Fichiers Series-SemiCV a, b et c

Exercices faciles :

Exercice 1 : Déterminer la nature de $\sum (-1)^n \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^\alpha}$.

Correction : $|u_n| \sim \dfrac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$.

- Si $\alpha \leqslant -\dfrac{1}{2}$, la série diverge grossièrement.
- Si $\alpha > -\dfrac{1}{2}$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+\frac{3}{2}}}\right)$.

  Or $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ converge (CSSA) et $\sum \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+\frac{3}{2}}}\right)$ converge absolument.

  Donc la série converge.

Exercice 2 : Déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 1} \sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}$.

Correction : $\sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n} = \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

Or $\sum \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ converge (ChSSA) et $\sum \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ est absolument convergente.

Exercice 3 : Déterminer la nature de $\sum (-1)^n \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^\alpha}$.

Correction : $|u_n| \sim \dfrac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$.

- Si $\alpha \leqslant -\dfrac{1}{2}$, la série diverge grossièrement.
- Si $\alpha > -\dfrac{1}{2}$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+\frac{3}{2}}}\right)$.

  Or $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ converge (CSSA) et $\sum \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+\frac{3}{2}}}\right)$ converge absolument.

  Donc la série converge.

Exercice 4 : Donner la nature de la série de terme général :

$$\frac{(-1)^n}{n}.$$

Exercice 5 : Donner la nature de la série de terme général :

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha}.$$

Exercice 6 : Donner la nature de la série de terme général :

$$\sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right).$$

Exercice 7 : Donner la nature de la série de terme général :

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right).$$

Exercice 8 : Donner la nature de la série de terme général :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}}.$$

Exercice 9 : Donner la nature de la série de terme général :

$$\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{(-1)^n+n^\alpha}.$$

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$ est un réel négatif.

Correction : En posant $u_n=\dfrac{8^n}{(2n)!}$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{8}{(2n+2)(2n+1)}<1$ à partir de $n=1$. La série vérifie le CSSA, elle converge, et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}=1-4+r$ avec $|r|\leqslant\dfrac{64}{24}$ donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}<0$.

Exercice 2 :

1. Montrer que la suite de terme général $u_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin(nx)\,\mathrm{d}x$ converge, et préciser sa limite.
2. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^\star, u_{n+1}-u_n=u_n-\dfrac{1}{n}$. En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n}$.

Exercice 3 : Donner la nature de la série de terme général :

$$\sum_{n\geqslant 2}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right).$$

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}$.

Correction : $\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}=\dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}+\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

Or $\sum\dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ converge (CHCSA) et $\sum\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ est absolument convergente.

Exercice 2 : Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Correction : $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \dfrac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

Or $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est semi-convergente (CSSA), $\sum \dfrac{1}{n}$ est divergente (Riemann) et $\sum \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ est absolument convergente (dominée par une série de Riemann convergente.

Donc $\boxed{\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \text{ diverge}}$.

Remarque : On a pourtant $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une série convergente.

Exercice 3 : Déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$.

Correction : $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = e^{-\frac{1}{n}\ln(n!)}$.

D'après Stirling, $\lim \dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{2\pi n}} = 1$ donc $\ln(n!) + n - n\ln n - \dfrac{1}{2}\ln(2\pi n) \to 0$.

Ainsi, $\ln(n!) = n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln(2\pi n) + o(1)$, et $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = e^{-\ln n + 1 - \frac{1}{2n}\ln(2\pi n) + o\left(\frac{1}{n}\right)}$.

$\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \dfrac{e}{n}\left(e^{-\frac{\ln n}{2n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)}\right) = \dfrac{e}{n}\left(1-\dfrac{\ln n}{2n}+o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)\right) = \dfrac{e}{n} - \dfrac{e\ln n}{2n^2} + o\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$.

$\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}} = \dfrac{(-1)^n e}{n} + (-1)^{n+1}\dfrac{e\ln n}{2n^2} + o\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right) = \dfrac{(-1)^n e}{n} + o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

Or $\sum \dfrac{(-1)^n e}{n}$ converge (CSSA), et $\sum o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ converge (dominée par une série de Riemann convergente).

Par conséquent, $\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}} \text{ converge.}}$

Remarque : La série est semi-convergente puisque $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} \sim \dfrac{e}{n}$.

Exercice 4 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\sin k}{k}$.

1. Montrer que (σ_n) est bornée.
2. En déduire que (S_n) converge.

Correction :

1. $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik}\right) = \operatorname{Im}\left(e^i\dfrac{1-e^{in}}{1-e^i}\right)$ donc $|\sigma_n| \leqslant \dfrac{2}{|1-e^i|}$ et (σ_n) est bornée.
2. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\sin k}{k} = \sigma_1 + \sum_{k=2}^{n} \dfrac{\sigma_k - \sigma_{k-1}}{k} = \sigma_1 + \sum_{k=2}^{n}\dfrac{\sigma_k}{k} - \sum_{k=2}^{n}\dfrac{\sigma_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{\sigma_k}{k(k+1)} + \dfrac{\sigma_n}{n+1}$.

   Or, comme (σ_n) est bornée, $\dfrac{\sigma_n}{n+1} \to 0$ et $\dfrac{\sigma_k}{k(k+1)} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ est le terme général d'une série absolument convergente. On en conclut que $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\sin k}{k} \text{ est convergente.}}$