Séries et Matrices et applications linéaires

1 Séries numériques

— Définitions : série, terme général d'une série, somme partielle, convergence, divergence, somme totale.
— Deux séries qui coïncident à partir d'un certain rang ont même nature.
— En cas de convergence, définition du reste d'ordre n.$\mathrm{R}_n = \mathrm{S} - \mathrm{S}_n$ et $\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
— En cas de convergence, le terme général tend vers 0 . Divergence grossière. Réciproque fausse.
— L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel. Linéarité de la somme.
— Séries géométriques, séries télescopiques, série exponentielle.
— Théorème de comparaison série-intégrale. Séries de Riemann.
— Séries à termes positifs : théorème de comparaison.
— Deux séries à termes positifs dont les termes généraux sont équivalents ont même nature.
— Convergence absolue : définition, CVA $\Rightarrow$ CV, inégalité triangulaire de la somme.
— Série dominée ou négligeable devant une série absolument convergente.

2 Applications linéaires

— Matrice d'une famille finie de vecteurs dans une base. Notation $\mathrm{mat}\,\mathscr{B}(\mathscr{F})$. Matrice d'une application linéaire dans deux bases $\mathscr{B}_{\mathrm{E}}, \mathscr{B}_{\mathrm{F}}$.

Notation $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}},\mathscr{B}_{\mathrm{F}}}(f), \mathrm{mat}\,\mathscr{B}_{\mathrm{E}}(f)$

— À $\mathscr{B}_{\mathrm{E}}$ et $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}$ fixées, isomorphisme entre $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Conséquences : linéarité, unicité de la matrice associée, de l'application linéaire associée lorsque les bases sont données.

Dimension de $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

— Cas d'un espace vectoriel avec une base canonique. Matrice/application linéaire canoniquement associée.
— Formule $\mathrm{Y} = \mathrm{AX}$ i.e. $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{F}}}(y) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}},\mathscr{B}_{\mathrm{F}}}(f)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}}}(x)$ traduisant l'évaluation $y = f(x)$.
— Matrice de la composée de deux applications linéaires. Matrice de f^k.
— Matrice d'un isomorphisme. Matrice de l'inverse. Une famille est une base si, et seulement si sa matrice dans une base est inversible.
— Matrice de passage. Notation $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}} = \mathrm{mat}\,\mathscr{B}(\mathscr{B}')$.

Inverse, composition.

Formule $\mathrm{X} = \mathrm{PX}'$ i.e. $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x) = \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x)$. Formule de changement de bases $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AQ}$ ou $\mathrm{A} = \mathrm{PDQ}^{-1}$ i.e.

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_{\mathrm{E}},\mathscr{B}'_{\mathrm{F}}}(f) = \mathrm{P}_{\mathscr{B}'_{\mathrm{F}},\mathscr{B}_{\mathrm{F}}}\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}},\mathscr{B}_{\mathrm{F}}}(f)\mathrm{P}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}},\mathscr{B}'_{\mathrm{E}}} \text{ ou}$$
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}},\mathscr{B}_{\mathrm{F}}}(f) = \mathrm{P}_{\mathscr{B}_{\mathrm{F}},\mathscr{B}'_{\mathrm{F}}}\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_{\mathrm{E}},\mathscr{B}'_{\mathrm{F}}}(f)\mathrm{P}_{\mathscr{B}'_{\mathrm{E}},\mathscr{B}_{\mathrm{E}}}.$$

— Noyau, image, rang d'une matrice (définition avec la dimension de l'image coïncidant avec la définition du nombre de pivots).
— Conservation du rang par des opérations élémentaires.
— Théorème du rang et caractérisation de l'inversibilité d'une matrice par le noyau ou l'image ou le rang.

Questions de cours possibles [1] :

1. Comparaison série-intégrale.
2. Convergence des séries de Riemann
3. Théorème de comparaison pour les séries positives.
4. $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est isomorphe à $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
5. Si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $x \in \mathrm{E}$, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_\mathrm{F}}(f(x)) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_\mathrm{E},\mathscr{B}_\mathrm{F}}(f)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_\mathrm{E}}(x)$
6. $\mathscr{F}$ est une base de E si, et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathscr{F}_\mathrm{E}}(\mathscr{F})$ est inversible.

[1]. La liste des questions de cours possibles n'est donnée qu'à titre indicatif. L'examinateur est libre de vous demander tout éclaircissement ou démonstration que réclamera votre prestation en accord avec le programme.