Géométrie du plan et de l'espace

1 Complétez :

ⓐ L'application ⋯.⋯ : $\begin{array}{ccc} \vec{\mathcal{P}} \times \vec{\mathcal{P}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{u}\,;\vec{v}) & \longmapsto & \vec{u}.\vec{v} \end{array}$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive.

ⓑ L'application $\wedge$: $\begin{array}{ccc} \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} & \longrightarrow & \vec{\mathcal{E}} \\ (\vec{u}\,;\vec{v}) & \longmapsto & \vec{u} \wedge \vec{v} \end{array}$ est bilinéaire alternée.

ⓒ L'application det : $\begin{array}{ccc} \vec{\mathcal{E}}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) & \longmapsto & \det\,(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) \end{array}$ est une forme trilinéaire alternée.

I DANS LE PLAN

Proposition 18 (Calcul de la distance d'un point à une droite) :

Soit $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère quelconque.

Cas d'une droite définie par un point et un vecteur directeur : Soit $(\mathscr{D})$ la droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ et soit $\mathrm{M} \in \mathscr{P}$ alors :

$$d\,(\mathrm{M}\,;(\mathscr{D})) = \frac{\left|\left[\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right]\right|}{\|\vec{u}\|}.$$

Cas d'une droite définie par un point et un vecteur normal : Soit $(\mathscr{D})$ la droite passant par le point A, de vecteur normal $\vec{n}$ et soit $\mathrm{M} \in \mathscr{P}$ alors :

$$d\,(\mathrm{M}\,;(\mathscr{D})) = \frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|}{\|\vec{n}\|}.$$

2 Déterminer les points d'intersection entre le cercle (Γ) : $x^2 + (y+2)^2 = 25$ et la droite $(d) : x - 2y + 1 = 0$.

$$\mathrm{M}\,(x\,;y) \in (\Gamma) \cap (d) \iff \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x^2 + (y+2)^2 = 25 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ (2y-1)^2 + (y+2)^2 = 25 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2y - 1 \\ y^2 - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y - 1 \\ (y-2)(y+2) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -5 \\ y = -2 \end{cases}$$

(Γ) et (d) sont donc sécants en $\mathrm{M}_1\,(3\,;2)$ et $\mathrm{M}_2\,(-5\,;-2)$.

3 Donner l'équation du cercle de diamètre [AB] avec $\mathrm{A}\,(1\,;3)$ et $\mathrm{B}\,(-1\,;-2)$.

Deux méthodes :

– C'est le cercle de centre $\Omega\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$, le milieu de $[AB]$, et de rayon $\dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}\sqrt{4+25} = \dfrac{29}{2}$:

$$x^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{29}{4} \iff x^2+y^2-y-7=0.$$

– C'est l'ensemble des points $M\,(x\,;y)$ tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \end{pmatrix} = 0 \iff x^2-1+y^2-y-6=0 \iff x^2+y^2-y-7=0.$$

II Dans l'espace

Proposition 5 : Soit $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ une base orthonormale directe de $\vec{\mathcal{E}}$.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix} yz'-y'z \\ x'z-xz' \\ xy'-x'y \end{pmatrix}$.

Proposition 7 : Soit $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ est une base orthonormée directe de $\vec{\mathcal{E}}$.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} x" \\ y" \\ z" \end{pmatrix}$ alors

$$\det\left(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}\right) = \begin{vmatrix} x & x' & x" \\ y & y' & y" \\ z & z' & z" \end{vmatrix} = xy'z" + yz'x" + zx'y" - (zy'x" + xz'y" + yx'z").$$

Proposition 6 : Soient $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ un repère quelconque et $M\in\mathcal{E}$.

Cas d'un plan défini par un point et un vecteur normal :

Soit $(\mathscr{P})$ le plan passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

$$d\,(M\,;(\mathscr{P})) = \frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}\right|}{\|\vec{n}\|}.$$

Cas d'un plan défini par un point et deux vecteurs directeurs :

Soit $(\mathscr{P})$ le plan passant par le point A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On note $(\mathscr{P}) = A + \mathrm{vect}\,\vec{u};\,\vec{v}$.

$$d\,(M\,;(\mathscr{P})) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AM}\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right]\right|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}.$$

Proposition 17 : Soient A, M $\in \mathscr{E}$ et $\vec{u} \in \vec{\mathscr{E}}$ non nul. On considère la droite $(\mathscr{D}) = \mathrm{A} + \mathbb{R}\vec{u}$.

$$d\left(\mathrm{M}\,;(\mathscr{D})\right) = \frac{\left\|\overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}.$$

4 Donner une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par le point $\mathrm{A}(1,0,1)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1,1,0)$ et $\vec{v} = (0,1,1)$.

$\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$. Les coordonnées de $\vec{n}$ sont $(1,-1,1)$.

On en déduit que
$$\begin{aligned}\mathrm{M}(x,y,z) \in \mathscr{P} &\iff \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = 0\\ &\iff 1(x-1) - 1(y-0) + 1(z-1) = 0\\ &\iff x - y + z - 2 = 0.\end{aligned}$$

5 Déteminer l'ensemble de points $\mathrm{M}\,(x\,;y\,;z)$ vérifiant l'équation ci-dessous et donner ses éléments caractéristiques :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0 \iff (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4^2.$$

C'est la sphère de centre $\Omega\,(1\,;2\,;3)$ et de rayon 4.