

Déterminant

1 On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a En justifiant par une phrase courte, claire, concise et efficace, calculer $\det(A)$ et $\det(B)$.

Les lignes de A sont liées donc $\det(A) = 0$. Celles de B forment la base canonique donc $\det(B) = 1$.

b Avec sobriété, les endomorphismes associés à A et B sont-ils bijectifs ?

D'après la question précédente, seul celui associé à B est bijectif.

c Dans la même concision donner une base de $\ker(A)$ et $\text{Im}(A)$.

$$\text{Im}(A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ donc } \dim(\ker(A)) = 2.$$

$$\text{Il est alors facile de voir que } \ker(A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

d Toujours avec clarté, donner une base de $\ker(B)$ et $\text{Im}(A)$.

$$\text{Comme B est bijectif } \ker(B) = \{0\} \text{ et } \text{Im}(B) = \mathbb{R}^3 = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

2 Soit D l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $D(x) = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 2 \\ 2+x & 2 & 3 \\ 3+x & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

a Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

b Calculer $D(0)$.

$$D(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

c En utilisant les propriétés d'un déterminant donner $D'(x)$.

Par linéarité par rapport à la première colonne,

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 2 \\ 2+x & 2 & 3 \\ 3+x & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -x.$$

Donc $D'(x) = -1$.

3 Calculer
$$\begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$$

On retire la colonne C_1 aux autres colonnes C_i pour faire apparaître des 0 :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & -b & \cdots & -b \\ a & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & b \end{vmatrix}$$

On remplace ensuite L_1 par $L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n$ (ou ce qui revient au même : faites les opérations $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$... chacune de ces opérations fait apparaître un 0 sur la première ligne) pour obtenir une matrice triangulaire inférieure :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} na+b & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & b \end{vmatrix} = (na+b)b^{n-1}.$$

4 Calculer $V_3 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}$.

$$V_3 = (a_3 - a_2)(a_2 - a_1)(a_3 - a_1).$$

Index

- Application
 - partielle, 8
- Arc, 34
- Boule
 - fermée, 14
 - ouverte, 14
- Calcul
 - différentiel, 21
- Continuité, 19
- Différentiabilité, 27
- Différentielle, 28
- Distance
 - euclidienne, 14
- Domaine
 - de définition, 2
- Droite
 - affine, 22
- Dérivée
 - directionnelle, 22
 - partielle, 23
- Développement
 - limité, 28
- Extrema, 40
- Fonction
 - continue, 19
 - à deux variables, 2
- Formule
 - de Taylor-Young, 28
- Gradient, 30
 - Interprétation graphique, 37
- Graphe, 2
- Hyperbole, 6
- Ligne
 - de champ, 38
 - de niveau, 4, 5, 37
- Limite, 12
 - en un point, 16
- Maximum, 40
 - local, 40
- Méthode
 - Fonction de classe $\mathcal{C}^1$, 26
 - Recherche d'extrema, 45
- Minimum, 40
 - local, 40
- Norme
 - euclidienne, 14
- Parabole, 11
- Paraboloïde
 - de révolution, 4, 11, 12
 - hyperbolique, 5, 11, 12
- Plan
 - tangent, 32
- Point
 - col, 43
 - critique, 43
- Règle
 - de la chaîne, 35
- Structure
 - euclidienne, 13
- Surface
 - représentative, 2
- Tangente, 23
- Topologie, 12, 15
- Vecteur
 - unitaire, 23
- Voisinage
 - d'un point, 15