

Fonctions de deux variables

**I LIMITES ET CONTINUITÉ**

**Exercice 1 :** Préciser le domaine de définition des fonctions suivantes et en donner une interprétation géométrique :

$$\boxed{1} \quad f : (x; y) \mapsto \ln(x + y - 1).$$

$$\boxed{4} \quad k : (x; y) \mapsto \ln(1 + x + y).$$

$$\boxed{2} \quad g : (x; y) \mapsto \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

$$\boxed{5} \quad l : (x; y) \mapsto \exp\left(\frac{x + y}{x^2 - y}\right).$$

$$\boxed{3} \quad h : (x; y) \mapsto \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|}.$$

**Exercice 2 :** Étudier l'existence des limites suivantes :

$$\boxed{1} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

$$\boxed{6} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x + 2y)^3}{x^2 + y^2}$$

$$\boxed{2} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\boxed{7} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \neq \pm y}} \frac{x^4 y}{x^2 - y^2}$$

$$\boxed{3} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\boxed{8} \quad \lim_{\substack{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0) \\ (x,y,z) \neq (0,0,0)}} \frac{xy + yz}{x^2 + 2y^2 + 3z^2}$$

$$\boxed{4} \quad \lim_{\substack{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0) \\ 2x^3 + yz^2 \neq 0}} \frac{xyz + z^3}{2x^3 + yz^2}$$

$$\boxed{9} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^3 - xy}{x^4 + y^2}$$

$$\boxed{5} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} \frac{|x| + |y|}{x^2 + y^2}$$

$$\boxed{10} \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x + y + z};$$

$$\boxed{11} \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x + y}{x^2 - y^2 + z^2}.$$

**Exercice 3 :** Étudier la continuité des applications suivantes :

$$\boxed{1} \quad g : (x, y) \mapsto \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } g(0, 0) = 0.$$

$$\boxed{2} \quad h : (x, y) \mapsto \frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } h(0, 0) = 1.$$

**II FONCTIONS DE CLASSE  $\mathcal{C}^1$** 

**Exercice 4 :** Soit la fonction  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0.$$

$\boxed{1}$  Montrer que  $f$  est continue et que, quel que soit  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ , la dérivée directionnelle  $D_{\vec{v}}f(x, y)$  existe en chaque  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  mais que  $f$  n'est pas différentiable en  $(0, 0)$ .

$\boxed{2}$  La dérivée directionnelle  $D_{\vec{v}}f(0, 0)$  est-elle linéaire en  $\vec{v}$  ?

Les droites appartenant à la famille des droites passant par l'origine et de vecteurs directeurs  $(\vec{v}, D_{\vec{v}}f(0, 0)) \in \mathbb{R}^3$ , forment-elles un plan ?

$\boxed{3}$  Le vecteur  $\vec{v}$  étant fixé, qu'est-ce qu'on peut dire de la continuité de  $D_{\vec{v}}f(x, y)$  en  $(x, y)$  ?

**Exercice 5 :** Déterminer, pour chacune des fonctions suivantes, le domaine de définition  $D_f$ .

Calculer ensuite, lorsqu'elles existent, les dérivées partielles en chaque point du domaine de définition :

$$\boxed{1} \quad f : (x; y) \mapsto x^2 + y + xy.$$

$$\boxed{5} \quad f(x, y) = x^2 \exp(xy),$$

$$\boxed{2} \quad f : (x; y) \mapsto x \cos(x^2 + y^2).$$

$$\boxed{6} \quad f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}),$$

$$\boxed{3} \quad f : (x, y) \mapsto 2x^2 - 5xy + 3y^2$$

$$\boxed{7} \quad f(x, y) = \sin^2 x + \cos^2 y,$$

$$\boxed{4} \quad g : (x, y) \mapsto xy^2 - 6 \ln(xy + x^2) + 17$$

$$\boxed{8} \quad f(x, y, z) = x^2 y^2 \sqrt{z}.$$

**Exercice 6 (\*) :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^x$  pour  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f(0, 0) = 1$ .

$\boxed{1}$  La fonction  $f$  est-elle continue en  $(0, 0)$  ?

$\boxed{2}$  Déterminer les dérivées partielles de  $f$  en un point quelconque distinct de l'origine.

$\boxed{3}$  La fonction  $f$  admet-elle des dérivées partielles par rapport à  $x$ , à  $y$  en  $(0, 0)$  ?

**Exercice 7 :** Montrer que les fonctions suivantes sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur leur ensemble de définition, et calculer leurs dérivées partielles :

$$\boxed{1} \quad (x; y) \mapsto x^2 + y + xy \text{ sur } \mathbb{R}^2.$$

$$\boxed{4} \quad (x; y) \mapsto x^y \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.$$

$$\boxed{2} \quad (x; y) \mapsto x^2 + (x + y - 1)^2 + y^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2.$$

$$\boxed{5} \quad (x; y) \mapsto e^{-x} \ln(y) \text{ sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$$

$$\boxed{3} \quad (x; y) \mapsto xy e^{\cos(x)} \text{ sur } \mathbb{R}^2.$$

**Exercice 8 :** Soit  $f : (x, y) \mapsto e^y \cos(xy)$ .

$\boxed{1}$  Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

$\boxed{2}$  Donner la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 en  $A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ .

**Exercice 9 :** Soit  $f : (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2$ . Déterminer  $\vec{\nabla} f(1, 3)$ .

En déduire l'ensemble des valeurs possibles de  $\partial_{\vec{u}} f(1, 3)$  pour tout vecteur  $\vec{u}$  unitaire.

**Exercice 10 :** Soit  $f : (x; y) \mapsto x^2 + y$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  et  $\vec{v}(1; 1)$ .

Justifier que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  puis déterminer  $\partial_{\vec{v}} f(x; y)$  pour tout  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ .

**Exercice 11 :** Soient  $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et  $\vec{u}_\theta(\cos(\theta), \sin(\theta))$ .

Déterminer  $\partial_{\vec{u}_\theta} f$ .

**Exercice 12 :** Soit  $f$  la fonction sur  $\mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y) = x \cos y + y \exp x$ .

$\boxed{1}$  Calculer ses dérivées partielles.

$\boxed{2}$  Soit  $\vec{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi[$ . Calculer  $D_{\vec{v}} f(0, 0)$ .

$\boxed{3}$  Pour quelle(s) valeur(s) de  $\theta$  cette dérivée directionnelle de  $f$  est-elle maximale/minimale ? Que cela signifie-t-il ?

### III PLAN TANGENT

**Exercice 13 :** Déterminer un développement limité à l'ordre 1 ainsi qu'une équation de plan tangent pour les fonctions suivantes :

$$\boxed{1} \quad (x; y) \mapsto x^y \text{ en } (1; 0).$$

$$\boxed{3} \quad (x; y) \mapsto x^2 y + y^2 \text{ en } (1; 3).$$

$$\boxed{2} \quad (x; y) \mapsto \sin(x + 2y) \text{ en } (0; 0).$$

$$\boxed{4} \quad (x; y) \mapsto -x^2 - y^2 \text{ en } (0; 0).$$

**Exercice 14 :** Trouver l'équation du plan tangent pour chaque surface ci-dessous, au point  $(x_0, y_0, z_0)$  donné :

$$\boxed{1} \quad z = \sqrt{19 - x^2 - y^2}, \quad (x_0, y_0, z_0) = (1, 3, 3);$$

$$\boxed{2} \quad z = \sin(\pi xy) \exp(2x^2y - 1), \quad (x_0, y_0, z_0) = (1, 1/2, 1).$$

**Exercice 15 :** On demande à un étudiant de trouver l'équation du plan tangent à la surface d'équation  $z = x^4 - y^2$  au point  $(x_0, y_0, z_0) = (2, 3, 7)$ .

Sa réponse est

$$z = 4x^3(x - 2) - 2y(y - 3).$$

- $\boxed{1}$  Expliquer, sans calcul, pourquoi cela ne peut en aucun cas être la bonne réponse.
- $\boxed{2}$  Quelle est l'erreur commise par l'étudiant ?
- $\boxed{3}$  Donner la réponse correcte.

**Exercice 16 (Une ellipse) :** Soit  $(a; b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ , et soit la courbe d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Déterminer l'équation de la tangente à un point de cette courbe.

**Exercice 17 :** Trouver les points sur le parabolôide  $z = 4x^2 + y^2$  où le plan tangent est parallèle au plan  $x + 2y + z = 6$ . Même question avec le plan  $3x + 5y - 2z = 3$ .

**Exercice 18 :** Soit  $C$  le cône d'équation  $z^2 = x^2 + y^2$  et  $C^+$  le demi-cône où  $z \geq 0$ .

Pour un point quelconque  $M_0$  de  $C \setminus \{(0, 0, 0)\}$ , de coordonnées  $(x_0, y_0, \pm\sqrt{x_0^2 + y_0^2})$ , on note  $P_{M_0}$  le plan tangent au cône  $C$  en  $M_0$ .

- $\boxed{1}$  Déterminer un vecteur normal et l'équation du plan  $P_{M_0}$ .
- $\boxed{2}$  Montrer que l'intersection du cône  $C$  avec le plan vertical d'équation  $y = ax$  où  $a \in \mathbb{R}$  est constituée de deux droites  $D_1$  et  $D_2$  et que l'intersection du demi-cône  $C^+$  avec ce plan vertical est constituée de deux demi-droites  $D_1^+$  et  $D_2^+$ .
- $\boxed{3}$  Montrer que le plan tangent au cône  $C$  est le même en tout point de  $D_1 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  (respectivement en tout point de  $D_2 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ ).

**Exercice 19 :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = x^2 - 2y^3$ .

- $\boxed{1}$  Déterminer l'équation du plan tangent  $P_{M_0}$  au graphe  $G_f$  de  $f$  en un point quelconque  $M_0$  de  $G_f$ .
- $\boxed{2}$  Pour le point  $M_0$  de coordonnées  $(2, 1, 2)$ , déterminer tous les points  $M$  tels que le plan tangent en  $M$  soit parallèle à  $P_{M_0}$ .

## IV COMPOSÉES

**Exercice 20 :** Soit  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  et soit  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$g(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x).$$

Montrer que  $\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0$ . (XXXIII.1)

**Exercice 21 :** Soit  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

- $\boxed{1}$  Calculer la dérivée première de  $\phi: t \mapsto f(t^2, t^3)$
- $\boxed{2}$  Calculer les dérivées partielles de  $g: (t, u) \mapsto f(2t - u, 4t + 3u)$ .
- $\boxed{3}$  Calculer les dérivées partielles de  $h: (t, u) \mapsto f(t^2 + 2u^2, e^{tu})$ .

**Exercice 22** : Soit  $f : \mathbb{R}^2 \setminus (0;0) \mapsto \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus (0;0)$ .

Soient  $g : ]0; +\infty[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (0;0)$  et  $F = f \circ g$ .

$$(r; \theta) \mapsto (r \cos \theta; r \sin \theta)$$

**1** Justifier que  $F$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[ \times \mathbb{R}$ .

**2** Soit  $(r; \theta) \in ]0; +\infty[ \times \mathbb{R}$ .

**a** Déterminer  $\frac{\partial F}{\partial r}(r; \theta)$  et  $\frac{\partial F}{\partial \theta}(r; \theta)$  en fonction de  $f$ ,  $r$  et  $\theta$ .

**b** En déduire  $\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta; r \sin \theta)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta; r \sin \theta)$  en fonction de  $F$ ,  $r$  et  $\theta$ .

## V EXTREMA

**Exercice 23** : Montrer que :

**1**  $(x; y) \mapsto x^2 + 3xy + y^2 - 2x - 3y$  ne peut avoir d'extremum local qu'au point  $(1, 0)$ .

**2**  $(x; y) \mapsto (x - y)^2 + x^3$  ne possède aucun extremum local.

**Exercice 24** : Déterminer les extrema de :

**1**  $(x, y) \mapsto 2x^2 + 3y^2$ .

**5**  $(x, y) \mapsto 2x^3 - 6xy + 3y^2$ .

**2**  $(x, y) \mapsto x^2 + y^3$ .

**6**  $(x, y) \mapsto x^2 + (x + y - 1)^2 + y^2$ .

**3**  $(x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$ .

**7**  $(x, y) \mapsto x^2y + \ln(1 + y^2)$ .

**4**  $(x, y) \mapsto (x - y)^2 + (x + y)^3$ .

**8**  $(x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$ .

**Exercice 25** : Déterminer  $\sup_{(x,y) \in [-1,1]^2} (x^3 - xy + y^3)$ .

**Exercice 26 (Extrait écrit ATS)** : On considère la fonction  $g$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , définie par  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = (x^2 + y^2 - 3)^2 + 4y^2 - 8$ .

Dans un espace affine euclidien muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , on considère la surface  $S$  admettant pour équation cartésienne :

$$z = g(x, y) = (x^2 + y^2 - 3)^2 + 4y^2 - 8.$$

**1** Comparer  $g(x, y)$  avec  $g(x, -y), g(-x, y), g(-x, -y)$ . Déduire de chaque égalité trouvée une symétrie de  $S$ .

**2** Montrer que  $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 4x(x^2 + y^2 - 3)$ .

**3** Calculer  $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$ .

**4** Trouver tous les couples de réels solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 4x(x^2 + y^2 - 3) = 0 \\ 4y(x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

**5** En déduire que la fonction  $g$  admet cinq points critiques dont on précisera les coordonnées.

# Index

- Application
  - partielle, 8
- Arc, 34
- Boule
  - fermée, 14
  - ouverte, 14
- Calcul
  - différentiel, 21
- Continuité, 19
- Différentiabilité, 27
- Différentielle, 28
- Distance
  - euclidienne, 14
- Domaine
  - de définition, 2
- Droite
  - affine, 22
- Dérivée
  - directionnelle, 22
  - partielle, 23
- Développement
  - limité, 28
- Extrema, 40
- Fonction
  - continue, 19
  - à deux variables, 2
- Formule
  - de Taylor-Young, 28
- Gradient, 30
  - Interprétation graphique, 37
- Graphe, 2
- Hyperbole, 6
- Ligne
  - de champ, 38
  - de niveau, 4, 5, 37
- Limite, 12
  - en un point, 16
- Maximum, 40
  - local, 40
- Méthode
  - Fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , 26
  - Recherche d'extrema, 45
- Minimum, 40
  - local, 40
- Norme
  - euclidienne, 14
- Parabole, 11
- Paraboloïde
  - de révolution, 4, 11, 12
  - hyperbolique, 5, 11, 12
- Plan
  - tangent, 32
- Point
  - col, 43
  - critique, 43
- Règle
  - de la chaîne, 35
- Structure
  - euclidienne, 13
- Surface
  - représentative, 2
- Tangente, 23
- Topologie, 12, 15
- Vecteur
  - unitaire, 23
- Voisinage
  - d'un point, 15