\sum u_n$ converge.

Exercice 8 : Soit $a > 0$. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} a^n$.

$$\text{Correction : } u_n = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n a^n \sim \frac{1}{n} e a^n.$$

La série $\sum u_n$ est à termes positifs. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n} a \sim a$.

- Si $a < 1$, la série $\sum u_n$ converge.
- Si $a > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.
- Si $a = 1$, $u_n \sim \frac{e}{n}$, donc la série diverge.

Exercice 9 : Nature puis somme de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Correction : $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^3}$ donc la série converge.

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1/2}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}. \text{ D'où } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}.$$

Exercice 10 : Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ après en avoir justifié l'existence.

Correction : $\frac{1}{n^2(n+1)^2} \sim \frac{1}{n^4}$ donc la série converge.

$$\frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n}.$$

$$\text{D'où } \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} + \left(\sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n^2} - 1 \right) + 2 \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} - 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \rightarrow \frac{\pi^2}{3} - 3.$$

Exercice 11 : Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ après en avoir justifié l'existence.

Correction : $\frac{1}{(2n+1)^2} \sim \frac{1}{4n^2}$ donc la série converge.

On sépare les termes d'indices pair et impair :

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} \\ \zeta(2) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4}\zeta(2) \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} &= \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

Exercice 12 : Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ converge, et calculer sa somme.

Exercice 13 : Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{3^n}$ converge, et calculer sa somme.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ diverge.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{a_n}{S_n}$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Correction : On a $u_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n} = 1 - \frac{S_{n-1}}{S_n}$.

D'une part $0 < a_n < S_n$ donc $u_n < 1$ et $1 - u_n > 0$.

D'autre part $\ln \left(\frac{S_{n-1}}{S_n} \right) = \ln(1 - u_n)$, et en sommant, $\ln S_0 - \ln S_n = \sum_{k=1}^n \ln(1 - u_k)$.

Par hypothèse, on a $\lim S_n = +\infty$ donc $\lim \sum_{k=1}^n \ln(1 - u_k) = -\infty$.

- $\mathcal{L} u_n \nrightarrow 0$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- $\mathcal{L} u_n \rightarrow 0$, $\ln(1 - u_n) \sim u_n$ et la série diverge encore.

Exercice 2 : On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}.$$

- 1 Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$.
- 2 En déduire l'existence d'un réel $k > 0$ tel que :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} k \sqrt{n} \frac{n^n}{e^n}.$$

Exercice 3 : Déterminer la nature de la série de terme général $\left(\sqrt{n^2 + n} - n \right)^n$.

Correction :

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{n^2 + n} - n \right)^n &= \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \right)^n \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)^n} \\ &= e^{-n \ln \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)} \\ &= e^{-n \ln \left(2 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)} \\ &= e^{-n \left[\ln 2 + \ln \left(1 + \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right]} \\ &= \frac{1}{2^n} e^{-\frac{1}{4} + o(1)} \\ &\sim \frac{1}{2^n \sqrt[4]{e}} \end{aligned}$$

$$\text{Ou encore } 0 \leq \left(\sqrt{n^2 + n} - n \right)^n = \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

Donc la série (à termes positifs) converge.

Exercice 4 : Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ diverge.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{a_n}{S_n}$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

$$\text{Correction : } \mathcal{O}_n a u_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n} = 1 - \frac{S_{n-1}}{S_n}.$$

D'une part $0 < a_n < S_n$ donc $u_n < 1$ et $1 - u_n > 0$.

$$\text{D'autre part } \ln \frac{S_{n-1}}{S_n} = \ln(1 - u_n), \text{ et en sommant, } \ln S_0 - \ln S_n = \sum_{k=1}^n \ln(1 - u_k).$$

Par hypothèse, on a $\lim S_n = +\infty$ donc $\lim \sum_{k=1}^n \ln(1 - u_k) = -\infty$.

- $\mathcal{L} u_n \nrightarrow 0$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- $\mathcal{L} u_n \rightarrow 0$, $\ln(1 - u_n) \sim u_n$ et la série diverge encore.

Exercice 5 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite strictement positive. On pose $v_n = \frac{u_n}{\prod_{k=1}^n (1 + u_k)}$.

- 1 Déterminer la somme $T_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$, en fonction de $P_n = \prod_{k=1}^n (1 + u_k)$.
- 2 Montrer que la série $\sum v_n$ converge.
- 3 Montrer que : $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = 1 \iff \sum u_n$ diverge.

Correction :

- 1 Par récurrence, $T_n = 1 - \frac{1}{P_n}$
 - 2 La suite des sommes partielles est majorée par 1, donc la série à $\mathbb{CP}$ converge.
 - 3 - Supposons que la série $\sum u_n$ converge.
On a $\ln P_n = \sum \ln(1 + u_n)$. Mais $u_n \rightarrow 0$ donc $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ et donc $\ln P_n \rightarrow \ell$ et $P_n \rightarrow e^\ell$.
Ainsi, $T_n \rightarrow 1 - e^{-\ell} < 1$.
 - Supposons que la série $\sum u_n$ diverge.
Alors $\sum \ln(1 + u_n)$ ne peut converger. Sinon, on aurait $\ln(1 + u_n) \rightarrow 0$, $u_n \rightarrow 0$ et donc $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ et $\sum u_n$ convergerait.
- Par conséquent, $\sum \ln(1 + u_n)$ étant à $\mathbb{CP}$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + u_n) = +\infty$. Donc $P_n \rightarrow +\infty$ et $T_n \rightarrow 1$.

Exercice 6 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln n$.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} (v_{n+1} - v_n)$ converge. Qu'en déduire pour la suite (v_n) ?

Correction : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} \left[1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] - \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}$.

Par conséquent, $\sum_{n \geq 1} (v_{n+1} - v_n)$ converge, et $v_n \rightarrow 0$.

Remarque : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma \approx 0,577$ constante d'Euler-Mascheroni.

Exercice 7 : Soit (a_n) une suite réelle strictement positive. On pose $b_n = \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$.

Comparer la nature des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$.

Correction : En posant $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ on a $b_n = \frac{a_n}{S_n}$.

- Supposons que $\sum a_n$ converge. Alors $\lim S_n = \ell > 0$. Donc $b_n \sim \frac{a_n}{\ell}$, et $\sum b_n$ converge.
- Supposons que $\sum b_n$ converge. On a $b_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n} = 1 - \frac{S_{n-1}}{S_n}$.

Ainsi, $\frac{S_{n-1}}{S_n} = 1 - b_n$ et $\ln S_{n-1} - \ln S_n = \ln(1 - b_n)$. En télescopant, $\ln S_1 - \ln S_n = \sum_{k=2}^n \ln(1 - b_k)$.

Comme $\sum b_n$ converge, on a $b_n \rightarrow 0$. Ainsi, $\ln(1 - b_n) \sim -b_n$ et donc $\sum_{k=2}^n \ln(1 - b_k)$ converge.

D'où $\ln S_n \rightarrow \ell$ et $S_n \rightarrow e^\ell$.

Exercice 8 : Soit (u_n) la suite définie par $u_1 \in]\sqrt{2}, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

- 1 Déterminer la convergence et la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 2 Déterminer la nature de la série $\sum (u_n - \ell)$.

Correction :

- $u_n \rightarrow \ell = 2$.
 - On pose $v_n = u_n - 2$.
 - Si $u_1 = 2$, la série est nulle. Elle converge vers 0.
 - Si $u_1 \in]\sqrt{2}, 2[$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n < 0$ (et $v_n \rightarrow 0$).
- $$v_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} - 2 = \sqrt{4 + v_n} - 2 = 2 \left(\sqrt{1 + \frac{v_n}{4}} - 1 \right) = \frac{v_n}{4} + o(v_n).$$
- Ainsi, $\frac{v_{n+1}}{v_n} \rightarrow \frac{1}{4}$ et la série (à $\mathbb{C}\mathbb{N}$) converge.
- Idem si $u_1 > \sqrt{2}$.

Exercice 9 : À l'aide de la méthode des rectangles déterminer un équivalent de $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ puis donner la nature de la série $\sum u_n$.

Correction :

- Équivalence des restes d'une série convergente $\frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

Or la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, donc les restes sont équivalents :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}.$$

Par conséquent, $\sum u_n$ diverge.

- Comparaison à une intégrale

$$x \mapsto \frac{1}{x^2} \text{ est décroissante. On a donc } \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} \leq \frac{1}{k^2} \text{ et } \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x^2}.$$

$$\text{Par conséquent, } \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ et donc } \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$

$$u_n \sim \frac{1}{n}. \text{ Par conséquent, la série (à } \mathbb{C}\mathbb{P}) \text{ diverge.}$$

Exercice 10 : Pour $\alpha > 0$, on pose $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Montrer que $(\alpha - 1)\zeta(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 1^+} 1$.

Correction : Comme $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante, on a $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$.

Donc $\frac{1}{\alpha-1} \leq \zeta(\alpha) \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$ et $1 \leq \alpha - 1\zeta(\alpha) \leq (\alpha-1) + 1$ et par encadrement, $(\alpha-1)\zeta(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 1^+} 1$,

autrement dit $\boxed{\zeta(\alpha) \underset{1^+}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}}$.

Exercice II : Montrer que $\ln n! \sim n \ln n$.

Correction : $\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln k$.

Par croissance de la fonction $\ln$, $\int_{k-1}^k \ln x \, dx \leq \ln k \leq \int_k^{k+1} \ln x \, dx$.

Donc $\int_1^n \ln x \, dx \leq \ln(n!) \leq \int_1^{n+1} \ln x \, dx$, et donc $n \ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1) \ln(n+1) - n$.

Par conséquent, $1 - \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{n \ln n} \leq \frac{\ln(n!)}{n \ln n} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln n}\right) - \frac{1}{\ln n}$.

Par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n!)}{n \ln n} = 1$ et donc $\boxed{\ln n! \sim n \ln n}$.