XXXIV
Fonctions de deux variables

Pour ce dernier chapitre de l'année, nous allons faire un rapide survol des techniques d'étude et de calcul liées aux fonctions à deux variables que vous approfondirez l'an prochain. Au programme, des choses que vous avez pour la plupart déjà croisées en physique ou en SII : calcul de dérivées partielles, plan tangents, différentielles et un tout petit peu de champs de vecteurs.

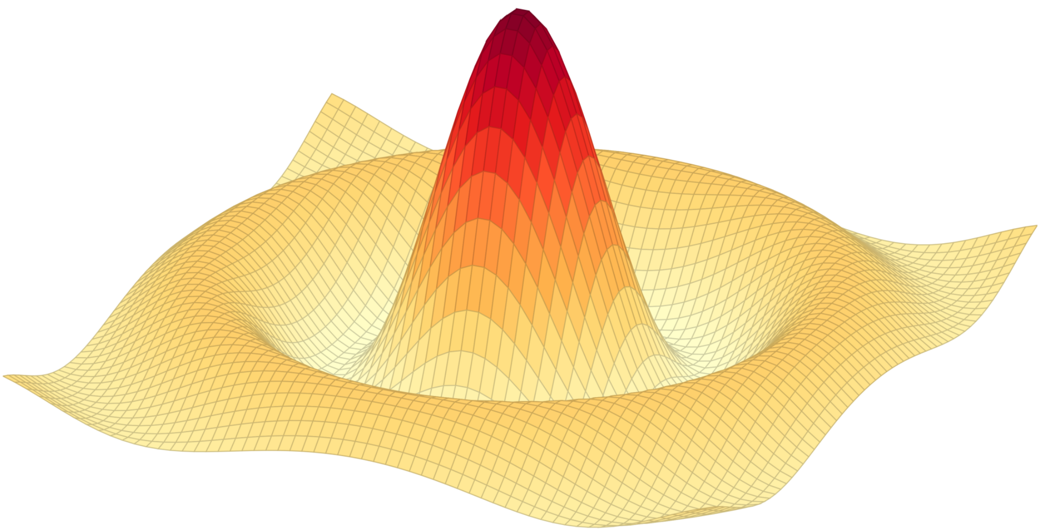


Figure XXXIV.1 – Surface représentative de la fonction $r \longmapsto \dfrac{\sin(r)}{r}$.

Le but de cette section, dont le contenu sera entièrement repris dans un cadre plus général en seconde année, est de familiariser les étudiants avec les calculs sur les dérivées partielles, notamment avec la « règle de la chaîne », et de développer une vision géométrique des fonctions de deux variables. Le point de vue est donc essentiellement pratique. Toute extension et tout développement théorique supplémentaire sont hors programme.

Contenu

I Approche graphique

Définition 1 : Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$.

On appelle *fonction à deux variables* toute fonction $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.

Comme pour les fonctions de la variable réelle, Ω est appelé le *domaine de définition* de f.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$

Figure XXXIV.2 – Fonction à une variable

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\,;y) & \longmapsto & \sin(x)\sin(y) \end{array}$$

Figure XXXIV.3 – Fonction à deux variables

Exercice 1 : Préciser le domaine de définition des fonctions suivantes et en donner une interprétation géométrique :

1. $f : (x\,;y) \longmapsto x^3 + 2x^2y + xy^3 - 4y^2$.
2. $g : (x\,;y) \longmapsto \dfrac{1}{|x-y|}$.

Correction :

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$.
2. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}^2$ privé de la première bissectrice d'équation $y = x$.

I.1 Graphe

Nous avons l'habitude de représenter toute fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ par une courbe dans le plan $\mathbb{R}^2$, précisément la courbe d'équation $y = f(x)$.

Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ sera, quant à elle, représentée par une surface de l'espace $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x\,;y)$.

Définition 2 (Surface représentative) : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.

On appelle *surface représentative* de f l'ensemble

$$\mathscr{S} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x,y) \in \Omega \text{ et } z = f(x,y)\right\}$$

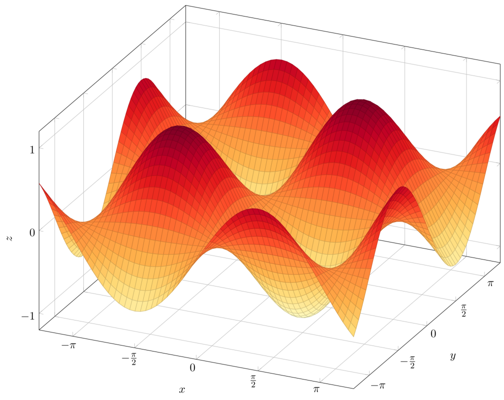


Figure XXXIV.4 – $z = \sin(x)\sin(y)$

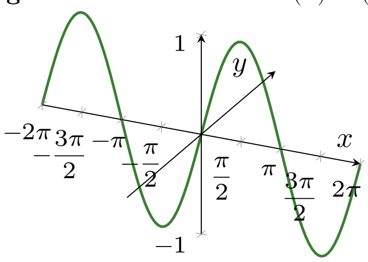


Figure XXXIV.5 – $z = \sin(x)$

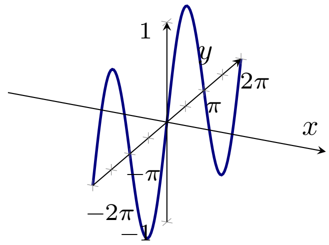


Figure XXXIV.6 – $z = \sin(y)$

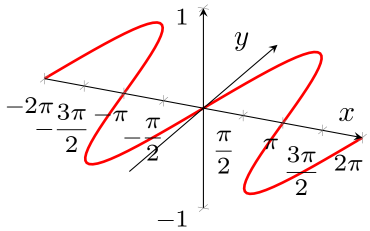


Figure XXXIV.7 – $y = \sin(x)$

Intéressons-nous, par exemple, à la fonction $(x\,;y) \longmapsto x^2 + \sin(3y)$.

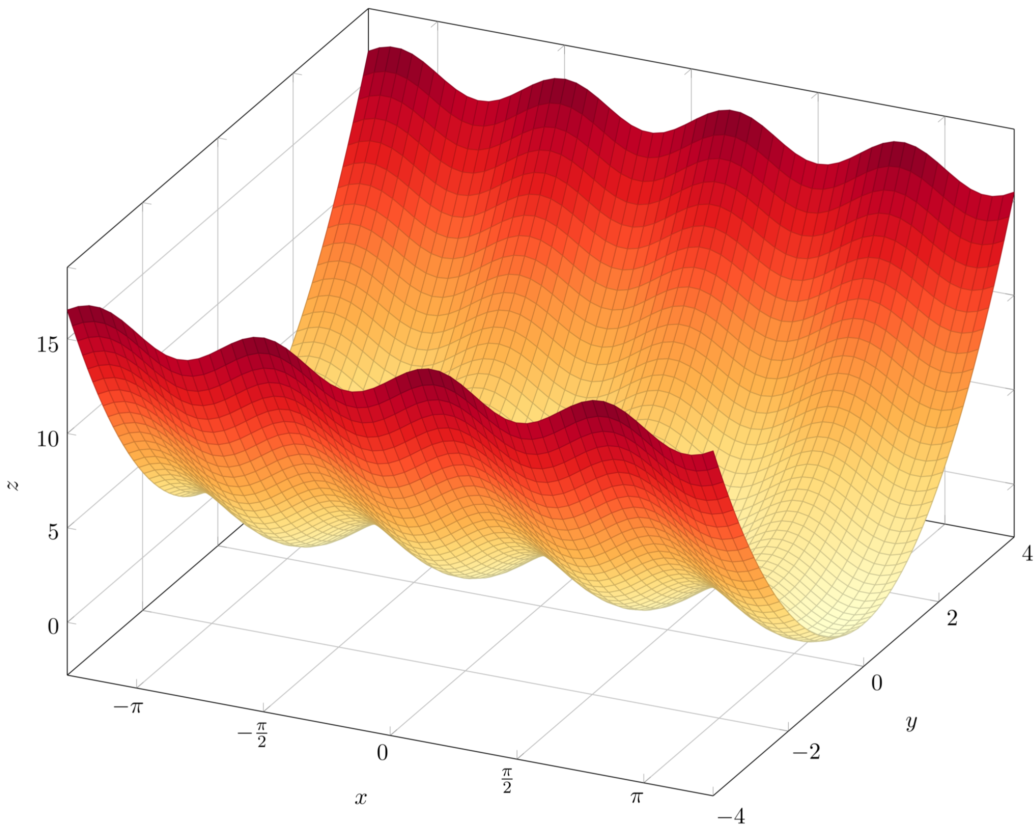


Figure XXXIV.8 – $z = x^2 + \sin(3y)$

Pour construire son graphe $\mathscr{S}$, on étudie souvent son intersection avec une collection de plans parallèles qui balaient l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier.

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

— l'intersection de $\mathscr{S}$ et du plan d'équation $x = \lambda$ est la courbe d'équation $z = \lambda^2 + \sin(3y)$ dans ce plan,

— l'intersection de $\mathscr{S}$ et du plan d'équation $y = \lambda$ est la courbe d'équation $z = x^2 + \sin(3\lambda)$ dans ce plan,

— l'intersection de $\mathscr{S}$ et du plan d'équation $z = \lambda$ est la courbe d'équation $x^2 + \sin(3y) = \lambda$ dans ce plan. Ces courbes particulières s'appelle des *lignes de niveau* λ de f (*confer* paragraphe (I.2)).

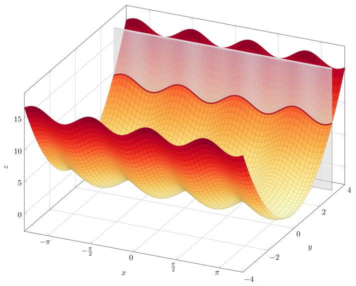


Figure XXXIV.9 – Intersection de $\mathscr{S}$ avec $y = 2$.

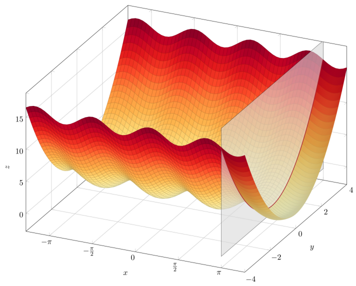


Figure XXXIV.10 – Intersection de $\mathscr{S}$ avec $x = \pi$.

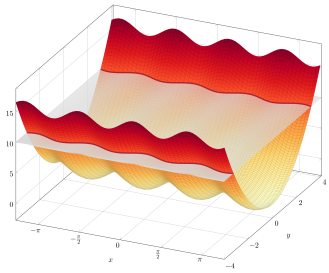


Figure XXXIV.11 – Intersection de $\mathscr{S}$ avec $z = 10$.

Faites l'effort de réfléchir en les mêmes termes aux exemples qui suivent et assurez-vous de bien les comprendre.

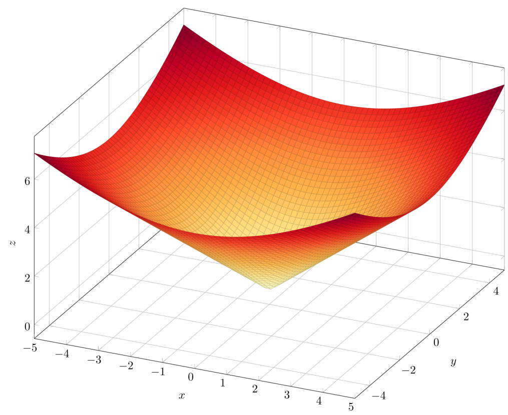


Figure XXXIV.12 – $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

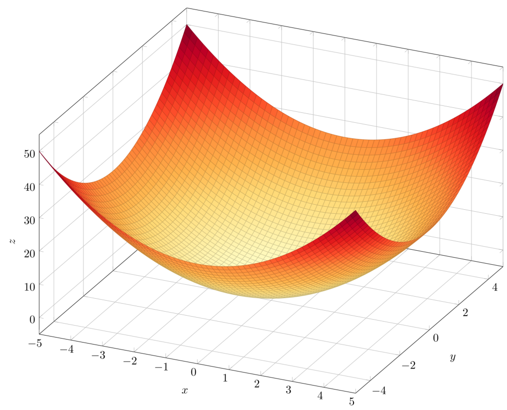


Figure XXXIV.13 – $z = x^2 + y^2$.

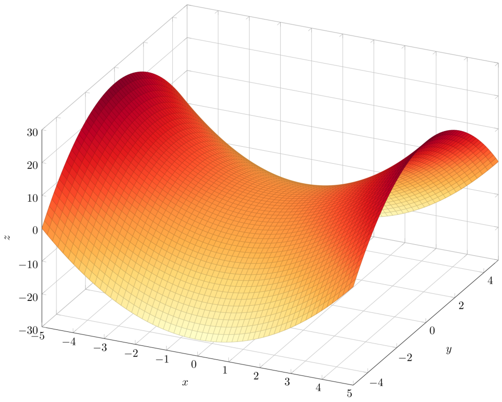


Figure XXXIV.14 – $z = x^2 - y^2$.

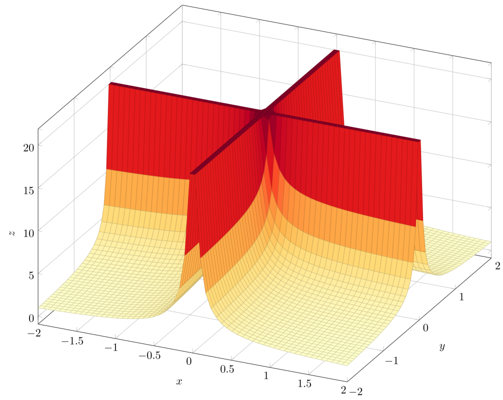


Figure XXXIV.15 – $z = \dfrac{1}{|x|} + \dfrac{1}{|y|}$.

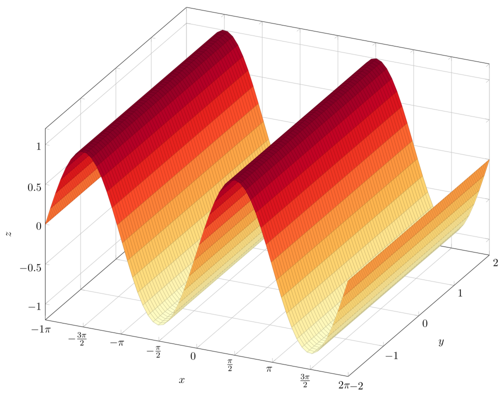


Figure XXXIV.16 – $z = \sin(x)$.

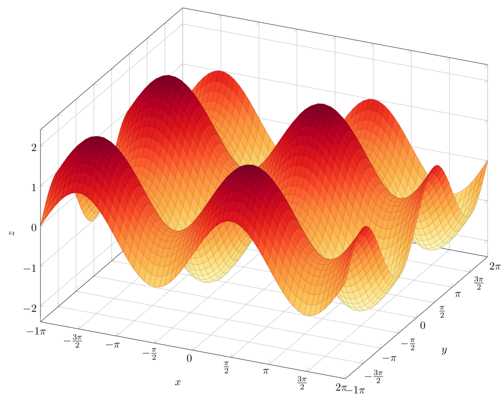


Figure XXXIV.17 – $z = \sin(x) + \sin(y)$.

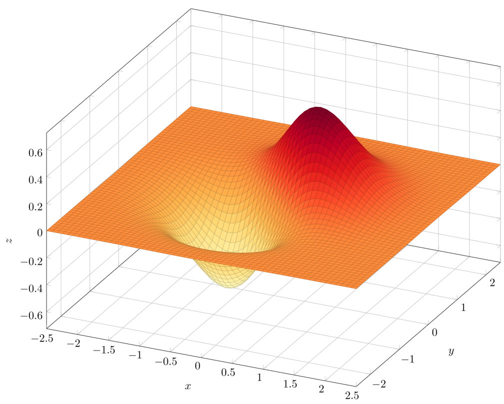


Figure XXXIV.18 – $z = (x+y)\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

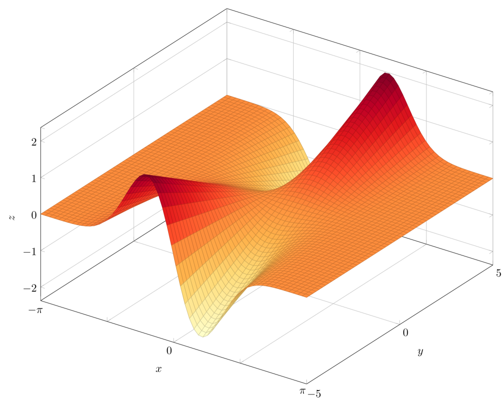


Figure XXXIV.19 – $z = y\sin(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

I.2 Lignes de niveau

Définition 3 (Lignes de niveau) : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.

Pour $k \in \mathbb{R}$, on appelle *ligne de niveau* k, ou *courbe de niveau* k, l'ensemble

$$\mathrm{L}_k = \{(x,y) \in \Omega, \quad f(x,y) = k\}.$$

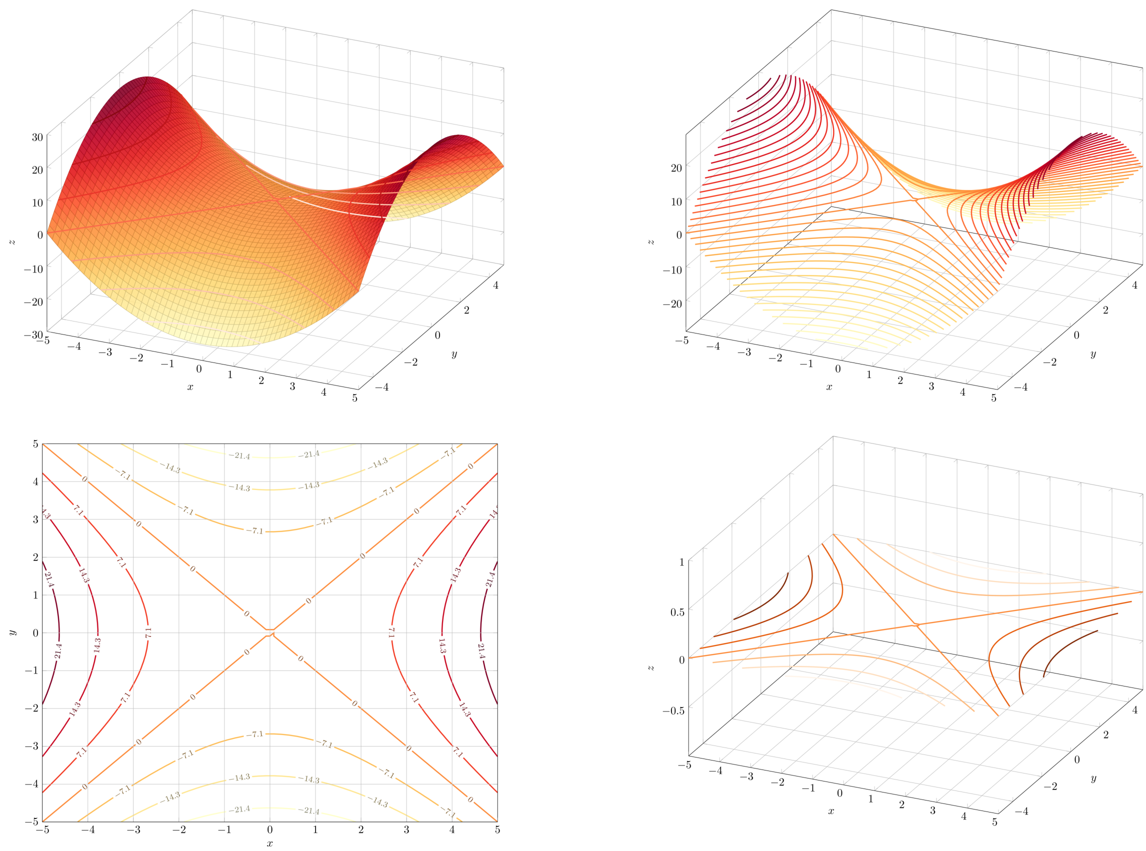


Figure XXXIV.20 – Lignes de niveau de $(x, y) \longmapsto x^2 - y^2$.

Exemple 1 : Considérons la fonction $(x\,;y) \longmapsto x^2 - y^2$.

- Les lignes de niveau sont des hyperboles.
- La ligne de niveau 0 est constituée des deux droites d'équation $y = x$ et $y = -x$.

De manière générale, toute courbe joignant des points d'égale valeur est appelée *isoplèthe*. Elle sépare des zones de faibles valeurs et des zones de valeurs plus élevées. Toutes les courbes iso-... que vous connaissez sont des *isoplèthes*.

Exemple 2 :

- Si f est la fonction qui, à la longitude et la latitude associe l'altitude, alors les lignes de niveau représentent les points qui sont à la même altitude : si on se promène sur une ligne de niveau, on ne monte ni ne descend. Ce sont ces lignes (dites de niveau) qui sont représentées sur les cartes topographiques.

  Plus les courbes de niveau sont serrées, plus l'altitude varie rapidement, plus la pente est forte.

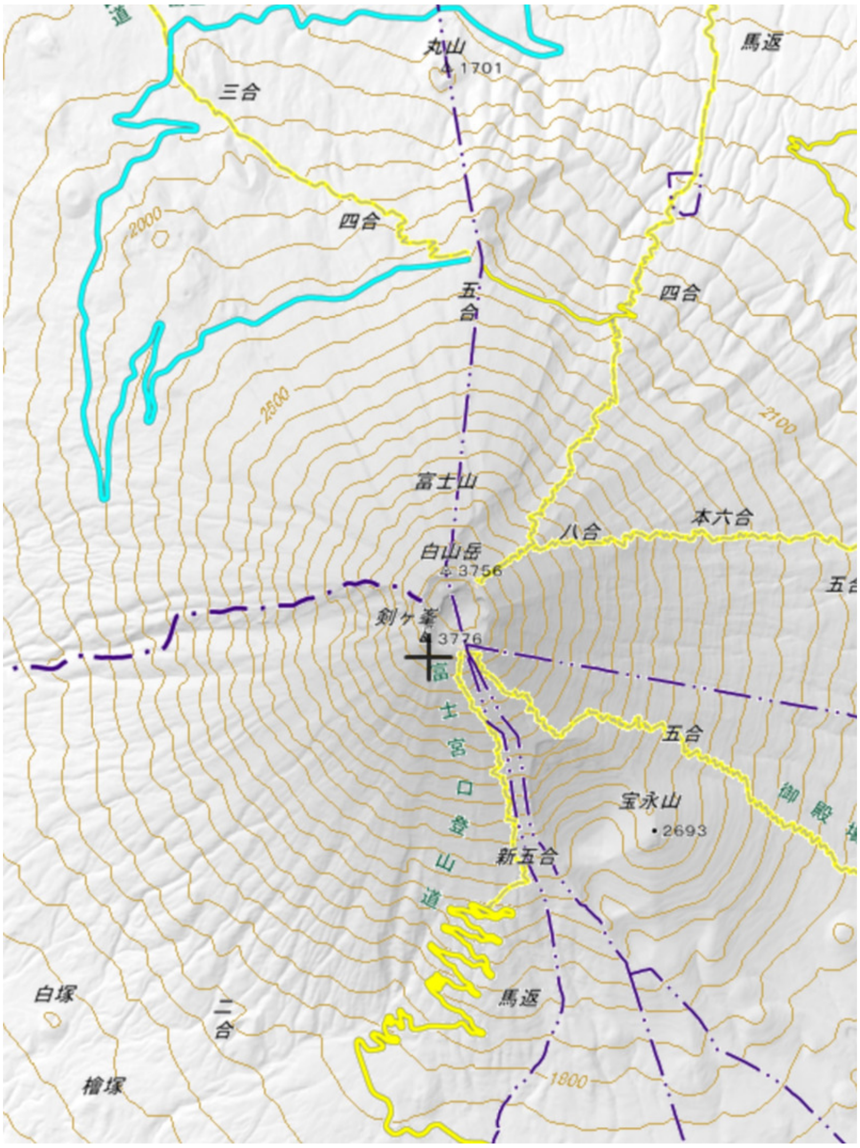


Figure XXXIV.21 – Les lignes de niveau autour du mont Fuji

Exemple 3 :

- Si f est la fonction qui, à la longitude et à la latitude associe la pression (au niveau de la mer), alors les lignes de niveau relient des points d'égale pression. Ces lignes sont appelées en météorologie des courbes *isobares*.

  Lorsque les isobares forment des boucles fermées, la plus petite boucle au centre indique le centre de pression. Un système anticyclonique est représenté par un « H »en anglais et un système dépressionnaire est représenté par un « L »en anglais.

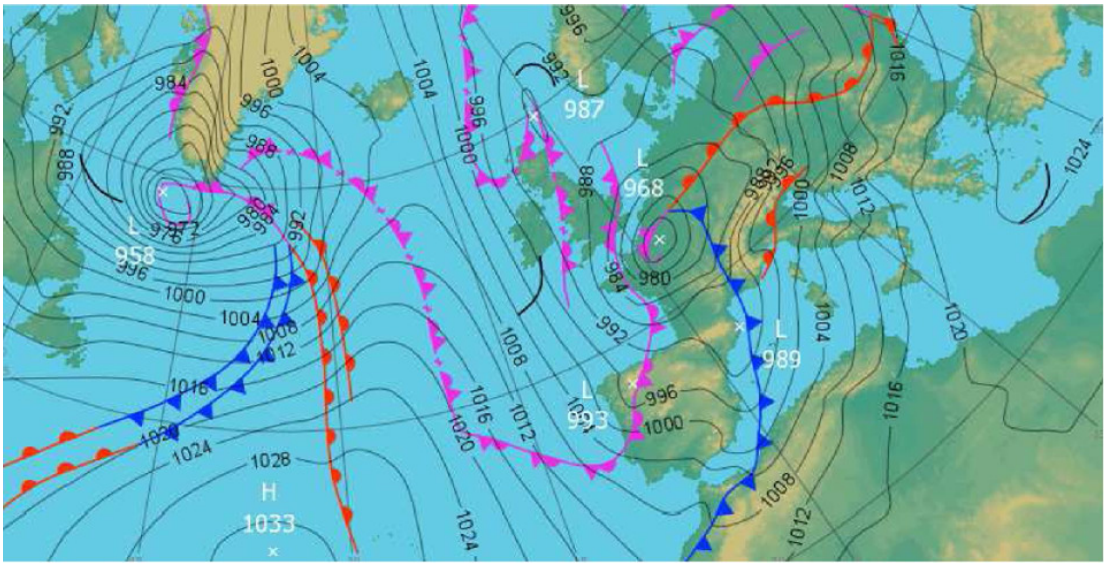


Figure XXXIV.22 – Courbes isobares : La vitesse du vent est fonction de l'écartement des isobares : plus les isobares sont serrées, plus la pression varie rapidement, plus le vent souffle fort.

I.3 Applications partielles

Définition 4 : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.

- pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, on note $f(\cdot, y_0)$ ou f_{y_0} l'application $x \longmapsto f(x, y_0)$ qui est définie sur l'ensemble des réels x tels que $(x, y_0) \in \Omega$.

$$f_{y_0} : x \longmapsto f(x, y_0)$$

- pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on note $f(x_0, \cdot)$ ou f_{x_0} l'application $y \longmapsto f(x_0, y)$ qui est définie sur l'ensemble des réels y tels que $(x_0, y) \in \Omega$.

$$f_{x_0} : y \longmapsto f(x_0, y)$$

$f(\cdot, y_0)$ et $f(x_0, \cdot)$ sont appelées *applications partielles* de f en (x_0, y_0).

Les applications partielles sont donc données par la même équation que la fonction f elle-même, seul le statut de x et de y change : au lieu d'avoir deux variables, l'une d'elles est désormais fixée (sa valeur dépend du point $(x_0\,;y_0)$ en lequel on regarde les applications partielles).

Tracer les représentations graphiques de ces applications partielles revient à tracer la coupe de la surface représentative de f par les plans d'équation respective $y = x_0$ et $x = x_0$. *confer* paragraphe (I.1) .

Exemple 4 : Considérons la fonction $z \longmapsto x^2 - y^2$ et $(x_0\,;y_0) \in \mathbb{R}^2$.

- Les fonctions partielles sont des paraboles de concavité contraire :

$$x \longmapsto x^2 - y_0^2 \quad \text{et} \quad y \longmapsto -y^2 + x_0^2.$$

- Les lignes de niveau $k \in \mathbb{R}$ sont des hyperboles d'équation $x^2 - y^2 = k$ ou les deux bissectrices lorsque $k = 0$.

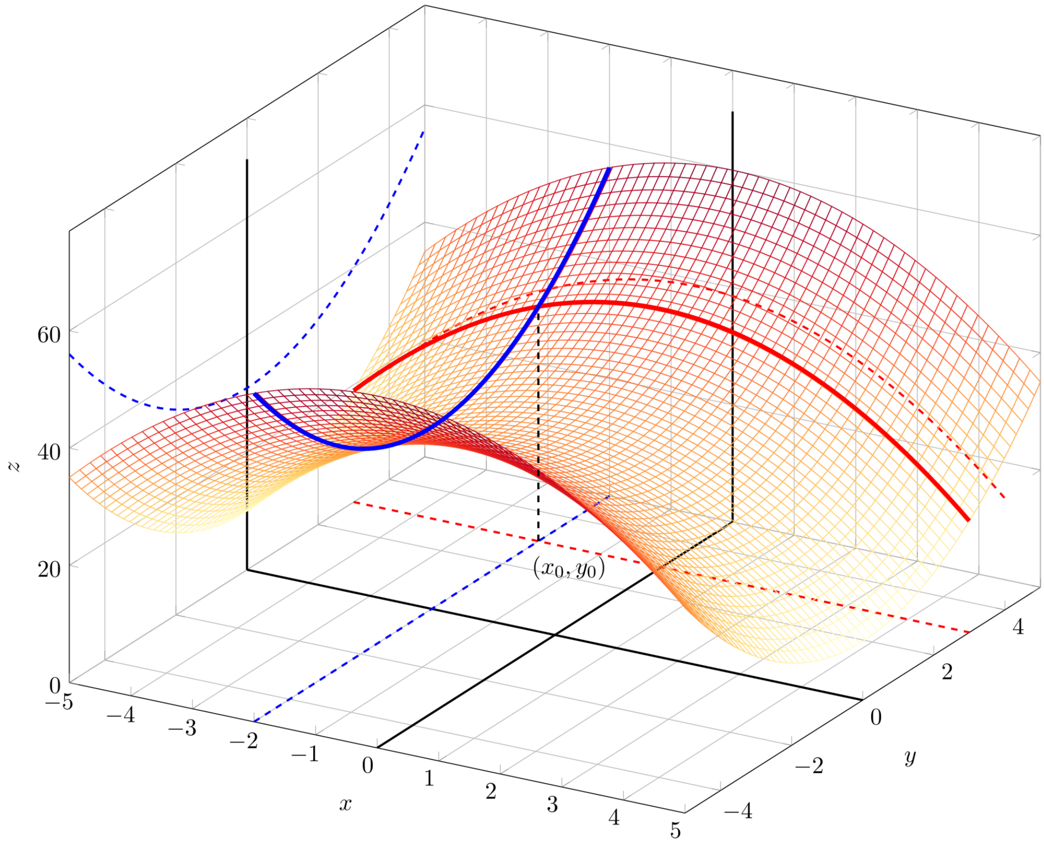


Figure XXXIV.23 – $(x, y) \longmapsto f(x, y) = x^2 - y^2$ avec ses fonctions partielles
$f_{x_0} : (x_0, y) \longmapsto f(x_0, y)$ et $f_{y_0} : (x, y_0) \longmapsto f(x, y_0)$.

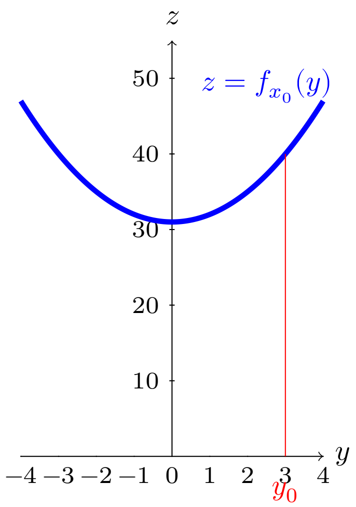


Figure XXXIV.24 – $f_{x_0} : y \longmapsto f(x_0, y)$

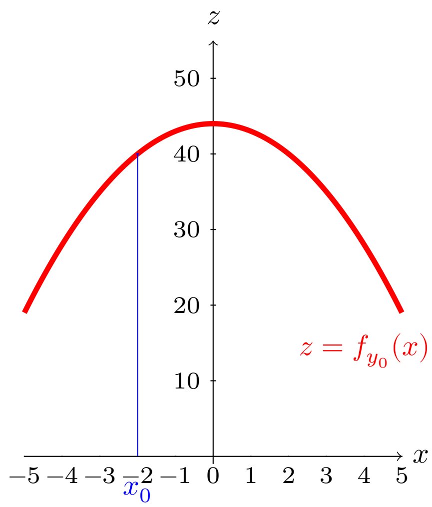


Figure XXXIV.25 – $f_{y_0} : x \longmapsto f(x, y_0)$

Figure XXXIV.26 – Applications partielles de $(x\,; y) \longmapsto x^2 - y^2$.

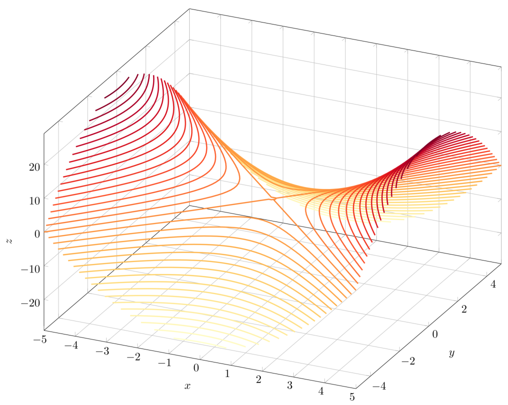


Figure XXXIV.27 – Lignes de niveau de $(x\,;y) \longmapsto x^2 - y^2$.

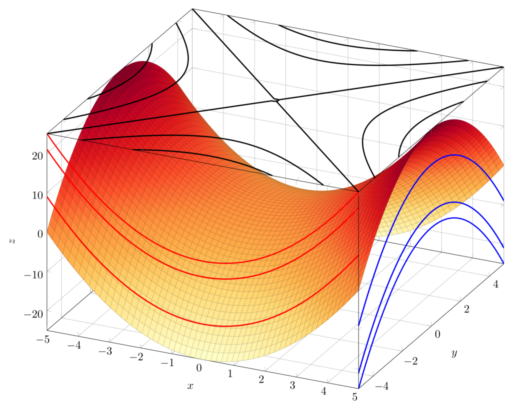


Figure XXXIV.28 – Différences entre fonctions partielles et lignes de niveau de $(x\,;y) \longmapsto x^2 - y^2$.

Exemple 5 : Considérons la fonction $f : (x\,;y) \longmapsto x^2 + y^2$.

- l'application partielle obtenue en fixant $y = 1$ est la fonction d'une variable $f_{y,1} : x \longmapsto x^2 + 1$.
- l'application partielle obtenue en fixant $x = 2$ est la fonction $f_{x,2} : y \longmapsto y^2 + 4$.
- Les applications partielles sont toutes représentées par des paraboles.

  En particulier, à l'origine, elles ont pour équation $x \longmapsto x^2$ et $y \longmapsto y^2$.
- Les lignes de niveau sont des cercles.

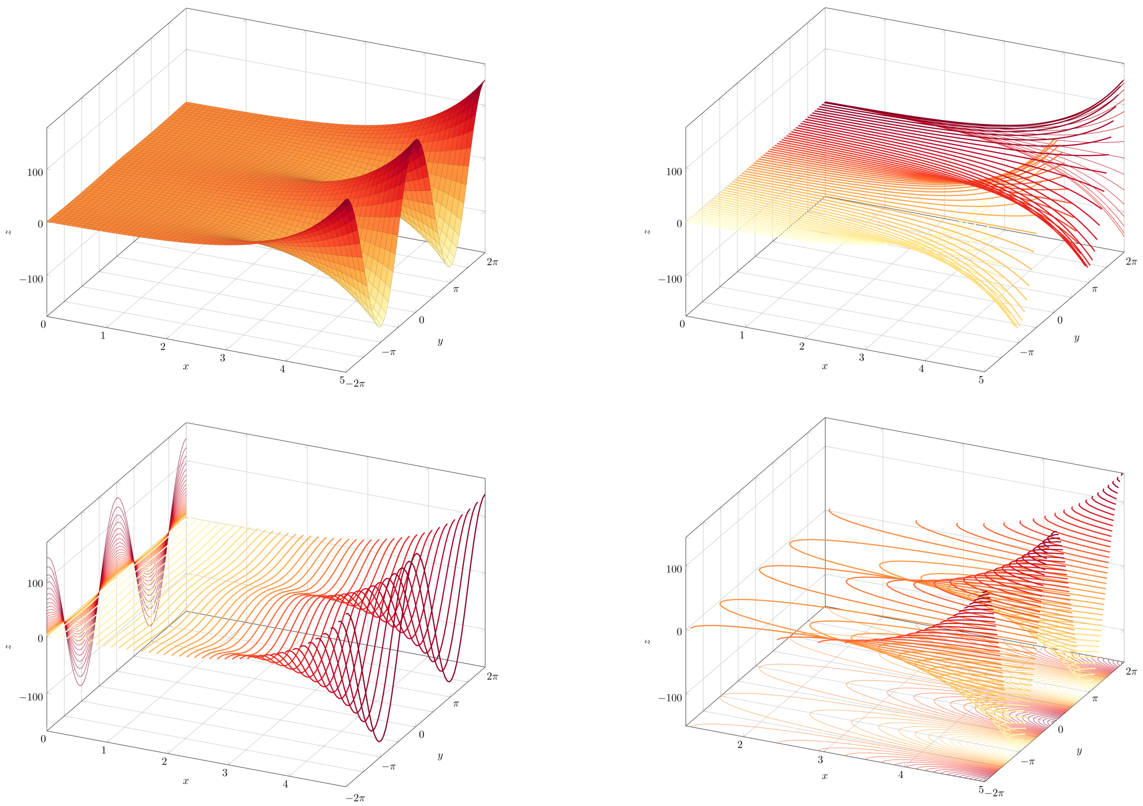


Figure XXXIV.29 – Différence entre fonctions partielles et lignes de niveau.

Remarque : Les courbes des applications partielles et les lignes de niveau permettent de reconstituer l'intégralité de la surface. Par exemple, la figure (XXXIV.30) s'appelle un *paraboloïde hyperbolique* tandis que la figure (XXXIV.31) est un *paraboloïde de révolution.*

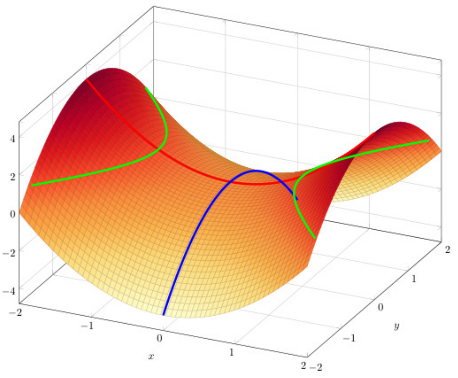


Figure XXXIV.30 – $z = x^2 - y^2$.

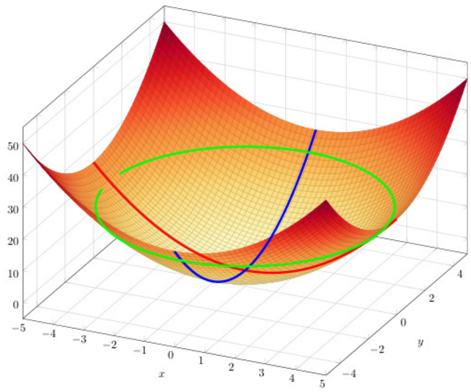
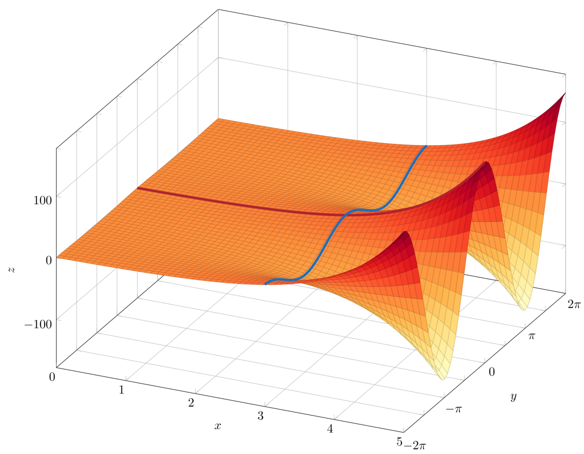


Figure XXXIV.31 – $z = x^2 + y^2$.

Exercice 2 (Applications partielles) : Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & e^x \cos(y). \end{array}$

Déterminer $f(\cdot, 0)$ et $f(3, \cdot)$.

Correction :



II RUDIMENTS DE TOPOLOGIE DANS $\mathbb{R}^2$

On introduit brièvement dans ce paragraphe, et sans s'apesantir sur les preuves, quelques notions topologiques simples dont nous aurons besoin ensuite.

L'idée essentielle, si nous voulons faire un peu d'analyse, est de pouvoir définir la notion de limite d'une fonction en un point.

Globalement, pouvoir exprimer rigoureusement le fait que $f(x)$ peut être « aussi proche » de ℓ que ce que l'on veut à condition que x soit « assez proche » de x_0, ce que nous écrivons

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

- Pour une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ s'écrivait :

$$\forall\,\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists\,\alpha\in\mathbb{R}_+^*\ /\quad \left\{\begin{array}{c} |x-x_0|<\alpha \\ \text{ou} \\ x\in\,]x_0-\alpha\,;x_0+\alpha[\\ \text{ou} \\ \mathrm{d}\,(x_0\,;x)<\alpha \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{c} |f(x)-\ell|<\varepsilon \\ \text{ou} \\ f(x)\in\,]\ell-\varepsilon\,;\ell+\varepsilon[\\ \text{ou} \\ \mathrm{d}\,(\ell\,;f(x))<\varepsilon. \end{array}\right.$$

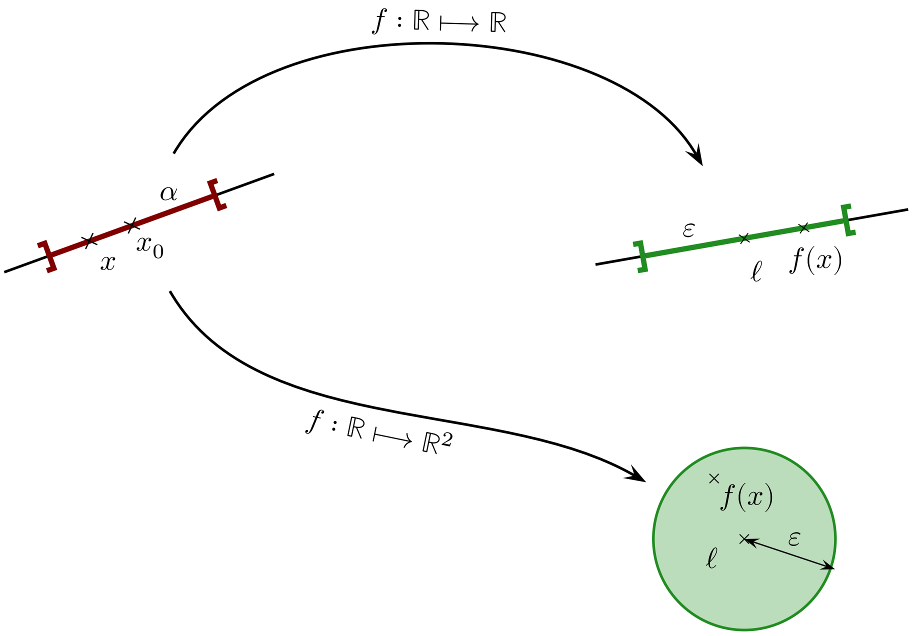


Figure XXXIV.32 – Fonction à une variable à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$.

- Pour une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^2\simeq\mathbb{C}$, nous avons tout d'abord eu recours au module et les expressions ci-dessus restent inchangées :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \iff \forall\,\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists\,\alpha\in\mathbb{R}_+^*\ /\quad \left\{\begin{array}{c} |x-x_0|<\alpha \\ \text{ou} \\ x\in\,]x_0-\alpha\,;x_0+\alpha[\\ \text{ou} \\ \mathrm{d}\,(x_0\,;x)<\alpha \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{c} |f(x)-\ell|_{\mathbb{C}}<\varepsilon \\ \text{ou} \\ \mathrm{d}\,(\ell\,;f(x))<\varepsilon. \end{array}\right.$$

Nous pouvons aussi munir $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique *i.e.*

— de son produit scalaire :

$$\begin{array}{rccl} (\cdot|\cdot): & \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \left(\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix};\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right) & \longmapsto & (\vec{u}|\vec{v})=xx'+yy', \end{array}$$

— et de sa norme associée :

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\|_2: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & \vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} & \longmapsto & \|\vec{u}\|_2=\sqrt{(\vec{u}|\vec{u})}=\sqrt{x^2+y^2}. \end{array}$$

On identifiera souvent le vecteur $\vec{u}\,(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$ avec le point M du plan de coordonnées $(x\,;y)$ dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ *i.e.* on confond $\mathbb{R}^2$ avec le plan affine $\mathscr{P}$ si bien qu'on notera fréquemment $\mathrm{M}=(x\,;y)$.

La norme euclidienne permet également de définir une distance sur $\mathbb{R}^2$ appelée distance euclidienne :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{d}_2: & \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (\vec{u}\,;\vec{v}) & \longmapsto & \|\vec{u}-\vec{v}\|_2\,. \end{array} \iff \begin{array}{rccl} \mathrm{d}_2: & \mathscr{P}\times\mathscr{P} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (\mathrm{M}\,;\mathrm{M}') & \longmapsto & \|\mathrm{M}-\mathrm{M}'\|_2=\mathrm{MM}'. \end{array}$$

$$\forall\,\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\,\exists\,\alpha\in\mathbb{R}_+^*\;/\quad \left\{\begin{array}{c} |x-x_0|<\alpha \\ \text{ou} \\ x\in\,]x_0-\alpha\,;x_0+\alpha[\\ \text{ou} \\ \mathrm{d}\,(x_0\,;x)<\alpha \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{c} \|f(x)-\ell\|_2<\varepsilon \\ \text{ou} \\ \mathrm{d}_2\,(\ell\,;f(x))<\varepsilon. \end{array}\right.$$

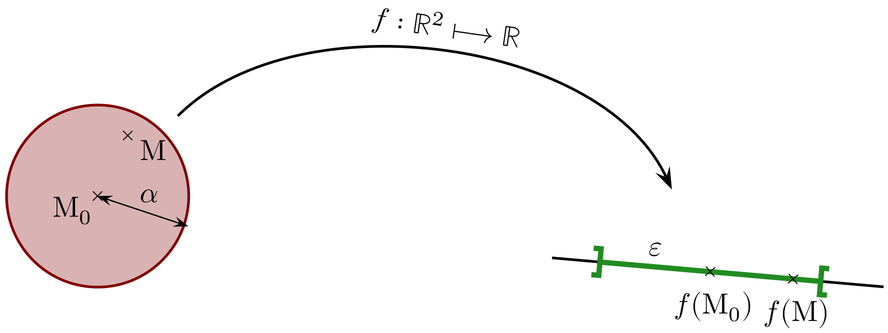


Figure XXXIV.33 – Fonction à deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Pour une fonction de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x)=\ell$ s'écrira alors au paragraphe (III.1) sous la forme légitime :

$$\forall\,\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\,\exists\,\alpha\in\mathbb{R}_+^*\;/\quad \left\{\begin{array}{c} \|(x\,;y)-(x_0\,;y_0)\|_2<\alpha \\ \text{ou} \\ \mathrm{MM}_0<\alpha \\ \text{ou} \\ \mathrm{d}_2\,(\mathrm{M}_0\,;\mathrm{M})<\alpha \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{c} |f(\mathrm{M})-\ell|<\varepsilon \\ \text{ou} \\ f(\mathrm{M})\in\,]\ell-\varepsilon\,;\ell+\varepsilon[\\ \text{ou} \\ \mathrm{d}\,(\ell\,;f(\mathrm{M}))<\varepsilon. \end{array}\right.$$

II.1 Boules

Définition 5 : Pour tous $\mathrm{A}(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ et $r>0$, on appelle :

- *boule ouverte* de centre A et de rayon r l'ensemble

$$\mathcal{B}(\mathrm{A},r)=\left\{\mathrm{M}\in\mathbb{R}^2\,/\,\mathrm{AM}<r\right\}=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,\|(x\,;y)-(x_0\,;y_0)\|<r\right\}.$$

- *boule fermée* de centre A et de rayon r l'ensemble

$$\overline{\mathcal{B}}(\mathrm{A},r)=\left\{\mathrm{M}\in\mathbb{R}^2\,/\,\mathrm{AM}\leqslant r\right\}=\left\{(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,\|(x\,;y)-(x_0\,;y_0)\|\leqslant r\right\}.$$

Boule fermée : $\overline{\mathcal{B}}(\mathrm{A}, r)$ Boule ouverte : $\mathcal{B}(\mathrm{A}, r)$

Figure XXXIV.34 – Boules de centre A dans $\mathbb{R}^2$.

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on gagnerait bien sûr à parler de disques et de cercles, mais la théorie développée dans ce chapitre s'étend sans difficulté majeure à $\mathbb{R}^n$ pour tout $n \geqslant 2$, alors autant parler tout de suite de boules et de sphères.

II.2 Ouverts

La définition qui suit ne devrait pas trop vous dépayser.

Définition 6 (Voisinage d'un point) :

- Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^2$.

  On appelle *voisinage de* A toute partie de $\mathbb{R}^2$ contenant une boule ouverte de centre A.

  On notera dans ce cours $\mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(\mathrm{A})$ ou, plus simplement, $\mathcal{V}(\mathrm{A})$ l'ensemble des voisinages de A dans $\mathbb{R}^2$.

- Soit Ω une partie de $\mathbb{R}^2$.

  On dit que Ω est (un) *ouvert* si :

$$\forall\, \mathrm{A} \in \Omega,\ \exists\, r > 0,\ \mathcal{B}(\mathrm{A}, r) \subset \Omega.$$

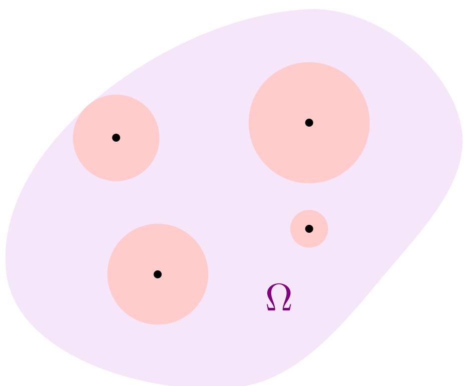


Figure XXXIV.35 – Un ouvert est (un) voisin(age) de chacun de ses points.

Un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est donc voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire qu'il contient une boule ouverte autour de chaque point. Intuitivement, un ouvert est un ensemble qui n'a pas de « bord » à l'image des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Cette branche des mathématiques s'appelle la *topologie*.

Proposition 1 :

(i) Toute boule ouverte est un ouvert.

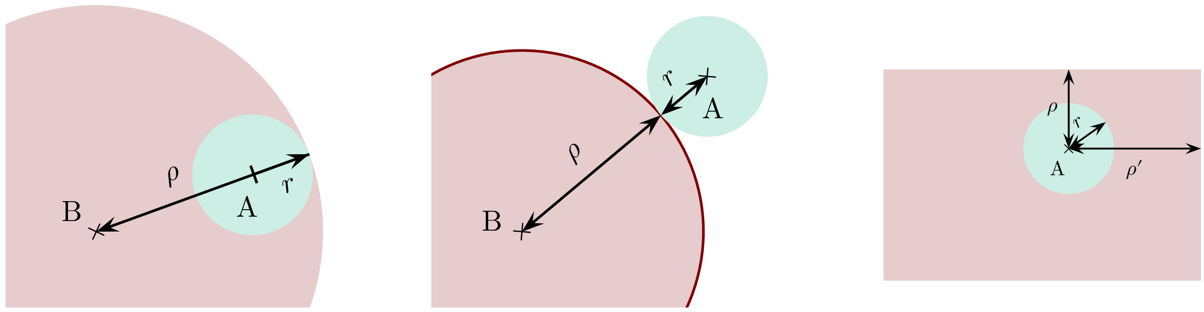
(ii) Le complémentaire de toute boule fermée est un ouvert.
En particulier, $\mathbb{R}^2 \setminus \{A\}$ est un ouvert pour tout $A \in \mathbb{R}^2$.

(iii) Tout produit de deux intervalles ouverts est un ouvert.

Preuve : Les trois assertions précédentes se prouvent de la même manière : on se donne un point A dans l'ouvert candidat Ω étudié et on cherche un réel $r > 0$ pour lequel $\mathcal{B}(A, r) \subset \Omega$.

Je me contenterai ici d'une preuve graphique :

(i) $r = \dfrac{\rho - AB}{2}$. (ii) $r = \dfrac{AB - \rho}{2}$. (iii) $r = \min\{\rho, \rho'\}$



Remarques :

1. Soient $C \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. La boule fermée $\mathcal{B}_f = \{M \in \mathbb{R}^2, \quad CM \leqslant r\}$ n'est pas un ouvert.
2. Il existe des parties ni ouvertes ni fermées comme $A = [0, 1[\times[0, 1[$.

Exercice 3 (Topologie) : Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles ouvertes ?

1. Le demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \, y > 0\}$.
2. Une boule ouverte.
3. Une droite.
4. L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| < 1 \text{ et } |y| < 1\}$.
5. $\mathbb{Z}^2$.

III Continuité

III.1 Limite

Définition 7 (Limite (finie) en un point) : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$, $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que f *admet une limite* ℓ *en* M_0 si :

- $\forall \, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \, \exists \, \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \, \forall \, (x, y) \in \Omega, \, \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \alpha \implies |f(x, y) - \ell| < \varepsilon.$

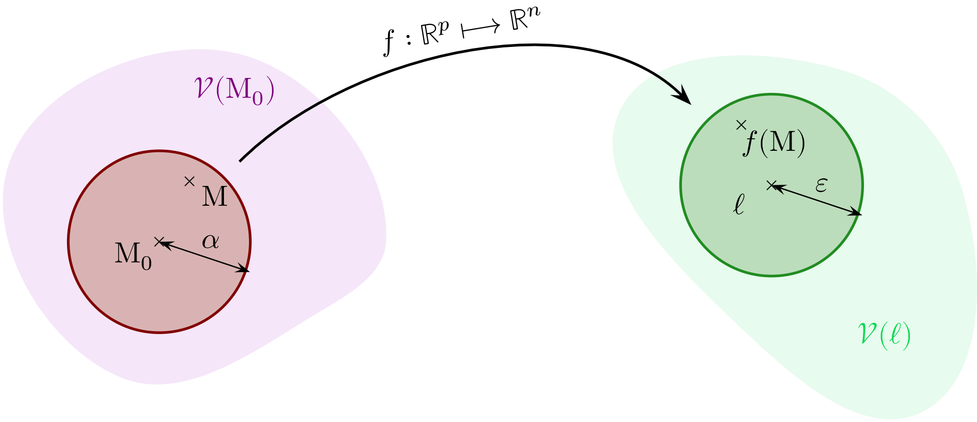


Figure XXXIV.36 – Cas général d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

- $\forall\,\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\,\alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\,M \in \Omega,\ M_0M < \alpha \implies |f(M) - \ell| < \varepsilon.$
- $\forall\,V_\ell \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\ell),\ \exists\,V_{M_0} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(M_0),\ \forall\,M \in \Omega \cap V_{M_0},\ f(M) \in V_\ell.$

On note alors $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = \ell$ ou $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell.$

La plupart des résultats qu'on a démontrés pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont conservés :

— unicité de la limite,
— caractère localement borné,
— opérations (combinaison linéaire, produit, inverse, composition avec une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$),
— compatibilité/ou pas avec les inégalités larges/strictes,
— théorème d'encadrement, ...

Les preuves sont faciles à faire, il suffit de remplacer les valeurs absolues dans l'ensemble de départ par des distances dans $\mathbb{R}^2$

Remarque : On aurait pu définir aussi des limites de valeurs $+\infty$ ou $-\infty$, mais nous n'en aurons pas dans ce chapitre.

ATTENTION

Faire tendre $M = (x\,;y)$ vers $A = (x_0\,;y_0)$ ne revient pas à faire tendre x vers x_0 puis y vers y_0 ou le contraire.

Le point M peut se rapprocher de A de bien des manières, il n'est pas obligé d'y aller en ligne droite selon $\vec{\imath}$ ou $\vec{\jmath}$ et c'est bien là le problème !

Exemple 6 : Considérons la fonction définie par

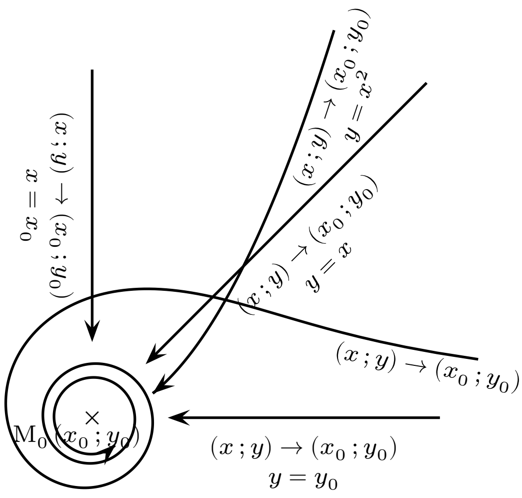
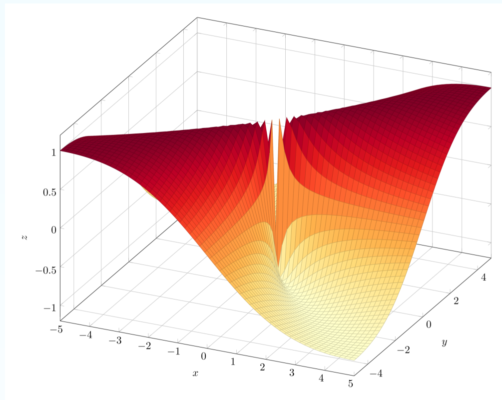


Figure XXXIV.37 – Différentes manières de tendre vers un point dans $\mathbb{R}^2$.

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,;0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\,;y) & \longmapsto & \dfrac{2xy}{x^2+y^2} \end{array}$$



Il est clair que :

- $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$

  et

- $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0.$

Mais nous allons voir que f N'a PAS de limite en $(0\,;0)$. Cela se visualise assez bien, mais cela se montre aussi assez bien en coordonnées polaires $(r\,;\theta)$.

On sait que tout point $\mathrm{M}\,(x\,;y)$ de $\mathbb{R}^2$ peut être écrit sous la forme $(r\cos\theta\,;r\sin\theta)$ pour un certain $(r\,;\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dit couple de coordonnées polaires de M.

Pour tout $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,;0)\}$ de coordonnées polaires $(r\,;\theta)$, on a :

$$f\,(x\,;y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2r\cos(\theta)\times 2r\sin(\theta)}{r^2} = \sin(2\theta), \text{ donc } f \text{ ne dépend que de la variable } \theta.$$

Par conséquent, si $(x\,;y)$ tend vers $(0\,;0)$ en maintenant constant l'angle θ, $(x\,;y)$ tend vers le réel $\sin(2\theta)$ pour ce θ fixé.

On obtient ainsi des limites différentes selon la manière dont on fait tendre $(x\,;y)$ vers $(0\,;0)$, donc f ne peut avoir de limite en $(0\,;0)$.

Exercice 4 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}.$$

Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$ et que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Correction :

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{y^2+(1-y/x)^2} = \frac{\lim_{y\to 0} y^2}{\lim_{y\to 0} y^2+(1-y/x)^2} = \frac{0}{1} = 0$$

De même $\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$.

D'autre part, $f(x,x) = \dfrac{x^4}{x^4} = 1$ d'où $\lim_{x\to 0} f(x,x) = 1$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ne peut pas exister.

Proposition 2 (Caractérisation séquentielle de la limite) : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$, $\mathrm{M}_0(x_0, y_0) \in \Omega$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell \iff$ Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant respectivement vers x_0 et y_0, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = \ell$.

Comme dans le cas des fonctions à une variable, on se sert surtout de la contraposée de la première implication *i.e.* si on peut trouver deux couples de suites (x_n, y_n) et (x'_n, y'_n) ayant les même limites mais pour lesquelles $\lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(x'_n, y'_n)$ alors f ne peut avoir de limite au point considéré ou encore moins être continue (*confer* paragraphe (III.2)).

Exemple 7 : Reprenons la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,;0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\,;y) & \longmapsto & \dfrac{2xy}{x^2+y^2} \end{array}$ de l' exemple (6) .

- $\lim_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\,;\dfrac{1}{n}\right) = 1$.
- $\lim_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\,;0\right) = 0 \neq 1$.

Ici aussi, la fonction f ne peut avoir de limite en $(0,0)$.

III.2 Continuité

Définition 8 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.

On dit que f *est continue en* $\mathrm{M}_0(x_0, y_0) \in \Omega$ si $\lim_{\mathrm{M}\to\mathrm{M}_0} f(\mathrm{M}) = f(\mathrm{M}_0)$ *i.e.* si :

- $\forall\,\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\,\alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\,(x,y) \in \Omega,\ \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \alpha \implies |f(\mathrm{M}) - f(\mathrm{M}_0)| < \varepsilon$.
- $\forall\,\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\quad \exists\,\alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\,\mathrm{M} \in \Omega,\ \mathrm{M}_0\mathrm{M} < \alpha \implies |f(\mathrm{M}) - f(\mathrm{M}_0)| < \varepsilon$.
- $\forall\,\mathrm{V}_{f(\mathrm{M}_0)} \in \mathscr{V}_{\mathbb{R}}(f(\mathrm{M}_0)),\quad \exists\,\mathrm{U}_\mathrm{V} \in \mathscr{V}_{\mathbb{R}^2}(\mathrm{M}_0),\ \forall\,\mathrm{M} \in \Omega \cap \mathrm{U}_\mathrm{V},\ f(\mathrm{M}) \in \mathrm{V}_{f(\mathrm{M}_0)}$.

On dit que f est *continue sur* Ω lorsqu'elle est continue en tout point de Ω.

On note $\mathscr{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$ leur ensemble.

On notera aussi, suivant le point de vue, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

En particulier, si $\varphi : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un ouvert contenant $f(\Omega)$ alors $\varphi \circ f$ est continue sur Ω.

ATTENTION

Ici aussi, pour montrer qu'une fonction de deux variables $(x\,;y) \longmapsto f(x\,;y)$ est continue en $\mathrm{A}(x_0\,;y_0)$, il ne suffit pas de montrer que les fonctions d'UNE variable $x \longmapsto f(x\,;y_0)$ et $y \longmapsto f(x_0\,;y)$ sont continues respectivement en x_0 et y_0.

De nouveau, $(x\,;y)$ peut s'approcher de A de bien des manières, il n'est pas obligé de le faire « à x fixé » ou « à y fixé ».

Contre-Exemple 8 : La fonction $(x\,;y) \longmapsto \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ de l' exemple (6) précédent n'est pas prolongeable par continuité en $(0\,;0)$, alors que fonctions $x \longmapsto f(x\,;0)$ et $y \longmapsto f(0\,;y)$, identiquement nulles, le sont en 0.

Exemples 9 :

- Les fonctions $(x\,;y) \longmapsto x$ et $(x\,;y) \longmapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

  A fortiori, par produit et combinaison linéaire, toute fonction polynomiale de deux variables est continue sur $\mathbb{R}^2$.

  Preuve : Démontrons, par exemple, que $f : (x\,;y) \longmapsto x$ est continue en $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A}) \in \mathbb{R}^2$.

  Soit $\varepsilon > 0$.

  Pour tout $\mathrm{M}(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(\mathrm{M}) - f(\mathrm{A})| = |x - x_\mathrm{A}| \leqslant \sqrt{(x-x_\mathrm{A})^2 + (y-y_\mathrm{A})^2} = \mathrm{AM}$.

  En posant $\alpha = \varepsilon$, on a bien $\mathrm{AM} < \alpha \implies |f(\mathrm{M}) - f(\mathrm{A})| \leqslant \varepsilon$.

  La fonction f est donc continue en tout point $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^2$ donc sur $\mathbb{R}^2$.

- La norme $\vec{v} \longmapsto \|\vec{v}\|$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

  Preuve : Simple composition de la fonction polynomiale $(x\,;y) \longmapsto x^2+y^2$ continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et de la fonction (à une variable) $t \longmapsto \sqrt{t}$ continue sur $\mathbb{R}_+$.

- Soient I et J deux intervalles, $\varphi \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ et $\psi \in \mathscr{C}^0(\mathrm{J}, \mathbb{R})$.

  Les fonctions $(x\,;y) \longmapsto \varphi(x) + \psi(y)$ et $(x\,;y) \longmapsto \varphi(x)\psi(y)$ sont continues sur $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$.

  Preuve : $(x\,;y) \longmapsto x$ est continue sur $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$ à valeurs dans I et φ l'est sur I, donc $(x\,;y) \longmapsto \varphi(x)$ est continue sur $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$ par composition.

  Même raisonnement pour $(x\,;y) \longmapsto \psi(y)$.

  On conclut à l'aide des théorèmes sur les sommes et produits de fonctions continues.

En résumant,

Proposition 3 : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont continues en (x_0, y_0), alors :

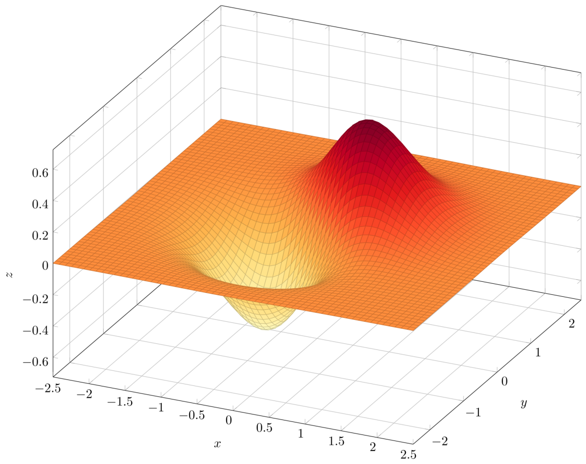
- $f + g$ est continue en (x_0, y_0)
- λf est continue en (x_0, y_0)
- fg est continue en (x_0, y_0)

- $|f|$ est continue en (x_0, y_0)
- Si $g(x_0, y_0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en (x_0, y_0)

On retrouve que toute combinaison linéaire de fonctions continues est une fonction continue.

Exercice 5 : Étudier la continuité $f : (x, y) \longmapsto \sin(x + y)e^{-(x^2+y^2)}$.

Correction :



Proposition 4 : Si f est continue en (x_0, y_0) alors :

- $f_{y_0} : x \longmapsto f(\cdot, y_0)$ est continue en x_0 ;
- $f_{x_0} : y \longmapsto f(x_0, \cdot)$ est continue en y_0.

ATTENTION

La réciproque est fausse !

Il suffit de considérer encore la fonction $f : (x, y) \longmapsto \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ de l' exemple (6) qui n'est pas continue en $(0, 0)$ alors que ses deux applications partielles $x \longmapsto f(x, 0)$ et $y \longmapsto f(0, y)$, toutes deux identiquement nulles, le sont.

IV Différentiabilité de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

La théorie de la « dérivation » des fonctions en général, pas forcément de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est appelée *calcul différentiel*.

Je mets des guillemets parce que, comme nous allons le voir, il est beaucoup plus compliqué et subtil de « dériver » une fonction de plusieurs variables qu'une fonction d'une seule variable.

IV.1 Dérivées partielles

Définition 9 (Dérivée directionnelle) : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction, $\mathrm{A}(x_0, y_0) \in \Omega$ et $\vec{v}(h, k) \in \mathbb{R}^2$.

On dit que f *est dérivable en* A *dans la direction* $\vec{v}$ si la limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathrm{A}+t\vec{v}) - f(\mathrm{A})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+th, y_0+tk) - f(x_0, y_0)}{t} \text{ existe et est finie.}$$

Le cas échéant, on appelle *dérivée de f en* A dans la direction $\vec{v}$ ce réel noté $\mathrm{D}_{\vec{v}} f(\mathrm{A})$.

Dire que f est dérivable en A dans la direction $\vec{v}$ revient à dire que la fonction $\mathrm{F} : t \longmapsto f(\mathrm{A}+t\vec{v})$ est dérivable en 0 et on a alors :

$$\mathrm{D}_{\vec{v}} f(\mathrm{A}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathrm{A}+t\vec{v}) - f(\mathrm{A})}{t} = \mathrm{F}'(0).$$

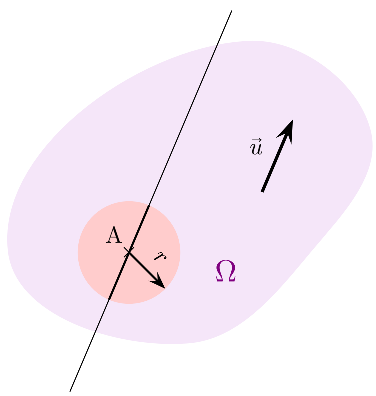


Figure XXXIV.38 – Droite de $\mathbb{R}^2$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}$. On parle de *droite affine*.

Remarques :

— Si $\vec{v} = \vec{0}$, la fonction $t \longmapsto f(\mathrm{A}+t\vec{v}) = f(\mathrm{A})$ est définie et constante sur $\mathbb{R}$ tout entier, donc dérivable en 0 avec $\mathrm{D}_{\vec{0}} f(\mathrm{A}) = 0$.

— Pour $\vec{v}$ non nul, la définition précédente n'a de sens que parce que la fonction $t \longmapsto f(\mathrm{A}+t\vec{v})$ est définie au voisinage de 0. Cela découle du caractère ouvert de Ω, qui contient $\mathrm{B}(\mathrm{A}, r)$ pour un certain $r > 0$.

Posons en effet $\alpha = \dfrac{r}{\|\vec{v}\|}$. Pour tout $t \in]-a\,;a[$, on :

$$d(\mathrm{A}, \mathrm{A}+t\vec{v}) = \|t\vec{v}\| = |t| \times \|\vec{v}\| < \alpha\,\|\vec{v}\| = r \implies \mathrm{A}+t\vec{v} \in \mathrm{B}(\mathrm{A}, r) \subset \Omega.$$

La fonction $t \longmapsto f(\mathrm{A}+t\vec{v})$ est ainsi définie sur $]-a\,;a[$.

Que représente géométriquement la dérivée de f en A dans la direction $\vec{v}$?

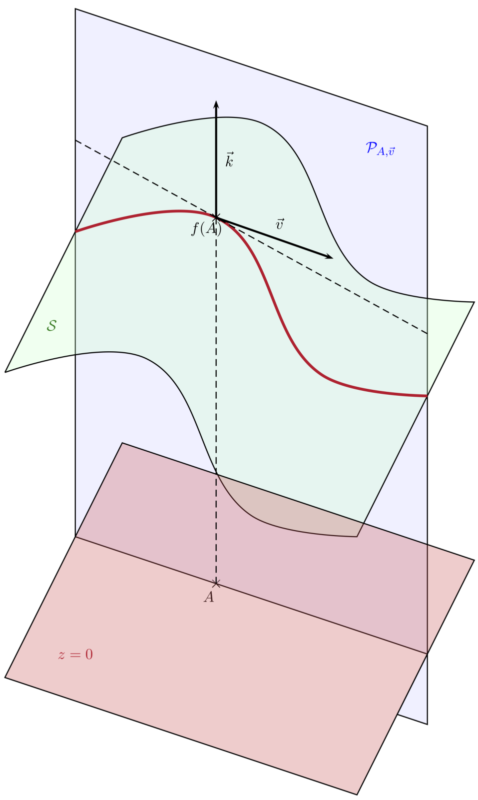
1 Considérez dans $\mathbb{R}^3$ le graphe $\mathscr{S}$ de f :

$$\mathscr{S} = \Big\{ (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x\,;y) \in \Omega \text{ et } z = f(x\,;y) \Big\}.$$

2 Coupez-le sans ménagement par le plan « vertical » $\mathscr{P}_{\mathrm{A},\vec{v}}$ passant par A dirigé par les deux vecteurs orthogonaux $\vec{v}$ et $\vec{k}$.

En toute rigueur, $\vec{v}$ appartient à $\mathbb{R}^2$, mais nous avons identifié $\mathbb{R}^2$ au plan d'équation $z = 0$ de $\mathbb{R}^3$.

L'intersection $\mathscr{S} \cap \mathscr{P}_{A,\vec{v}}$ est une courbe $\mathscr{C}$ du plan $\mathscr{P}_{A,\vec{v}}$.



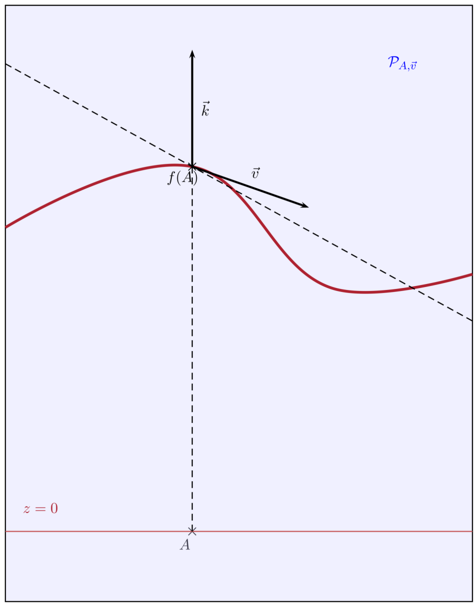


Figure XXXIV.39 – Dérivée d'une fonction suivant une direction.

3 Oubliez désormais le reste de l'espace et concentrez-vous sur $\mathscr{P}_{A,\vec{v}}$ et $\mathscr{C}$.

Munissez $\mathscr{P}_{A,\vec{v}}$ du repère $(A, \vec{v}, \vec{k})$. La courbe $\mathscr{C}$ n'est alors rien de plus que le graphe de la fonction $t \longmapsto f(A + t\vec{v})$ et, s'il existe, $D_{\vec{v}}f(A)$ est son nombre dérivé en 0 dans la base $(\vec{v}, \vec{k})$ *i.e.* la pente de sa tangente en 0.

Notez bien ici que $\vec{v}$ n'est pas forcément unitaire, il faut en tenir compte quand on se représente la pente. [1]

La définition suivante n'est qu'un cas particulier de la précédente.

Définition 10 (Dérivées partielles) : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et $A(x_0, y_0) \in \Omega$.

- S'il existe, le réel $D_{\vec{i}}f(A)$ est appelé *dérivé partiel par rapport à x de f en* $A(x_0, y_0)$.

  On le note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ou, plus simplement, $\partial_x f(A)$.
- S'il existe, le réel $D_{\vec{j}}f(A)$ est appelé *dérivé partiel par rapport à y de f en* $A(x_0, y_0)$.

  On le note $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ou, plus simplement, $\partial_y f(A)$.

[1]. Si l'on peut tous descendre une colline suivant la même direction on n'est pas obligé de le faire à la même vitesse !

Une fonction f d'une seule variable possède une seule dérivée f' quand elle est dérivable. Il arrive qu'on note $\dfrac{df}{dx}$ cette dérivée.

ATTENTION

Pour une fonction d'une seule variable, la notation $\dfrac{df}{dx}$ s'écrit avec des « d » droits. Pour une fonction de deux variables, les notations $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ s'écrivent au contraire avec des « d » ronds. C'est comme ça ...

Par ailleurs, quand on évalue $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $(x\,;y)$, le résultat se note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x\,;y)$ et non $\dfrac{\partial f(x\,;y)}{\partial x}$.

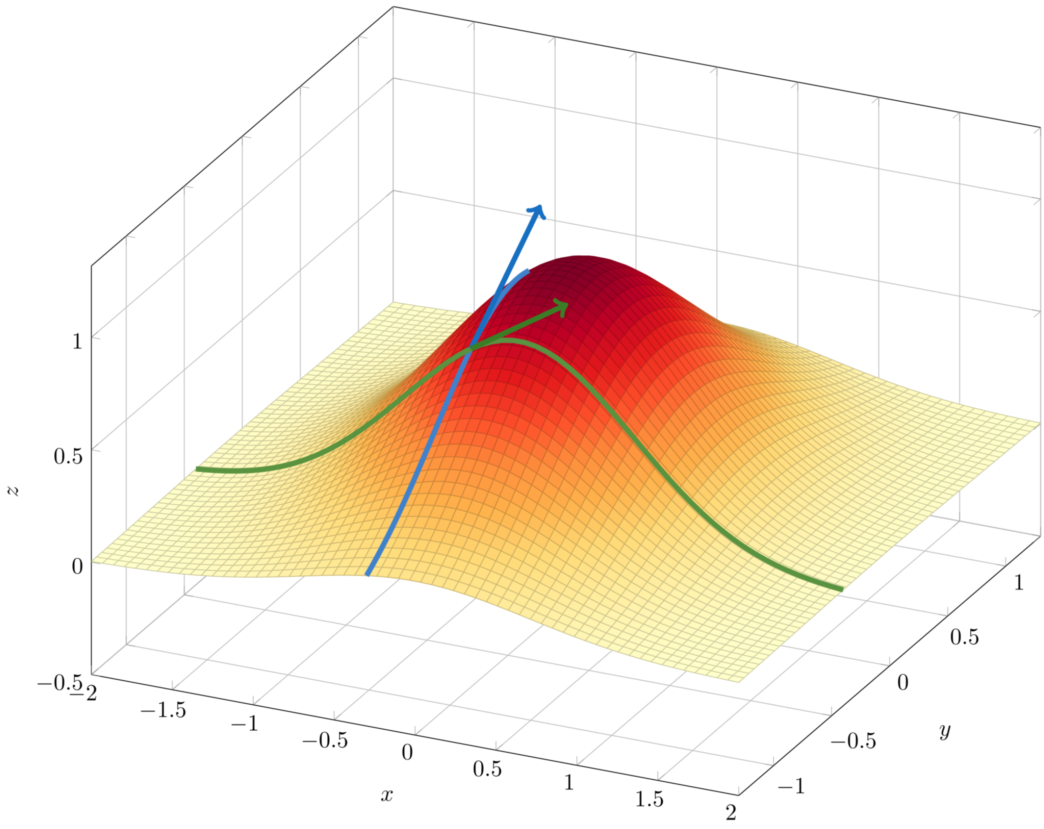


Figure XXXIV.40 – Dérivée partielle suivant les vecteurs de base.

Le calcul concret des dérivées partielles est très facile.

En effet, avec des notations évidentes :

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_{\vec{i}}f(\mathrm{A}) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathrm{A}+t\vec{i})-f(\mathrm{A})}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\,;y_0)-f(x_0\,;y_0)}{t}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(\underbrace{x_0,y_0}_{\mathrm{A}}) = f'_{y_0}(x_0).\end{aligned}$$

Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{A})$ revient à fixer y à la valeur y_0 dans $f(x\,;y)$ et à dériver par rapport à x au sens usuel.

Pour la même raison, on obtient $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en dérivant $f(x\,;y)$ par rapport à y à x fixé en x_0 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{\vec{j}} f(\mathrm{A}) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathrm{A}+t\vec{j})-f(\mathrm{A})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0\,;y_0+t)-f(x_0\,;y_0)}{t} \\
&= \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0} = \frac{\partial f}{\partial y}(\underbrace{x_0,y_0}_{\mathrm{A}}) = f'_{x_0}(y_0).
\end{aligned}$$

Exemple 10 : La fonction $(x\,;y) \longmapsto \mathrm{e}^{xy^2}$ possède des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ et,

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x\,;y) = y^2\,\mathrm{e}^{xy^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x\,;y) = 2xy\,\mathrm{e}^{xy^2}.$$

ATTENTION

L'existence des deux dérivées partielles de f n'entraîne pas la continuité de f.

Contre-Exemple 11 : Considérer encore la fonction de l' exemple (6) :

$$f : (x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Le résultat qui suit n'est qu'une adaptation au cas des fonctions de deux variables de résultats bien connus pour les fonctions d'une seule variable.

Nous n'avons rien à démontrer car les dérivées partielles ne sont jamais que des dérivées par rapport à une seule variable, l'autre étant gelée.

Théorème 5 (Opérations sur les dérivées partielles) :

Combinaison linéaire, produit, inverse : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions.

Si f et g possèdent des dérivées partielles sur Ω, il en est de même de toute combinaison linéaire de f et g et du produit fg, mais aussi de l'inverse $\dfrac{1}{f}$ si f ne s'annule pas.

En outre, pour tous $k \in \{x,y\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\partial_k f(\lambda f+g) = \lambda\partial_k f + \partial_k g, \quad \partial_k(fg) = g\partial_k f + f\partial_k g \quad \text{et} \quad \partial_k\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{\partial_k f}{f^2}.$$

Composition : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, I un intervalle, $f : \Omega \longmapsto \mathrm{I}$ et $\varphi : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions avec $f(\Omega) \subset \mathrm{I}$.

Si f possède des dérivées partielles sur Ω et si φ est dérivable sur I, alors $\varphi\circ f$ possède des dérivées partielles sur Ω et, pour tout $k \in \{x,y\}$:

$$\boxed{\partial_k(\varphi\circ f) = \partial_k f \times \varphi'\circ f.}$$

Exercice 6 : Soit $f : (x,y) \longmapsto x^2\sin(xy)$.

1. Déterminer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
2. On note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Déterminer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Un commentaire ?

IV.2 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition 11 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.

On dit que f est *de classe* $\mathscr{C}^1$ si ses dérivées partielles existent et sont continues sur Ω.

On note $\mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ leur ensemble.

Méthode 1 (Montrer qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$) :
Pour qu'une fonction f, à deux variables, soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω, il suffira donc :

1. de montrer ou vérifier que Ω est bien un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. montrer que, à y fixé, la fonction (à une variable) $x \longmapsto f(x\,;y)$ est dérivable sur un ouvert I_y tel que $\mathrm{I}_y \times \{y\} \subset \Omega$.
3. montrer que, à x fixé, la fonction (à une variable) $y \longmapsto f(x\,;y)$ est dérivable sur un ouvert I_x tel que $\{x\} \times \mathrm{I}_x \subset \Omega$.
4. les fonctions (à deux variables) $(x\,;y) \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x\,;y)$ et $(x\,;y) \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x\,;y)$ sont continues sur Ω.

Exemples 12 :

- $\boxed{\text{Les fonctions } (x\,;y) \longmapsto x \text{ et } (x\,;y) \longmapsto y \text{ sont de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$

  A fortiori, par produit et combinaison linéaire, toute fonction polynomiale de deux variables est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

  Preuve : Montrons-le pour $(x\,;y) \longmapsto x$.

  Pour tout $y \in \mathbb{R}$ (variable gelée), la fonction $x \longmapsto f(x\,;y) = x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f possède une première dérivée partielle sur $\mathbb{R}^2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x\,;y) = 1$ pour tout $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

  De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (variable gelée), la fonction $y \longmapsto f(x\,;y) = x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f possède une deuxième dérivée partielle sur $\mathbb{R}^2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x\,;y) = 0$ pour tout $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

  Finalement, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ étant continues sur $\mathbb{R}^2$ car constantes, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

- $\boxed{\text{La norme } \vec{v} \longmapsto \|\vec{v}\| \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\vec{0}\right\} !}$

  Preuve : Tout d'abord, $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ est bien ouvert.

  Ensuite, la fonction polynomiale $(x\,;y) \longmapsto x^2 + y^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et la fonction $t \longmapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, $\vec{v} \longmapsto \|\vec{v}\|$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\vec{0}\right\}$.

  Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{\left\|\vec{0} + t\vec{i}\right\| - \left\|\vec{0}\right\|}{t} = \dfrac{|t|}{t}$, quantité qui n'a pas de limite quand t tend vers 0.

Donc $\vec{v} \longmapsto \|\vec{v}\|$ n'a pas de première dérivée partielle en 0.

Proposition 6 :

- Toute combinaison linéaire et tout produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ est de classe $\mathscr{C}^1$.
- L'inverse d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ qui ne s'annule pas aussi.
- Enfin, pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ et tout intervalle I, la composée $\varphi \circ f$ d'une fonction $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ avec $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$ et d'une fonction $\varphi \in \mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

Remarque : Il peut sembler curieux qu'on dispose d'une notion de continuité et d'une notion de classe $\mathscr{C}^1$, mais pas d'une notion intermédiaire de dérivabilité. Le chaînon manquant s'appelle la *différentiabilité* et ne figure pas au programme de PTSI.

Exercice 7 : Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur leur ensemble de définition, et calculer leurs dérivées partielles :

1. $(x\,;y) \longmapsto \begin{cases} xy\ln\left(x^2+y^2\right) & \text{si } (x\,;y) \neq (0\,;0) \\ 0 & \text{si } (x\,;y) = (0\,;0) \end{cases}$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. $(x\,;y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x\,;y) \neq (0\,;0) \\ 0 & \text{si } (x\,;y) = (0\,;0) \end{cases}$ sur $\mathbb{R}^2$.

Correction :

1. Tout d'abord, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ est bien ouvert en tant que produit de deux intervalles ouverts.

   Ensuite, les fonctions $(x\,;y) \longmapsto x$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ respectivement sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}$ donc $(x\,;y) \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ par composition.

   De même $(x\,;y) \longmapsto \ln(y)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ via les compositions des fonctions $(x\,;y) \longmapsto y$ et $y \longmapsto \ln(y)$ de classe $\mathscr{C}^1$ respectivement sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

   On conclut par produit.
2. Puisque $\left|\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|$ reste borné,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$$

   d'où f est continue en $(0,0)$.

   De même,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$$

d'où les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent, et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. En plus, en dehors de l'origine,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x,y)}{x} + xy\frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{f(x,y)}{x} + 4\frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(x,y)}{y} + xy\frac{\partial}{\partial y}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{f(x,y)}{x} + 4\frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Puisque

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = 0, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0,$$

il s'ensuit que

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(u,v) = 0, \quad \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(u,v) = 0,$$

d'où les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$.

IV.3 Développement limité à l'ordre 1

On admet le théorème suivant :

Théorème 7 (Formule de Taylor-Young) : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

La fonction f admet en tout point (x_0, y_0) de Ω un développement limité d'ordre 1 donné par :

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) = f(x_0,y_0) + h_1\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \underset{(h_1;h_2)\to(0,0)}{\mathrm{o}}(\|(h_1;h_2)\|).$$

Remarques :

— À rapprocher du DL_1 d'une fonction réelle

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h).$$

— La condition $(x_0+h_1, y_0+h_2) \in \Omega$ est vérifiée dès que $\|(h_1;h_2)\|$ car Ω est ouvert.

— $\underset{(h_1;h_2)\to(0,0)}{\mathrm{o}}(\|(h_1;h_2)\|)$ désigne une fonction négligeable devant $\|(h_1;h_2)\|$ *i.e.* qui peut s'écrire sous la forme $\|(h_1;h_2)\|\varepsilon(h_1;h_2)$ avec $\lim_{(h_1;h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1;h_2) = 0$.

— On remarquera que l'application

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{L}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (h_1;h_2) & \longmapsto & h_1\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{array}$$

est linéaire. On l'appellera la *différentielle de* f en $\mathrm{A}(x_0;y_0)$.

— En posant $(x;y) = (x_0+h_1, y_0+h_2)$ alors $(h_1;h_2) = (x-x_0, y-y_0)$ et la formule de Taylor-Young s'écrit :

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \underset{(h_1;h_2)\to(0,0)}{\mathrm{o}}(\|(x-x_0, y-y_0)\|).$$

— La formule de Taylor-Young montre que pour $\|(x-x_0, y-y_0)\|$ assez petit, l'accroissement $f(x,y)-f(x_0,y_0)$ peut-être approché « au premier ordre » par l'expression linéaire :

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

On écrit :

$$\boxed{f(x,y)-f(x_0,y_0)\simeq(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \text{ au voisinage de } (x_0,y_0).}$$

Corollaire 7.1 : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Toute fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω y est continue.

Preuve : Soit $\mathrm{A}(x_0,y_0)\in\Omega$.

– L'application polynomiale $(h\,;k)\longmapsto h\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+k\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ est continue en $(0,0)$ de limite nulle.
– L'application $(h\,;k)\longmapsto\|(h\,;k)\|$ est continue en $(0,0)$ de limite nulle.

D'après les théorèmes sur les sommes et les composées de fonctions continues, l'application

$$(h\,;k)\longmapsto f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+\|(h,k)\|\,\varepsilon\,(h\,;k)\,,$$

est de limite nulle en $(0,0)$ i.e. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

Donc f est continue en A quelconque de Ω donc sur Ω tout entier.

Exercice 8 : Soit $f:(x,y)\longmapsto x^2+y+xy$.

1. Calculer $f(x_0+h_1,y_0+h_2)$.
2. Reconnaître les différents termes du DL_1 de f en (x_0,y_0).

Correction :

$$\begin{aligned}f(x_0+h_1,y_0+h_2)&=(x_0+h_1)^2+(y_0+h_2)+(x_0+h_1)(y_0+h_2)\\&=(x_0^2+2x_0h_1+h_1^2)+(y_0+h_2)+(x_0y_0+x_0h_2+y_0h_1+h_1h_2)\end{aligned}$$

On cherche maintenant les parties linéaires en (h_1,h_2),

$$=\underbrace{x_0^2+y_0+x_0y_0}_{f(x_0,y_0)}+h_1(\underbrace{2x_0+y_0}_{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)})+h_2(\underbrace{1+x_0}_{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)})+\underbrace{h_1^2+h_1h_2}_{\underset{(h_1,h2)\to(0,0)}{o}(\|(h_1,h_2)\|)}$$

Effectivement, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=2x_0+y_0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=1+x_0$.

Et $\left|\dfrac{h_1^2+h_1h_2}{\|(h_1,h_2)\|}\right|=\left|\dfrac{h_1^2+h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right|=\left|\dfrac{h_1^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}+\dfrac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right|\leqslant\dfrac{h_1^2}{|h_1|}+\dfrac{|h_1h_2|}{|h_2|}\leqslant 2|h_1|\xrightarrow[(h_1,h2)\to(0,0)]{}0.$

V Gradient

V.1 Vecteur gradient

Alors que les dérivées partielles sont... justement partielles, le *gradient* d'une fonction f collecte des informations sur les variations de f dans les deux directions $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et constitue de ce point de vue notre première définition de ce qu'on pourrait avoir envie d'appeler « la dérivée de f ». Nous en donnerons bientôt une interprétation géométrique.

Reprenons le développement de Taylor-Young du théorème (7) :

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) = f(x_0,y_0) + \underbrace{h_1\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}_{\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}} + \underset{(h_1;h_2)\to(0,0)}{\mathrm{o}}\left(\|(h_1\,;h_2)\|\right).$$

Définition 12 (Gradient) : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et $\mathrm{A}(x_0,y_0) \in \Omega$.

Si f possède des dérivées partielles en A, on appelle *gradient de f en* A le vecteur de $\mathbb{R}^2$, noté $\overrightarrow{grad} f(\mathrm{A})$ ou $\vec{\nabla} f(\mathrm{A})$, défini par :

$$\vec{\nabla} f(\mathrm{A}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{A})\,;\frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{A})\right) \iff \vec{\nabla} f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,;\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right).$$

Remarques : $\vec{\nabla} f$ se lit « nabla f » et c'est donc une application (vectorielle certes !) de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Écrit plus brièvement, on a :

Corollaire 7.2 : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $a(x_0,y_0) \in \Omega$. $\forall\, h\,(h_1\,;h_2)$ « assez petit », on a :

$$f(a+h) = f(a) + \vec{\nabla} f(a)\cdot h + \underset{h\to(0,0)}{\mathrm{o}}(h)\,.$$

Rapidement et avec quelques abus de notations, on retrouve :

Proposition 8 (Opérations sur les gradients) :

- $\vec{\nabla}(\lambda f + g) = \lambda\vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$.
- $\vec{\nabla}(f\times g) = g\vec{\nabla} f + f\vec{\nabla} g$.
- $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{1}{f^2}\vec{\nabla} f$.
- $\vec{\nabla}(\varphi\circ f) = \varphi'\circ f \times \vec{\nabla} f$.

Théorème 9 : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $A(x_0, y_0) \in \Omega$.

Pour tout vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2)$ non nul de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) &= u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + u_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ &= \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}. \end{aligned}$$

En particulier,

— Le développement de Taylor-Young peut donc aussi s'écrire :

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = f(x_0, y_0) + \partial_{(h_1;h_2)} f(x_0, y_0) + \underset{(h_1;h_2)\to(0,0)}{\mathrm{o}}(\| (h_1\,; h_2) \|).$$

— Le théorème (9) garantit l'existence de dérivées dans **toutes** les directions que l'on peut calculer facilement à partir des dérivées partielles ou du gradient.

Preuve : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathrm{R})$, $A(x_0, y_0) \in \Omega$ et $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,; 0)\}$.

Soit $t \in \mathbb{R}^*$ tel que $A + t\vec{u} \in \Omega$. En particulier $\lim_{t\to 0} t\,\vec{u} = \vec{0}$.

D'après la formule de Taylor-Young, il existe $\varepsilon : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ telle que $\lim_{\vec{u}\to\vec{0}} \varepsilon(\vec{u}) = 0$ et,

$$f(A + \vec{v}) \underset{\vec{v}\to\vec{0}}{=} f(A) + \langle \vec{\nabla} f(A) | \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|\, \varepsilon(\vec{v}) \qquad \text{(avec quelques abus de notation)}$$

Par composition, on peut poser $\vec{v} = t\,\vec{u}$,

$$f(A + t\,\vec{u}) \underset{t\to 0}{=} f(A) + \langle \vec{\nabla} f(A) | t\,\vec{u} \rangle + \|t\,\vec{u}\|\, \varepsilon(t\,\vec{u})$$

Par linéarité à droite du produit sclaire et homogénéité de la norme euclidienne,

$$\underset{t\to 0}{=} f(A) + t\,\langle \vec{\nabla} f(A) | \vec{u} \rangle + t^2\, \|\vec{u}\|\, \varepsilon(t\,\vec{u})$$

Comme $t \neq 0$,

$$\frac{f(A + t\,\vec{u}) - f(A)}{t} \underset{t\to 0}{=} \langle \vec{\nabla} f(A) | \vec{u} \rangle \pm |t|\, \|\vec{u}\|\, \varepsilon(t\,\vec{u}) \xrightarrow[t\to 0]{} \langle \vec{\nabla} f(A) | \vec{u} \rangle.$$

La fonction f admet donc une dérivée en A suivant la direction $\vec{u}$ et

$$D_{\vec{u}} f(A) = \vec{\nabla}\, \langle f(A) | \vec{u} \rangle.$$

Par définition, une fonction de deux variables est de classe $\mathscr{C}^1$ quand elle possède des dérivées continues dans les deux directions privilégiées $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Remarque : Si on pose $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$, on retrouve :

$$\begin{cases} \partial_{\vec{i}} f(x_0, y_0) = 1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + 0 \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \partial_{\vec{j}} f(x_0, y_0) = 0 \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + 1 \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{cases}$$

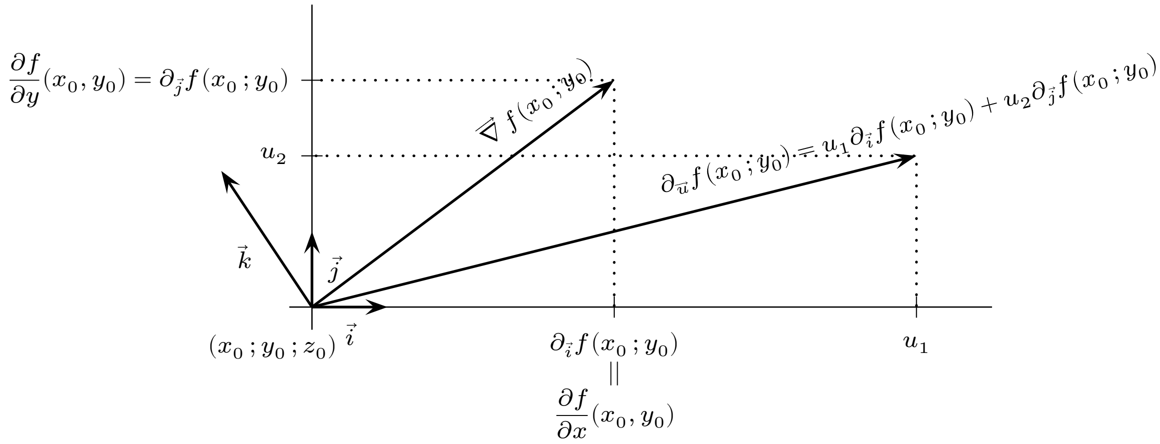


Figure XXXIV.41 – Dérivée suivant un vecteur.

Pour une fonction f d'une seule variable, vous savez depuis longtemps que le réel $f'(a)$ est la pente de la tangente de f en a.

Pour vous le faire comprendre, on vous a sans doute dit que « quand on avance de 1 vers la droite en abscisse, on monte de $f'(a)$ en ordonnée sur la tangente ».

La situation est la même pour une fonction f de deux variables. Au voisinage de $\mathrm{A}(x_0, y_0)$, le graphe de f a l'allure de son plan tangent et $\mathrm{D}_{\vec{u}} f(\mathrm{A})$ n'est jamais que la pente de ce plan dans la direction $\vec{v}$.

Le théorème (9) énonce que quand on avance de u_1 dans la direction $\vec{i}$ et de u_2 dans la direction $\vec{j}$, on monte de $u_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{A}) + u_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{A})$ dans la direction $\vec{k}$ sur le plan tangent.

Exercice 9 : Soit $f : (x\,;y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - x - \cos(y)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x\,;y) \neq (0\,;0) \\ \frac{1}{2} & \text{si } (x\,;y) = (0\,;0) \end{cases}$

Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0\,;0)$ puis déterminer $\overrightarrow{\nabla} f(0\,;0)$.

V.2 Plan tangent

Pour les fonctions de la variable réelle, si $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, pour tout $x_0 \in \mathrm{I}$, la formule de Taylor-Young s'écrit :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \mathrm{o}\,(x - x_0)\,.$$

Lorsqu'on écrit $f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ au voisinage de x_0, on approche ainsi localement la fonction f par la fonction affine

$$x \longmapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

On va étendre cette idée aux fonctions à deux variables :

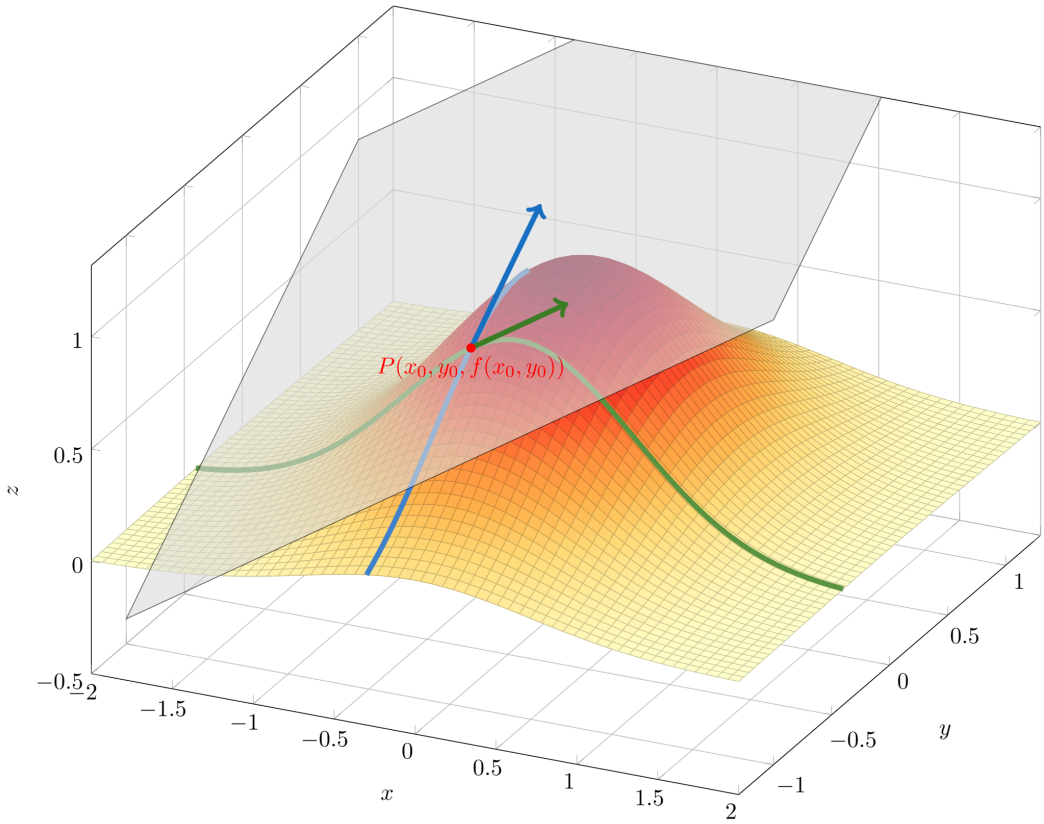


Figure XXXIV.42 – Plan tangent à $z = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ en $\mathrm{M}(x_0, y_0)$.

Théorème 10 : On munit l'espace $\mathbb{R}^3$ d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathrm{A}(x_0, y_0) \in \Omega$.

Le plan tangent à la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z = f(x, y)$ au point $\mathrm{M}\,(x_0\,; y_0\,; z_0)$ où $z_0 = f\,(x_0\,; y_0)$ a pour équation :

$$z - z_0 = (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \iff z - z_0 = \overrightarrow{\nabla}\, f\,(x_0\,; y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

Remarque : Résultat à rapprocher de l'équation de la tangente :

$$y = f(x_0) + (x - x_0)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0).$$

Nous savons depuis longtemps qu'une courbe suffisamment régulière ressemble localement à une droite. Sans surprise, toute surface suffisamment régulière ressemble localement à un plan.

Pour une fonction φ d'une seule variable, l'équation de la tangente en a est donnée par :

$$\varphi(x) - \varphi(a) = (x - a)\varphi'(a).$$

La situation est finalement la même pour les fonctions de deux variables.

Exercice 10 : Déterminer un développement limité à l'ordre 1 ainsi qu'une équation de plan tangent pour les fonctions suivantes :

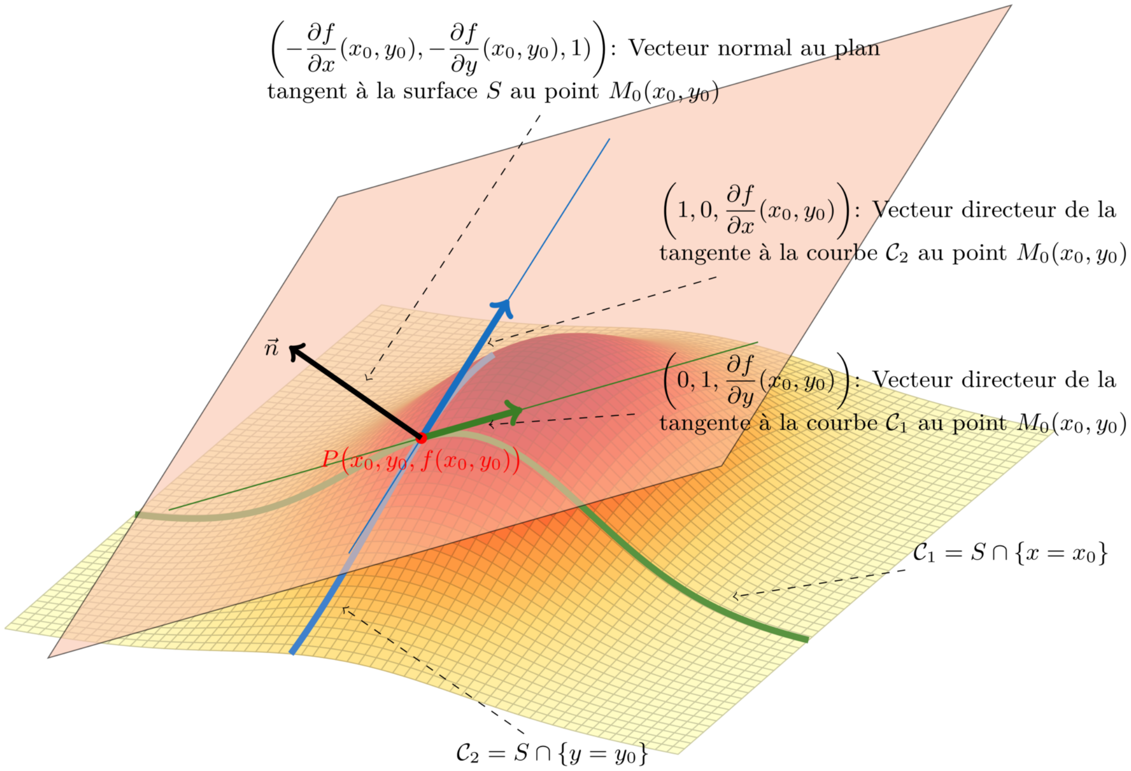


Figure XXXIV.43 – Plan tangent à une surface.

1. $(x\,;y) \longmapsto x^2 + y + xy$ en $(0\,;0)$.
2. $(x\,;y) \longmapsto xy\,\mathrm{e}^{\cos(x)}$ en $(0\,;0)$.

VI Dérivées partielles et composées

VI.1 Notion d'arc

Définition 13 : On appelle arc paramétré γ une fonction de $\mathbb{R}$ (ou d'une partie de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}^2$.

$$\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

On peut facilement se représenter un arc en cinématique : $\gamma(t)$ représentant la position d'un mobile au temps t dans le plan $\mathbb{R}^2$.

La fonction γ est de classe $\mathscr{C}^1$ si, et seulement si x et y sont de classe $\mathscr{C}^1$ et on définit alors

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$$

Dans l'interprétation cinématique, $\gamma'(t)$ représente la vitesse du mobile au temps t ou plutôt le vecteur vitesse instantané que l'on note habituellement $\vec{\gamma}'(t)$ laissant $\gamma(t)$ sans flèche pour rappeler leur vocation respective de vecteur vitesse et de vecteur position.

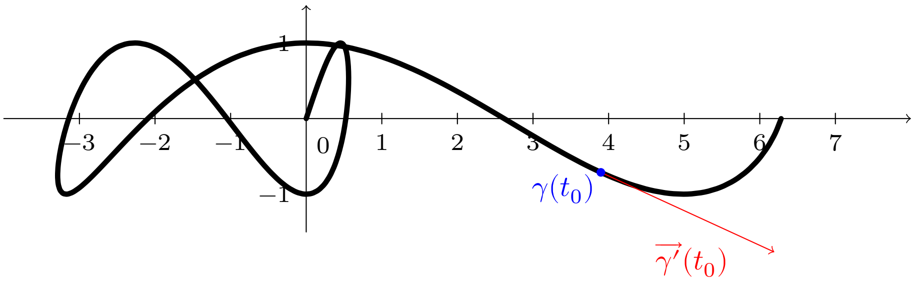


Figure XXXIV.44 – Trajectoire de $\gamma : t \longmapsto \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}$ sur $[0\,;2\pi]$.

Exercice 11 : Représenter l'arc défini par $\gamma : t \longmapsto (\cos(t), \sin(t))$.
Déterminer γ'.

VI.2 Règle de la chaîne

On va composer un arc par une fonction de deux variables :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad\gamma\quad} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{R} \\ t & & \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} & & f(x(t), y(t)) \end{array}$$

La fonction obtenue est une fonction réelle $f \circ \gamma : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$. Est-elle dérivable ? Et quelle est sa dérivée ?

Théorème 11 (Règle de la chaîne) : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

On considère $\gamma : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ telles que $\gamma(\mathrm{I}) \subset \Omega$ de sorte que $f \circ \gamma$ soit bien définie.

Si γ et f sont de classe $\mathscr{C}^1$, respectivement sur I et Ω alors $f \circ \gamma$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et on a :

$$\begin{aligned} \forall\, t \in \mathrm{I}, \quad (f \circ \gamma)'(t) &= x'(t)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \\ &= \overrightarrow{\nabla}\, f(\gamma(t)) \cdot \overrightarrow{\gamma'(t)}. \end{aligned}$$

Remarques :

— Écriture à rapprocher de $(f \circ \varphi)' = \varphi'(t) \times f'(\varphi(t))$.

— À la manière des physiciens mais abusivement pour nous, on retient souvent la règle de la chaîne sous la forme :
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

— La relation $(f \circ \gamma)'(t) = x'(t)\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) = \mathrm{D}_{\gamma'(t)} f(\gamma(t))$ montre que $(f \circ \gamma)'(t)$ est une dérivée directionnelle de f, en l'occurrence la dérivée de f en $\gamma(t)$ dans la direction $\overrightarrow{\gamma'(t)}$.

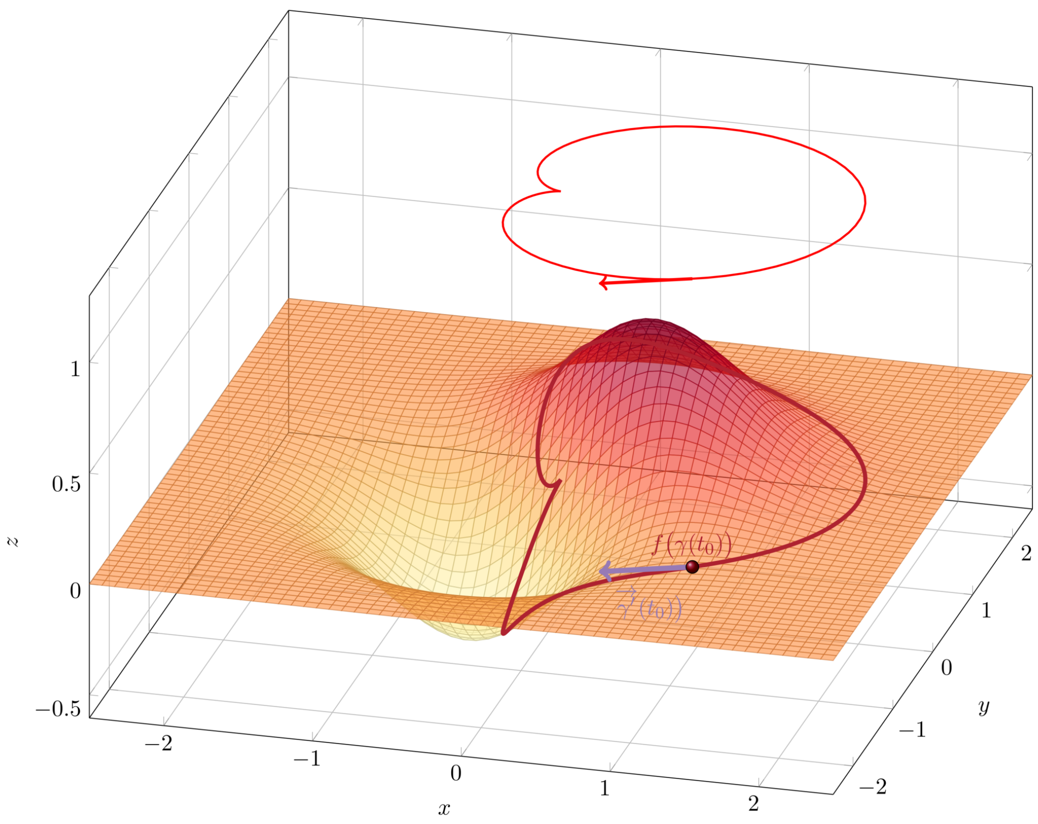


Figure XXXIV.45 – Cardioïde d'équation $\gamma : t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(t)(1+\cos(t)) \\ \sin(t)(1+\cos(t)) \end{pmatrix}$ tracée sur la surface $f : (x\,;y) \longmapsto (x+y)\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

La figure (XXXIV.45) illustre le phénomène. Le mobile γ évolue dans le plan $\mathbb{R}^2$, mais on peut s'intéresser à sa projection verticale sur le graphe de f. Le résultat est un nouvel arc paramétré, à trois dimensions cette fois et entièrement contenu dans le graphe de f. Sur la figure (XXXIV.45), la pente de la droite en pointillé dans le repère $\left(\overrightarrow{\gamma(t)}, \overrightarrow{\gamma'(t)}, \vec{k}\right)$ vaut à la fois $(f \circ \gamma)'(t)$ et $\mathrm{D}_{\gamma'(t)} f(\gamma(t))$.

On peut généraliser la règle de la chaîne. Le théorème qui suit n'est rien de plus qu'une nouvelle application de la règle de la chaîne. On y manipule cette fois des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et, de nouveau, la dérivée d'une telle fonction se calcule composante par composante.

Théorème 12 : Soient D un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\phi, \psi : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur D.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

Soit $\Gamma : \begin{array}{ccc} \mathrm{D} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \longmapsto & (\phi(u,v), \psi(u,v)) \end{array}$ telle que $\Gamma(\mathrm{D}) \subset \Omega$ de sorte que $f \circ \Gamma$ soit bien définie.

Alors $\mathrm{F} = f \circ \Gamma$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D et on a :

$$\mathrm{F} : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xmapsto{\ \Gamma\ } & \mathbb{R}^2 & \xmapsto{\ \ f\ \ } & \mathbb{R} \\ (u,v) & & (\phi(u,v), \psi(u,v)) & & f\Big(\phi(u,v), \psi(u,v)\Big) \end{array}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\Gamma(u,v))\,\dfrac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\Gamma(u,v))\,\dfrac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) \\[2ex] \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\Gamma(u,v))\,\dfrac{\partial \phi}{\partial v}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\Gamma(u,v))\,\dfrac{\partial \psi}{\partial v}(u,v). \end{cases}$$

Remarque : On peut à nouveau retenir simplement [2] :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$$

en travaillant à la physicienne, et en notant :

$$(u,v) \longmapsto (\underbrace{\phi(u,v)}_{x}, \underbrace{\psi(u,v)}_{y}) \longmapsto f(\phi(u,v),\psi(u,v))$$

Exercice 12 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Calculer les dérivées partielles de :

$$g(x,y) = f(x+y), \qquad h(x,y) = f(x^2+y^2), \qquad k(x,y) = f(xy).$$

Correction :

- $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f'(x+y)$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = f'(x+y)$
- $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 2xf'(x^2+y^2)$
- $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 2yf'(x^2+y^2)$
- $\dfrac{\partial k}{\partial x}(x,y) = yf'(xy)$
- $\dfrac{\partial k}{\partial y}(x,y) = xf'(xy)$

VI.3 Interprétation graphique du gradient

Proposition 13 : On se place dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ orthonormé du plan.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soient $\gamma : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ telles que $\gamma(\mathrm{I}) \subset \Omega$ de sorte que $f \circ \gamma$ soit bien définie.

Si $f \circ \gamma$ est une ligne de niveau alors la dérivée de γ est orthogonale au gradient de f en tout point de celle-ci :

$$\forall\, t \in \mathrm{I},\ f(\gamma(t)) = k \in \mathbb{R} \implies \vec{\nabla} f(\gamma(t)) \cdot \overrightarrow{\gamma'(t)} = 0.$$

Preuve : *D'après la règle de la chaîne,*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad (f \circ \gamma)'(t) = \left\langle \vec{\nabla} f(\gamma(t)) \mid \gamma'(t) \right\rangle$$

[2]. abusivement !

Or, par construction, on a $\forall\, t \in \mathbb{R}, f(\gamma(t)) = $ constante Donc

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \left\langle \overrightarrow{\nabla} f(\gamma(t)) \mid \gamma'(t) \right\rangle = 0 \iff \overrightarrow{\nabla} f(\gamma(t)) \perp \gamma'(t).$$

Interprétation graphique : Les lignes de niveau sont orthogonales au gradient.

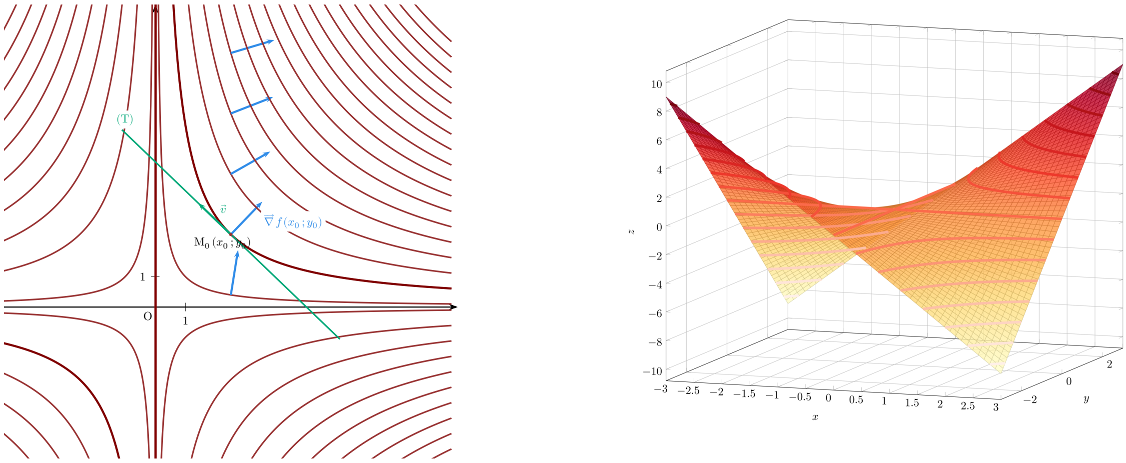


Figure XXXIV.46 – Lignes de niveau k de la surface $z = xy$.
La la ligne de niveau passant par le point $\mathrm{M}_0(x_0, y_0)$ a pour équation $xy = k$ où $k = x_0 y_0$.
En ce point M_0 est dessiné un vecteur tangent $\vec{v}$ et la tangente à la ligne de niveau.
Le vecteur gradient est orthogonal à la ligne de niveau en ce point.

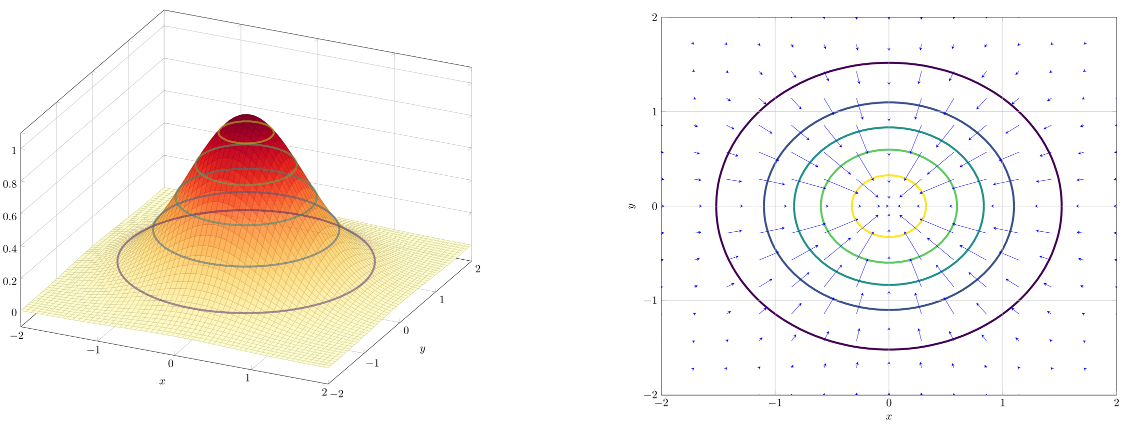


Figure XXXIV.47 – Graphe de $f : (x\,;y) \longmapsto \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$, son champ de gradients et quelques lignes de niveaux.

En physique, on retiendra que les équipotentielles sont orthogonales aux lignes de champ.

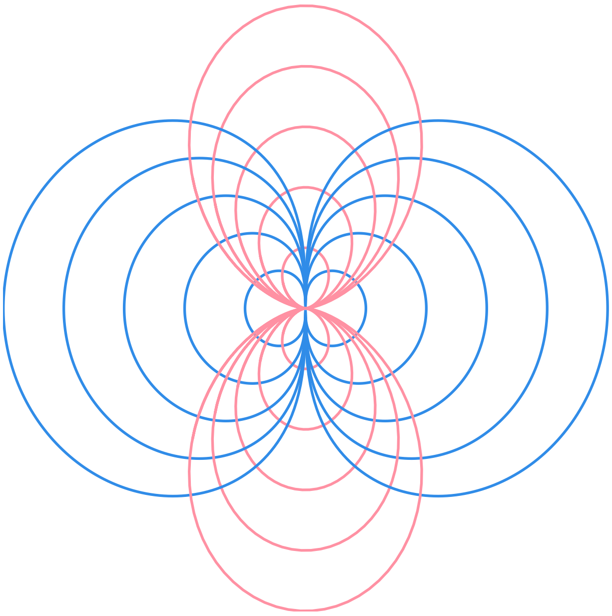


Figure XXXIV.48 –
On appelle ligne de champ, un arc paramétré qui est tangent en chacun de ses points au gradient de f représenté ici en bleu.
Ici est représenté le Potentiel créé par un dipôle électrostatique en un point de l'espace ainsi que ses lignes de champ.

Théorème 14 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

Soit $(x_0, y_0) \in \mathrm{A}$.

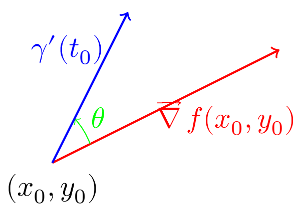
Parmi tous les arcs paramétrés γ de classe $\mathscr{C}^1$ passant par (x_0, y_0), i.e. $(x_0, y_0) = \gamma(t_0)$, avec $\|\gamma'(t_0)\| = 1$, la valeur de $(f \circ \gamma)'(t_0)$ est :

- maximale lorsque $\gamma'(t_0)$ est colinéaire à $\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0)$ et de même sens ;
- minimale lorsque $\gamma'(t_0)$ est colinéaire à $\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0)$ et de sens contraire.

Interprétation Graphique : $\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0)$ représente donc la direction de la ligne de plus grande pente sur la surface d'équation $z = f(x, y)$, et il est orienté vers les valeurs les plus élevées.

Preuve : D'après la règle de la chaîne, $\forall\, t \in \mathbb{R},\ (f \circ \gamma)'(t) = \left\langle \overrightarrow{\nabla} f(\gamma(t)) \mid \gamma'(t) \right\rangle$.

D'où,
$$\begin{aligned}(f \circ \gamma)'(t_0) &= \left\langle \overrightarrow{\nabla} f(\gamma(t_0)) \mid \gamma'(t_0) \right\rangle \\ &= \left\langle \overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) \mid \gamma'(t_0) \right\rangle \\ &= \|\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0)\| \|\gamma'(t_0)\| \cos(\theta) \\ &= \left\|\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0)\right\| \cos(\theta) \text{ puisque } \|\gamma'(t_0)\| = 1\end{aligned}$$



Donc, $(f \circ \gamma)'(t_0)$ est $\begin{cases} \text{maximal lorsque } \theta \equiv 0 & [2\pi] \\ \text{minimal lorsque } \theta \equiv \pi & [2\pi] \end{cases}$

Autrement dit, si l'on veut passer le plus vite possible du niveau k au niveau $k' < k$, à partir du point donné $\mathrm{M}_0(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ de niveau $f(x,y) = k$, alors il faut démarrer en suivant la direction du gradient $\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0)$. [3]

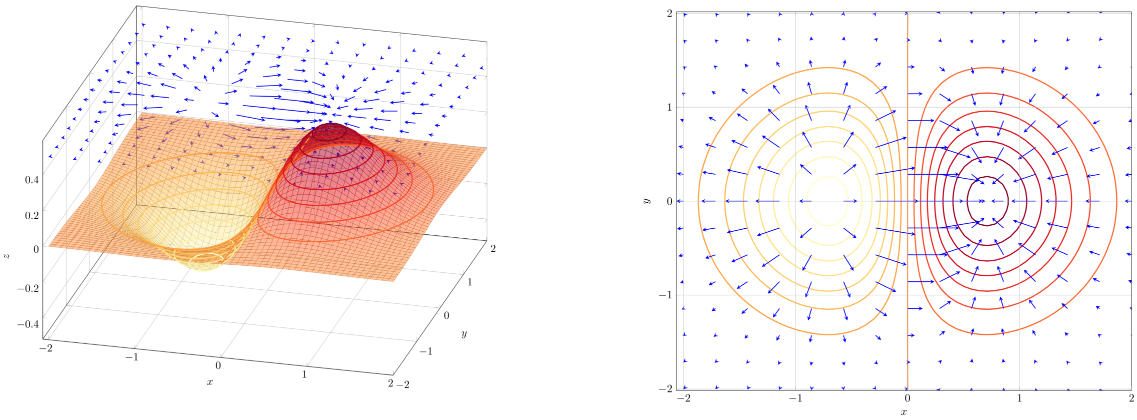


Figure XXXIV.49 – Lignes de niveau et champ de gradients de $f : (x\,;y) \longmapsto x\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

VII Extrema

Définition 14 : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.

Soit $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0)$ un point de Ω.

- On dit que f présente un *maximum global* en (x_0, y_0) lorsque
$$\forall\,(x,y) \in \Omega \quad f(x,y) \leqslant f(x_0, y_0).$$
- On dit que f présente un *minimum global* en (x_0, y_0) lorsque
$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad f(x,y) \geqslant f(x_0, y_0).$$
- On dit que f présente un *maximum local* en (x_0, y_0) lorsqu'il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad \|(x\,;y) - (x_0\,;y_0)\| < \alpha \implies f(x,y) \leqslant f(x_0, y_0).$$
- On dit que f présente un *minimum local* en (x_0, y_0) lorsqu'il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad \|(x\,;y) - (x_0\,;y_0)\| < \alpha \implies f(x,y) \geqslant f(x_0, y_0).$$

Remarques :

— Un extremum local est donc un extremum global sur un ouvert contenu dans Ω. Un extremum global est un extremum local. un extremum local peut être un extremum global.

— Rien ne dit que les extrema locaux ou globaux sont uniques.

Exercice 13 : Déterminer les points critiques de $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x^2 + xy + y^2 - 3x + 1. \end{array}$

[3]. Un skieur voulant aller vite choisit la plus forte pente descendante en un point de la montagne, c'est la direction inverse du gradient.

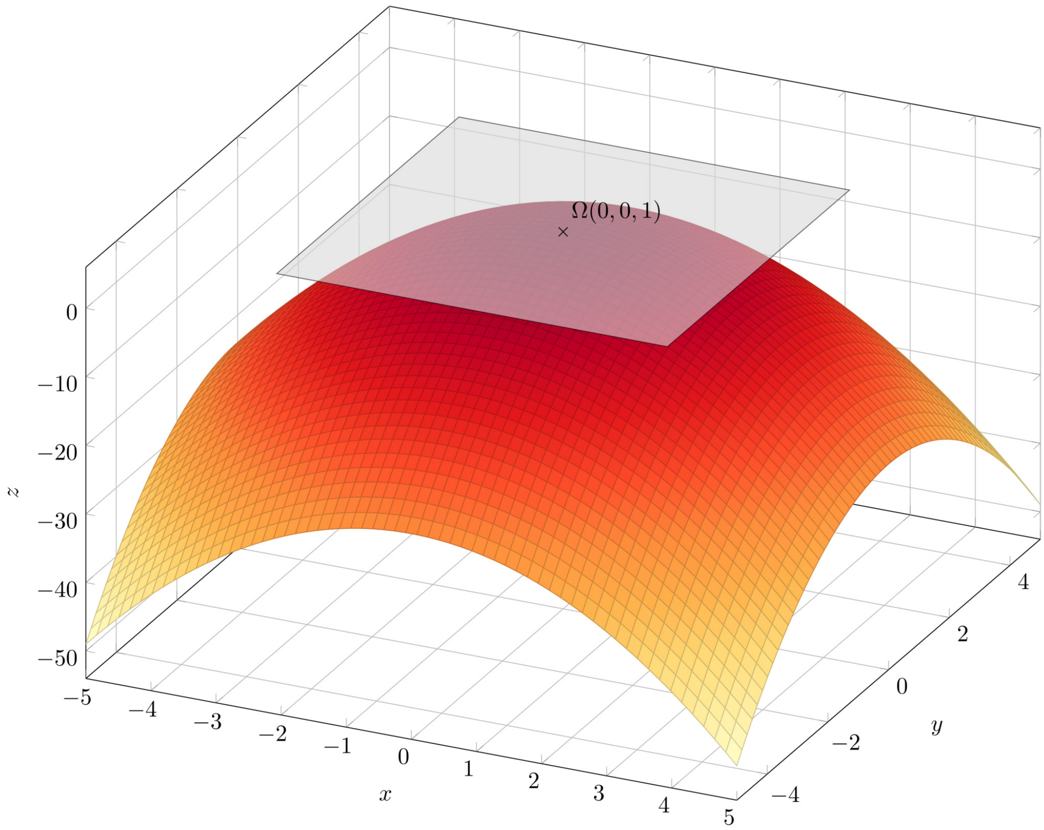


Figure XXXIV.50 – $\Omega\,(0\,;0\,;1)$ est un maximum local de $(x\,;y)\longmapsto 1-(x^2+y^2)$.

Proposition 15 : Soient $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, $f:\Omega\longmapsto\mathbb{R}$ et $\mathrm{A}(x_0,y_0)\in\Omega$ alors :

Si f présente un extremum local en $\mathrm{A}(x_0,y_0)$, alors :

- l'application partielle $f(\cdot,y_0)$ présente un extremum local en x_0
- l'application partielle $f(x_0,\cdot)$ présente un extremum local en y_0

Preuve : Supposons que f admette un minimum local en (x_0,y_0) et montrons que $f_{\mathrm{A},x}=f(\cdot,y_0)$ admet un minimum local en x_0.

Il existe $\alpha>0$ tel que :

$$\forall\,(x,y)\in\Omega,\quad \|(x\,;y)-(x_0\,;y_0)\|<\alpha \implies f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0).$$

La fonction f est définie sur $\Omega_1=\{x\in\mathbb{R}\,/\,(x,y_0)\in\Omega\}$.

Pour tout $x\in\Omega_1$ tel que $|x-x_0|<\alpha$, on a $(x,y_0)\in\Omega$ et $|x-x_0|=\|(x\,;y)-(x_0\,;y_0)\|<\alpha$.

D'où, $f(x,y_0)\geqslant f(x_0,y_0) \iff f_{\mathrm{A},x}(x)\geqslant f_{\mathrm{A},x}(x_0)$ i.e. $f_{\mathrm{A},x}$ admet un minimum local en x_0.

Le raisonnement est identique pour $f_{\mathrm{A},y}$.

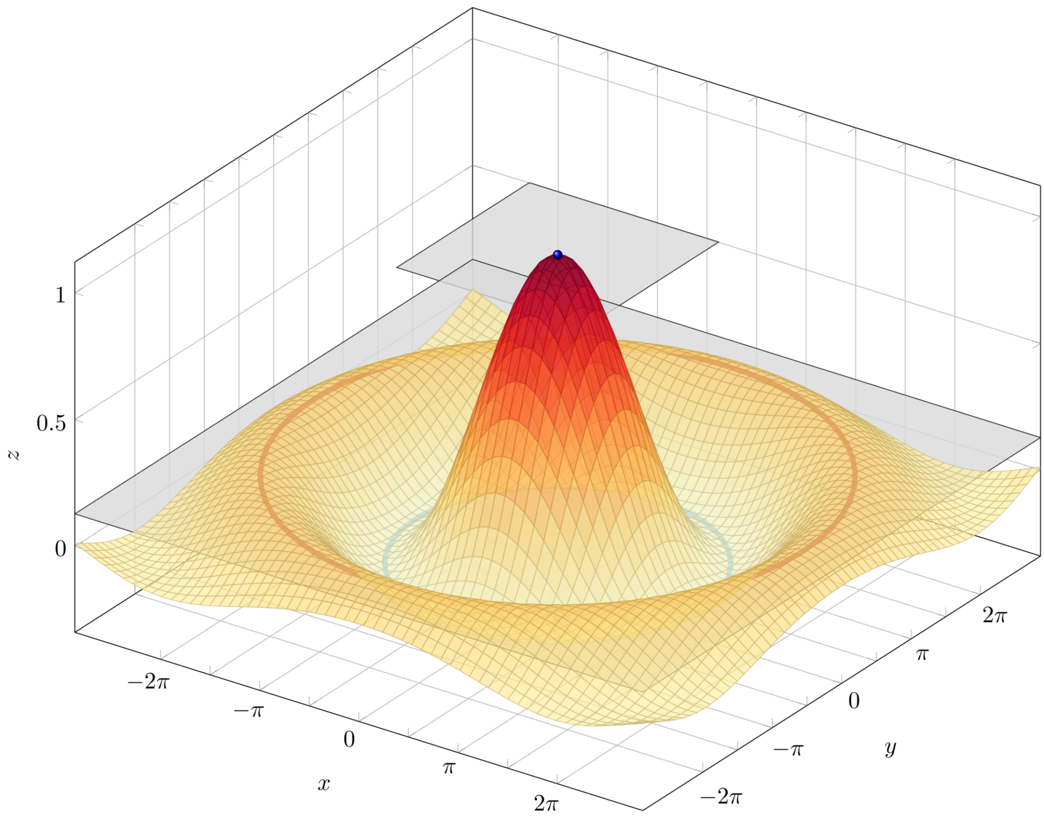


Figure XXXIV.51 – La fonction S : $(x\,;y) \longmapsto \dfrac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ admet un maximum global unique ainsi qu'une infinité de maxima locaux et de minima locaux.

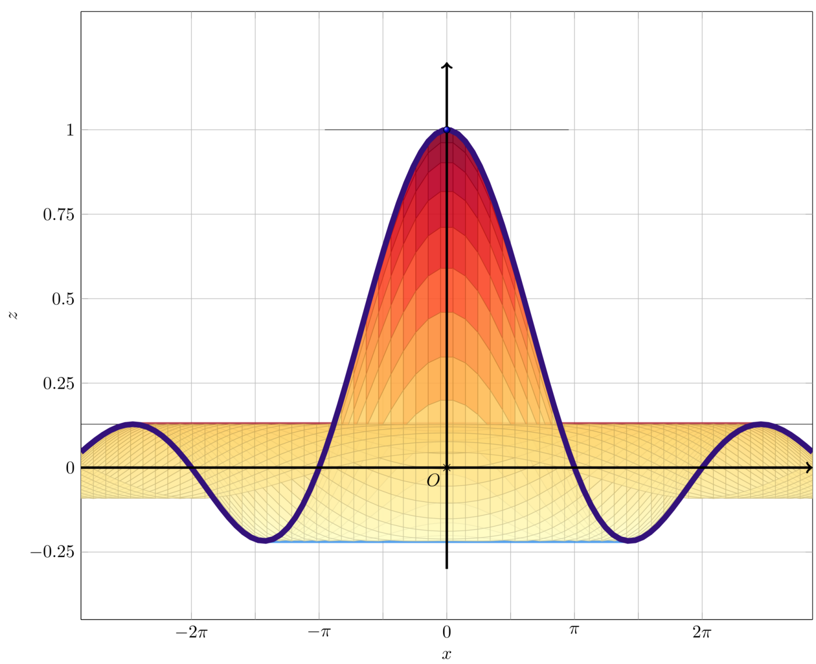


Figure XXXIV.52 – L'application partielle $S_{y=0} : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ admet des extrema en les abscisses de ceux de S.

ATTENTION

La réciproque est fausse comme le montre le contre-exemple (13).

Contre-Exemple 13 : Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2-y^2 \end{array}$ et $A(0,0)$.

Alors $f_{A,x} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $f_{A,y} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & -y^2 \end{array}$.

- La fonction $f_{A,x}$ admet un minimum local en 0.
- La fonction $f_{A,y}$ admet un maximum local en 0.

Supposons alors, par exemple, que f admette un minimum local en $(0,0)$ alors il existe $r>0$ tel que :

$$\forall\, xy \in \mathbb{R}^2,\ \|(x,y)\| < r \implies f(x,y) \geqslant f(0,0) \text{ avec } f(0,0)=0.$$

Or, en prenant $(x,y) = \left(0\,;\dfrac{r}{2}\right)$ alors $\|(x,y)\| < \dfrac{r}{2} < r$ et $f(x,y) = -\dfrac{r^2}{4} < 0$ qui est une contradiction.

Donc f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$. On dit que A est un *point col*.

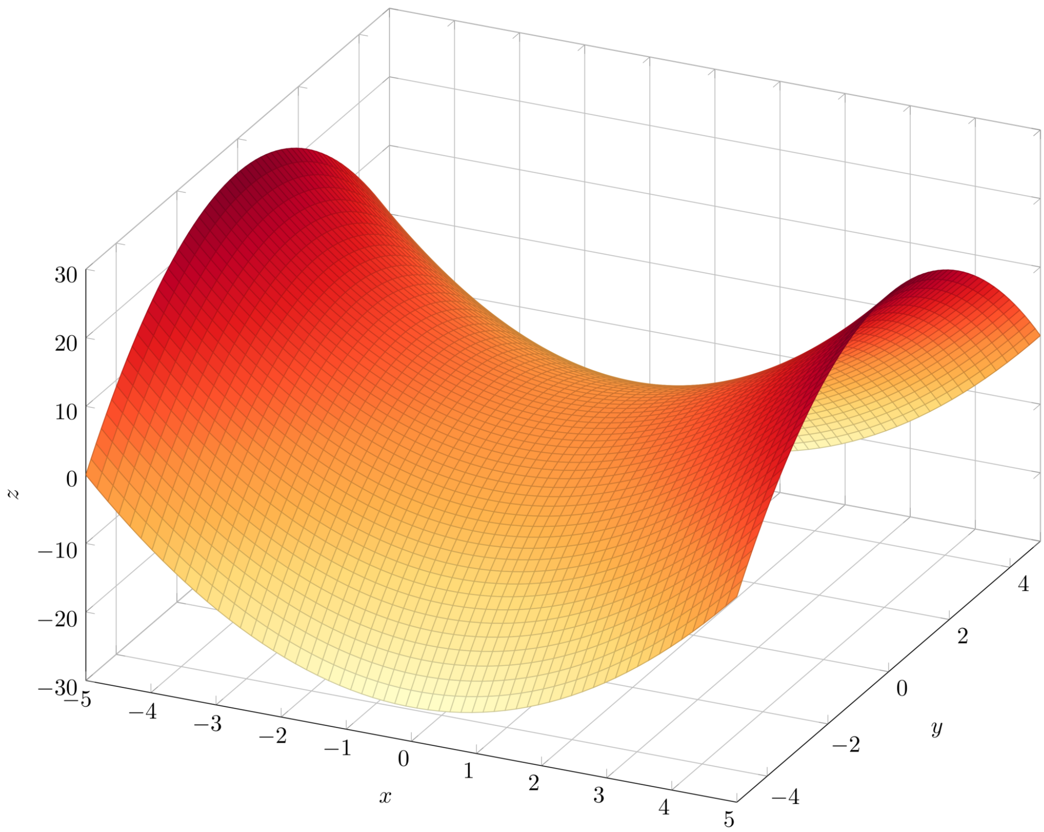


Figure XXXIV.53 – La surface de la fonction $(x\,;y) \longmapsto x^2-y^2$ présente un point col en $(0,0)$

Exercice 14 : Soit $f : (x,y) \longmapsto (x^2-y)\,(3x^2-y)$.

1. Prouver que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $g_\lambda : x \longmapsto f(x,\lambda x)$ admet un minimum local en 0.
2. f admet-elle un extremum local en $(0,0)$? On pourra étudier $f(x, 2x^2-x^3)$

Définition 15 : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et (x_0,y_0) un point de Ω.

On dit que (x_0, y_0) est un *point critique* de f lorsque :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \iff \overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) = (0, 0).$$

Remarque : En un point critique, le plan tangent à la surface est parallèle à $z = 0$.

Théorème 16 : Soient Ω un *ouvert* de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
Si f présente en $(x_0, y_0) \in \Omega$ un extremum local alors (x_0, y_0) est un point critique de f.

Preuve : D'après la proposition (15), si f est dérivable en $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ et y admet un extremum local alors $f(., y_0)$ admet un extremum en x_0.
Comme Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, la fonction $x \longmapsto f(., y_0)$ est définie et dérivable sur un intervalle ouvert contenant x_0. Sa dérivée est donc nulle en x_0 i.e.

$$f'_{y_0}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0.$$

On montre, de même, que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Ainsi,

$$\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \,;\, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right) = (0\,;0)\,.$$

Remarques :

— Attention aux hypothèses du théorème : f est de classe $\mathscr{C}^1$ et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

À rapprocher du théorème équivalent pour les fonctions réelles : si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ présente un extremum en a, si f est dérivable en a et a n'est pas au bord de I, alors $f'(a) = 0$.

— C'est une condition suffisante, mais non nécessaire comme pour les fonctions réelles. f peut ne pas présenter d'extremum en un point critique : Pensez au point-col de l' exemple (14) !

Ce théorème dit juste que les extrema seront nécessairement à chercher parmi les points critiques de f.

— Si (x_0, y_0) est un point critique de f alors $\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Donc pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^2$, la dérivée de f suivant le vecteur $\vec{u}$ est nulle.

En effet,

$$\mathrm{D}_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + u_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Par contraposition, si on trouve un vecteur $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{D}_{\vec{u}} f(x_0, y_0) \neq 0$ alors (x_0, y_0) n'est pas un point critique de f, et donc f ne présente pas d'extremum en (x_0, y_0).

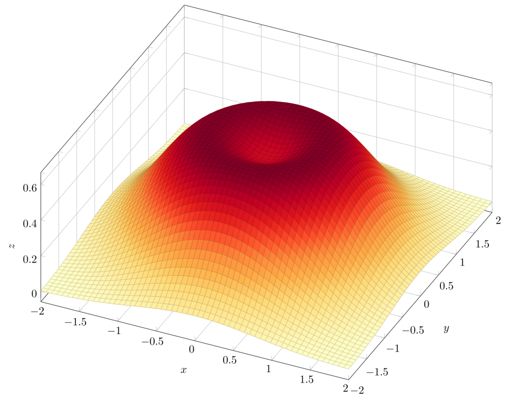


Figure XXXIV.54 – Minimum local non global

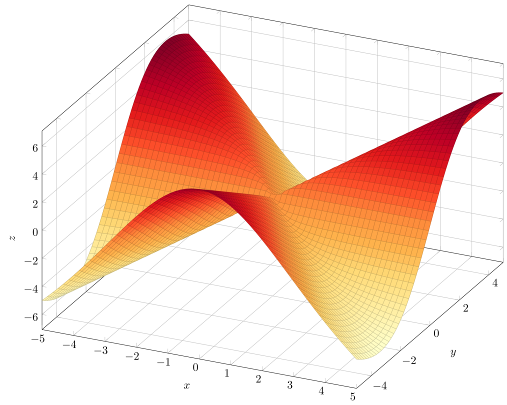


Figure XXXIV.55 – Point critique non extrémal

Exemple 14 : On considère encore $f : (x, y) \longmapsto x^2 - y^2$.

Cherchons un extremum de f. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert, si f admet un extremum en M_0, le point M_0 sera un point critique de f.

Or, $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y \end{cases}$.

$$(x, y) \text{ est un point critique de } f \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0).$$

$(0, 0)$ est le seul point critique de f sur $\mathbb{R}^2$ donc le seul candidat pour accueillir un extremum.

Or,

- $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x, 0) = x^2 \geqslant 0 = f(0, 0)$. Donc, f ne présente pas de maximum en $(0, 0)$.
- $\forall\, y \in \mathbb{R}, \quad f(0, y) = -y^2 \leqslant 0 = f(0, 0)$. Donc, f ne présente pas de minimum en $(0, 0)$.

On a vu que $(0, 0)$ est un point col de f.

Finalement, f n'admet pas d'extremum local.

Méthode 2 (Recherche d'extrema) :

Soit f, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω. L'étude des points extrémaux est simple :

1. *Vérifier si la réponse n'est pas évidente, par exemple $f(x, y) = x^2 + y^2$.*
2. *Vérifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles.*
3. *Chercher les points critiques de f. Cela revient à résoudre deux équations à deux inconnues, en général non linéaires.*
4. *Pour chaque point critique (x_0, y_0), étudier le signe de $f(x, y) - f(x_0, y_0)$, au voisinage de (x_0, y_0) pour savoir si c'est un extremum local, puis globalement le cas échéant.*

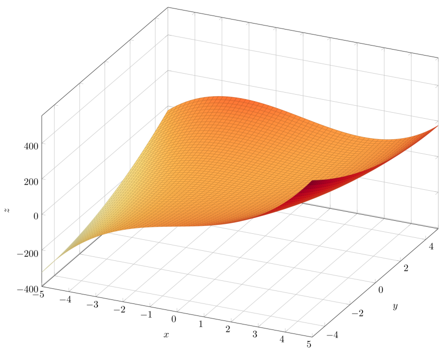
La dernière étape se fait manuellement, pensez aux identités remarquables ! L'année prochaine vous verrez de nouveaux outils pour systématiser cette étape.

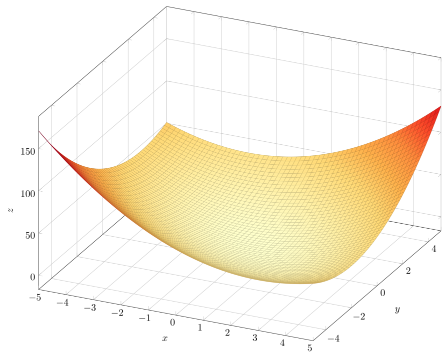
Exercice 15 : Étudier les extrema des fonctions suivantes :

1. $(x\,;y) \longmapsto 2x^3 - 6xy + 3y^2$.
2. $(x\,;y) \longmapsto x^2 + (x+y-1)^2 + y^2$.

Correction :

1. $(x\,;y) \longmapsto 2x^3 - 6xy + 3y^2$.
2. $(x\,;y) \longmapsto x^2 + (x+y-1)^2 + y^2$.





Index