XXXIII
Déterminant

Contenu

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n sera un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Introduction

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique que l'on note $\left(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\right)$.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, et $\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}$ le parallélogramme porté par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}} = \left\{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \,/\, \alpha,\, \beta \in [0\,;1]\right\}.$$

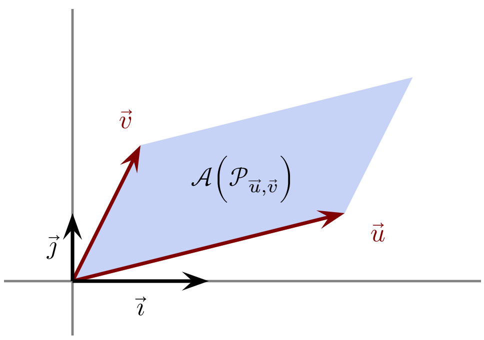

Figure XXXIII.1 – Aire algébrique d'un parallélogramme porté par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On note $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}\right)$ l'aire algébrique de $\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}$ c'est-à-dire que l'aire de $\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}$ est comptée :

- positivement si une mesure de l'angle $(\vec{u}\,;\vec{v})$ appartient $[0\,;\pi]$.
- négativement si une mesure de l'angle $(\vec{u}\,;\vec{v})$ appartient $[-\pi\,;0]$.

Rappel I : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

1. $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2},\vec{v}}\right) = \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\overrightarrow{u_1},\vec{v}}\right) + \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\overrightarrow{u_2},\vec{v}}\right)$.

   $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}}\right) = \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\overrightarrow{v_1}}\right) + \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\overrightarrow{v_2}}\right)$.
2. $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\lambda\vec{u},\vec{v}}\right) = \lambda\,\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}\right)$ et $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\lambda\vec{v}}\right) = \lambda\,\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}\right)$.
3. $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{v},\vec{u}}\right) = -\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}\right)$.
4. $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\lambda\vec{u}}\right) = 0$ et $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\lambda\vec{v},\vec{v}}\right) = 0$.
5. $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{0}}\right) = 0$ et $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{0},\vec{v}}\right) = 0$.
6. $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{\imath},\vec{\jmath}}\right) = 1$.

Preuve :

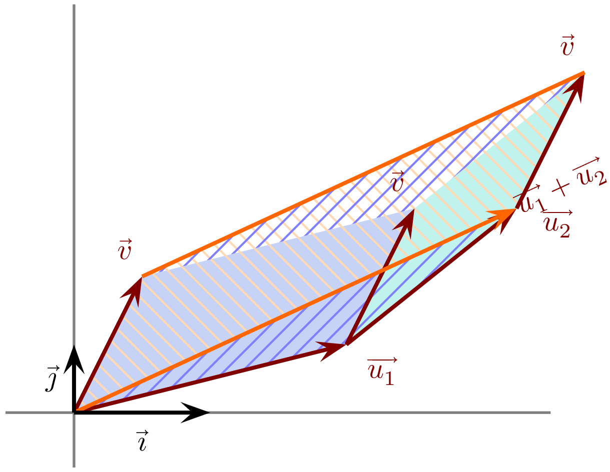

Figure XXXIII.2 – $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2},\vec{v}}\right) = \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\overrightarrow{u_1},\vec{v}}\right) + \mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\overrightarrow{u_2},\vec{v}}\right)$.

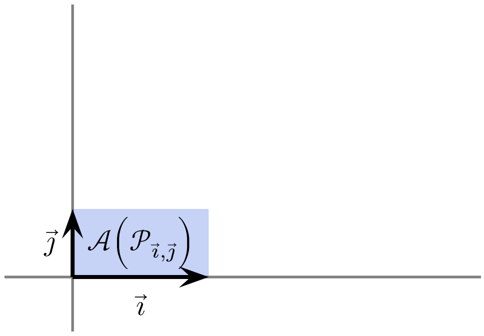

Figure XXXIII.4 – $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{\imath},\vec{\jmath}}\right) = 1\,(u.a)$.

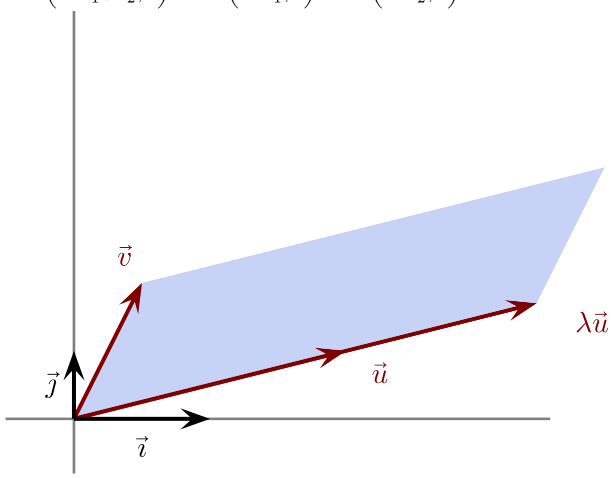

Figure XXXIII.3 – $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\overrightarrow{\lambda u},\vec{v}}\right) = \lambda\,\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}\right)$.

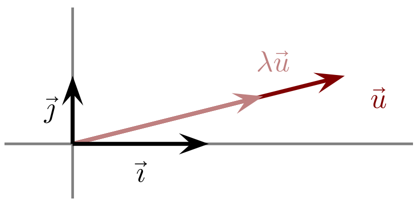

Figure XXXIII.5 – $\mathcal{A}\left(\mathcal{P}_{\vec{u},\lambda\vec{v}}\right) = 0$.

Rappel 2 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ muni d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormée directe.

1. On appelle *déterminant* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté det $(\vec{u}\,;\vec{v})$, le réel :

$$\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}).$$

2. L'application det : $\begin{array}{rcl} \overrightarrow{\mathcal{P}}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{u}\,;\vec{v}) & \longmapsto & \det(\vec{u}\,;\vec{v}) \end{array}$ est :
   - une forme bilinéaire.
   - antisymétrique : $\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = -\det(\vec{v}\,;\vec{u})$.
   - alternée : $\det(\vec{u}\,;\vec{u}) = \det(\vec{v}\,;\vec{v}) = 0$.
3. $\det\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right) = 1$.

Corollaire 0.1 : Soient $\vec{u}$, $\vec{v} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{A}\Big(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}+\lambda\vec{u}}\Big) = \mathcal{A}\Big(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}\Big).$$

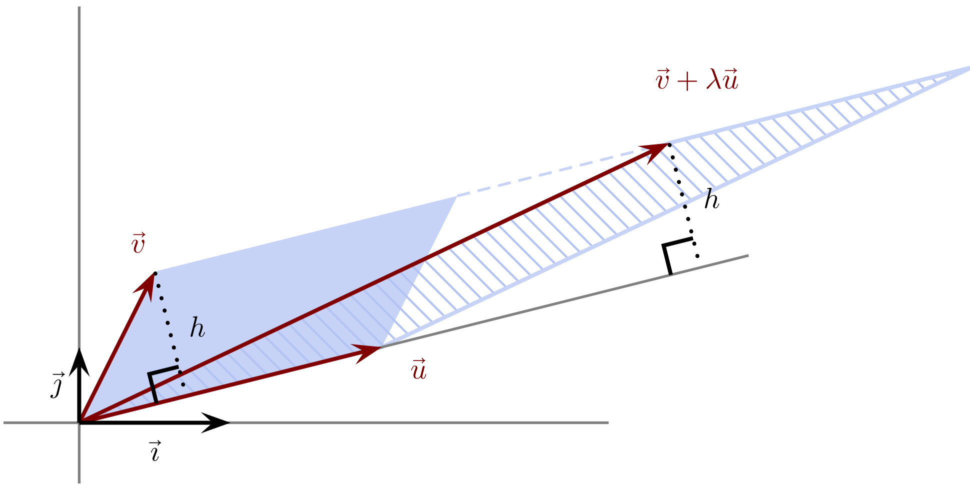

Figure XXXIII.6 – $\mathcal{A}\Big(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}+\lambda\vec{u}}\Big) = \mathcal{A}\Big(\mathcal{P}_{\vec{u},\vec{v}}\Big)$.

En dimension 3, le déterminant de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ représente, de même, le volume au signe près du parallélépipède engendré par les trois vecteurs.

Rappel 3 : Soient x, y et z trois vecteurs de l'espace $\vec{\mathcal{E}}_3$ muni d'une base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormée directe.

1. On appelle *déterminant* de x, y et z, noté det $(x\,;y\,;z)$, le réel :

$$\det(x\,;y\,;z) = \Big(x \wedge y\Big) \cdot z.$$

2. L'application det : $\begin{array}{rcl} \vec{\mathcal{E}}_3^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\,;y\,;z) & \longmapsto & \det(x\,;y\,;z) \end{array}$ est :

- une forme trilinéaire.
- antisymétrique : $\det(x\,;y\,;z) = -\det(y\,;x\,;z) = -\det(x\,;z\,;y) = -\det(z\,;y\,;x)$.
- alternée : $\det(x\,;x\,;z) = \det(y\,;y\,;z) = \det(x\,;z\,;z) = \det(y\,;z\,;z) = 0$.

3. $\det\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right) = 1$.

Exercice 1 :

1. Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs
$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que le volume d'un parallélépipède dont les sommets sont des points de $\mathbb{R}^3$ à coefficients entiers est un nombre entier.

I DÉTERMINANT D'UNE MATRICE CARRÉE

Soit $A = (C_1|\dots|C_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

On identifiera $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec le n-uplet de ses colonnes $(C_{1,A}, \dots, C_{n,A}) \in \mathbb{K}^n$.

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \xrightarrow{\simeq} & \left(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\right)^n \\
\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} C_1 & \dots & C_n \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}, & \dots, & \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} \end{array}\right)
\end{array}$$

En particulier, pour $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto \mathbb{K}$ une application et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on notera indifféremment pour des commodités d'écriture, $f(A)$ ou $f(C_{1,A}, \dots, C_{n,A})$ la valeur prise par f en A.

Définition 1 : Soient $A = (C_1|\dots|C_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & f(A) \end{array}$ un application.

On dit que :

- f est *multilinéaire* si f est linéaire par rapport à chaque vecteur colonne de A : $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, $\forall\, C_1, \dots, C_n, C' \in \mathbb{K}^n$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$,

$$f(C_1, \dots, \underset{i^{\text{ème}}\text{ colonne}}{\underset{\uparrow}{\lambda C_i + C'}}, \dots, C_n) = \lambda f(C_1, \dots, \underset{i^{\text{ème}}\text{ colonne}}{\underset{\uparrow}{C_i}}, \dots, C_n) + \dots$$
$$\dots f(C_1, \dots, \underset{i^{\text{ème}}\text{ colonne}}{\underset{\uparrow}{C'}}, \dots, C_n).$$

- f est *antisymétrique* si $\forall\, i, j \in [\![1\,;n]\!]$, $i \neq j$ alors :

$$f(C_1, \dots, \underset{i^{\text{ème}}\text{ colonne}}{\underset{\uparrow}{C_j}}, \dots, \underset{j^{\text{ème}}\text{ colonne}}{\underset{\uparrow}{C_i}}, \dots, C_n) = -f(C_1, \dots, \underset{i^{\text{ème}}\text{ colonne}}{\underset{\uparrow}{C_i}}, \dots, \underset{j^{\text{ème}}\text{ colonne}}{\underset{\uparrow}{C_j}}, \dots, C_n).$$

- f est *alternée* si $\forall\, i, j \in [\![1\,;n]\!]$, $i \neq j$ alors :

$$f(C_1, \dots, \underset{\substack{\uparrow\\ i^{\text{ème}}\text{ colonne}}}{C_i}, \dots, \underset{\substack{\uparrow\\ j^{\text{ème}}\text{ colonne}}}{C_i}, \dots, C_n) = 0.$$

Proposition 1 :

1. Toute application multilinéaire alternée est antisymétrique.
2. Si la caractéristique du corps $\mathbb{K}$ est différente de 2, la réciproque est vraie : toute application multilinéaire antisymétrique est alternée.

Preuve :

1. Considérons une forme multilinéaire alternée. Il suffit de calculer pour $i \neq j$:

$$\begin{aligned}
0 = f(C_1, \dots, \underset{\substack{\uparrow\\ i^{\text{ème}}\text{ colonne}}}{C_i + C_j}, \dots, \underset{\substack{\uparrow\\ j^{\text{ème}}\text{ colonne}}}{C_i + C_j}, \dots, C_n) &= f(C_1, \dots, C_i, \dots, C_i + C_j, \dots, C_n)\\
&\quad + f(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i + C_j, \dots, C_n)\\
&= \cancel{f(C_1, \dots, C_i, \dots, C_i, \dots, C_n)}\\
&\quad + f(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n)\\
&\quad + f(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n)\\
&\quad + \cancel{f(C_1, \dots, C_j, \dots, C_j, \dots, C_n)}
\end{aligned}$$

Donc, $f(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -f(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n)$ et f est antisymétrique.

2. Réciproquement, soit f une forme multilinéaire antisymétrique. Pour $i \neq j$, on calcule, de même,

$$\begin{aligned}
f(C_1, \dots, \underset{\substack{\uparrow\\ i^{\text{ème}}\text{ colonne}}}{C_i - C_j}, \dots, \underset{\substack{\uparrow\\ j^{\text{ème}}\text{ colonne}}}{C_i - C_j}, \dots, C_n) &= f(C_1, \dots, C_i, \dots, C_i + C_j, \dots, C_n)\\
&\quad - f(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i - C_j, \dots, C_n)\\
&= f(C_1, \dots, C_i, \dots, C_i, \dots, C_n)\\
&\quad + \cancel{f(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n)}\\
&\quad - \cancel{f(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n)}\\
&\quad + f(C_1, \dots, C_j, \dots, C_j, \dots, C_n)
\end{aligned}$$

Pour $C_i = C_j$, on obtient :

$$0 = 2 \times f(C_1, \dots, C_i, \dots, C_i, \dots, C_n) \iff 0 = f(C_1, \dots, C_i, \dots, C_i, \dots, C_n).$$

L'application f est donc alternée.

Remarque : Une autre méthode est de remarquer qu'échanger deux colonnes change la valeur de f en son opposé.

Or, cette transformation n'a pas d'effet sur $f(C_1, \dots, C_i, \dots, C_i, \dots, C_n)$ qui, égal à son opposé, est donc nul.

I.1 Généralités

Définition/Théorème 2 (Admis) : Il existe une unique application $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. f est multilinéaire.
2. f est antisymétrique.
3. $f(\mathrm{I}_n) = 1$.

Cette application est appelée *déterminant* et notée det :

$$\forall\, \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \text{ on note } \det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \in \mathbb{K}.$$

La dernière condition peut être vue comme une condition de normalisation.

Preuve : Conformément aux indications du programme, nous admettons ce théorème dans le cas général mais...Nous allons toutefois l'établir pour $n = 2$ en raisonnant par analyse/synthèse.

Analyse : Supposons qu'une telle fonction $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) \longmapsto \mathbb{K}$ bilinéaire, antisymétrique et vérifiant $f(\mathrm{I}_2) = 1$ existe et soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

On note $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K})$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K})$.

On a :

$$\begin{aligned} f(\mathrm{A}) = f\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right) &= f\left(a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= f(ae_1 + ce_2, be_1 + de_2) \end{aligned}$$

Par linéarité sur la première variable,

$$= af(e_1, be_1 + de_2) + cf(e_2, be_1 + de_2)$$

Par linéarité sur la deuxième variable,

$$= abf(e_1, e_1) + adf(e_1, e_2) + bcf(e_2, e_1) + cdf(e_2, e_2)$$

Comme f est alternée,

$$= adf(e_1, e_2) + bcf(e_2, e_1)$$

Par symétrie de f,

$$= (ad - bc)f(e_1, e_2)$$

Enfin, la normalisation :

$$= ad - bc.$$

L'expression de f étant parfaitement déterminée, on a prouvé l'unicité de f.

Synthèse : Réciproquement, on vérifie sans difficulté que

$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & ad - bc \end{array}$$

est bien une forme bilinéaire, antisymétrique et telle que $f(\mathrm{I}_2) = 1$.

Théorème 2 :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Exercice 2 : Calculer les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$
2. $\mathrm{V}_2 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}$

Exercice 3 (Règle de Sarrus) :

1. Déterminer l'expression explicite de det pour $n = 3$.
2. Applications : Calculer les déterminants suivants :

(a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

(d) $\mathrm{V}_3 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}$

I.2 Multilinéarité

Corollaire 2.1 : Soient $\mathrm{A} = (\mathrm{C}_1 | \dots | \mathrm{C}_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{C}' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

1. Le déterminant d'une matrice dont une colonne est nulle est nul.
2. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\det(\mathrm{C}_1 | \dots | \lambda \mathrm{C}_i + \mathrm{C}' | \dots | \mathrm{C}_n) = \lambda \det(\mathrm{C}_1 | \dots | \mathrm{C}_i | \dots | \mathrm{C}_n) + \det(\mathrm{C}_1 | \dots | \mathrm{C}' | \dots | \mathrm{C}_n).$$

3. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda \mathrm{A}) = \lambda^n \det(\mathrm{A})$.

Exemple 1 : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix}$

Théorème 3 (Déterminant d'une matrice diagonale) :

$$\det\Big(\operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)\Big) = a_1 a_2 \dots a_n.$$

Preuve : Il suffit d'utiliser la linéarité du déterminant par rapport à chacune de ses colonnes :

$$\begin{vmatrix} a_1 &&& \\ & a_2 && \\ && \ddots & \\ &&& a_n \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} 1 &&& \\ & a_2 && \\ && \ddots & \\ &&& a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \begin{vmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ && \ddots & \\ &&& a_n \end{vmatrix} = \dots$$
$$= a_1 a_2 \dots a_n \ \det(\mathrm{I}_n) = a_1 a_2 \dots a_n.$$

I.3 Antisymétrie

Corollaire 3.1 :

1. Le déterminant d'une matrice est changé en son opposé si l'on échange deux colonnes distinctes.
2. Le déterminant d'une matrice dont deux colonnes sont égales est nul.
3. On ne change pas le déterminant lorsqu'on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres.
4. Si les colonnes de A forment une familles liée, alors le déterminant est nul.

   En particulier, le déterminant d'une matrice non inversible est nul.

Exercice 4 : Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ est divisible par 17.

I.4 Opérations élémentaires

Rappel 4 : Soient $n \in \mathbb{N}$, i, $j \in [\![1\,;n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit les matrices de transposition $\mathrm{L}_{i,j,n}$, de dilatation $\mathrm{H}_{i,n}(\lambda)$ et de transvection $\mathrm{T}_{i,j,n}(\lambda)$ par :

$$\mathrm{L}_{i,j,n} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccccccccccc} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 0 &&&& 1 &&& \\ &&&& 1 &&&&&& \\ &&&&& \ddots &&&&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ &&& 1 &&&& 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccccccc} &&& \uparrow i &&&& \uparrow j &&& \end{array} & \end{array}$$

$$\mathrm{H}_{i,n}(\lambda) = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} &&& \uparrow i &&& \end{array} & \end{array}$$

$$\mathrm{T}_{i,j,n}(\lambda) = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& \ddots &&& \\ && \lambda && 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} && \uparrow j &&&& \end{array} & \end{array}$$

Corollaire 3.2 : Soient $n \in \mathbb{N}$, i, $j \in [\![1\,;n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- $\det(\mathrm{L}_{i,j,n}) = -1$.
- $\det(\mathrm{H}_{i,n}(\lambda)) = \lambda$.
- $\det(\mathrm{T}_{i,j,n}(\lambda)) = 1$.

Rappel 5 (Opérations élémentaires) : Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Multiplier A par $L_{i,j,n}$ à droite revient à permuter les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ colonnes de A.
  On note $L_i \leftrightarrow L_j$ cette opération.
- Multiplier A par $H_{i,n}(\lambda)$ à droite revient à multiplier la $i^{\text{ème}}$ colonne de A par λ.
  On note $L_i \leftarrow \lambda L_i$ cette opération.
- Multiplier A par $T_{i,j,n}(\lambda)$ à droite revient à additionner la $j^{\text{ème}}$ colonne de A multipliée par λ à la $i^{\text{ème}}$ (avec $i \neq j$).
  On note $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ cette opération.

Corollaire 3.3 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Une transposition sur les colonnes de A change le déterminant en son opposé.
$$\forall\, i \neq j,\ \det\left(AL_{i,j,n}\right) = -\det(A).$$
2. Une dilatation par λ sur les colonnes de A multiplie le déterminant par λ.
$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \det\left(AH_{i,n}(\lambda)\right) = \lambda \det(A).$$
3. Une transvection sur les colonnes de A ne change pas le déterminant.
$$\forall\, i \neq j,\ \lambda \in \mathbb{K},\ \det\left(AT_{i,j,n}(\lambda)\right) = \det(A).$$

Remarque : Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et E une matrice élémentaire. Alors $\det(E) \neq 0$ et
$$\det(AE) = \det(A) \times \det(E).$$

Proposition 4 (Déterminant d'une matrice triangulaire) :
$$\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & \\ & \ddots & & \vdots \\ & (0) & \ddots & \vdots \\ & & & a_n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

Preuve : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire. On note a_1, a_2, ..., a_n ses coefficients diagonaux.

- Si l'un des a_k est nul, la matrice est non inversible (son rang est $< n$) donc le déterminant est nul, et le produit des a_k aussi.
- Si tous les a_k sont non nuls, on peut par transvections successives sur les colonnes se ramener à une matrice diagonale $\Delta = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

D'où,

$$\det(A) = \det(\Delta) = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

Méthode I (Calcul du déterminant d'une matrice) :
Pour calculer le déterminant d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on applique l'algorithme de Gauss sur les colonnes de la matrice.
On se ramène ainsi à une matrice échelonnée triangulaire (inutile de la réduire) dont le calcul du déterminant est aisé.

Exercice 5 : Calculer le déterminant des matrices suivantes (de taille n lorsque non précisé) :

1. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & (1) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \dots & \dots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{n-1} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} a & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & a & \ddots & (1) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (1) & \ddots & a & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & a \end{pmatrix}$

I.5 Matrice inversible

Théorème 5 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$A \text{ est inversible} \iff \det(A) \neq 0.$$

Le déterminant caractérise donc les matrices inversibles.

Preuve :

($\Leftarrow$) : Si A est non inversible, alors $\det(A) = 0$. Par contraposition, si $\det(A) \neq 0$ alors A est inversible.

($\Rightarrow$) : Si A est inversible, alors $\operatorname{rg} A = n$. On peut, par transvections successives, se ramener à une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux a_1, a_2, ..., a_n sont tous non nuls.

D'où, $\det(A) = \prod_{k=1}^{n} a_k \neq 0$.

Exemples 2 : D'après l' exercice (5) ,

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ sont inversibles.
- $\begin{pmatrix} a & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & a & \ddots & (1) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (1) & \ddots & a & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & a \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si $a \neq 1$ et $a \neq 1 - n$.

Exercice 6 : Soit $m \in \mathbb{R}$. Pour les matrices suivantes :

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ m^2 & 1 & m \\ m & m^2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1-m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant et déterminer pour quelles valeurs de m la matrice est inversible.
2. Calculer B^{-1} et C^{-1} lorsque B et C sont inversibles.

I.6 Produit de matrices

Théorème 6 :

$$\forall\, \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B}).$$

Preuve :

- Si B est non inversible, alors $\mathrm{rg}\,\mathrm{B} < n$ et $\det(\mathrm{B}) = 0$.
  Comme $rg(\mathrm{AB}) \leqslant \min(\mathrm{rg}\,\mathrm{A}, \mathrm{rg}\,\mathrm{B}) < n$, on en déduit également que AB est non inversible.
  Par conséquent $\det(\mathrm{AB}) = 0 = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B})$.
- Si B est inversible, alors $\mathrm{rg}(\mathrm{B}) = n$ et, de même que précédemment, par transvection successives, on peut se ramener à une matrice diagonale $\Delta = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ avec a_1, a_2, $\cdots$, a_n non nuls.
  En notant T la matrice produit de ces transvections, on a donc $\mathrm{BT} = \Delta$ puis

$$\det(\mathrm{B}) = \det(\mathrm{BT}) = \det(\Delta) = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

Notons C_1, C_2, $\cdots$, C_n les colonnes de A, on a :
$\mathrm{ABT} = (\mathrm{C}_1|\mathrm{C}_2|\cdots|\mathrm{C}_n)\,\mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (a_1\mathrm{C}_1|a_2\mathrm{C}_2|\cdots|a_n\mathrm{C}_n)$.

$$\text{D'où, } \det(\mathrm{AB}) = \det\left(a_1\mathrm{C}_1|a_2\mathrm{C}_2|\cdots|a_n\mathrm{C}_n\right)$$

Usons de la linéarité de det par rapport à chacune des ses colonnes :

$$\begin{aligned} &= a_1 a_2 \cdots a_n \det(\mathrm{C}_1|\mathrm{C}_2|\cdots|\mathrm{C}_n) \\ &= \det(\mathrm{B}) \times \det(\mathrm{A}) \end{aligned}$$

ATTENTION $\det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \neq \det(\mathrm{A}) + \det(\mathrm{B})$.

Exercice 7 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A - I_n$.
Calculer $\det(A)$.

Remarques : Cette petite propriété a et aura de grandes conséquences notamment :

— $\det(AB) = \det(A) \times \det(B) = \det(B) \times \det(A) = \det(BA)$ alors que $AB \neq BA$ généralement.

Le déterminant , comme les polynômes d'endomorphismes, permet de récupérer un peu de commutativité.

— $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $\det(A^p) = (\det(A))^p$.

— $\forall\, P \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$, $\det(P^{-1}AP) = \det(A)$.

Autrement dit, deux matrices semblables ont le même déterminant. Comme la *trace*, le déterminant est donc un invariant de similitude.

Corollaire 6.1 :

$$\forall\, A \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K}), \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Preuve : Comme A est inversible alors $A^{-1}A = I_n$.
D'après le résultat précédent, $\det(A^{-1}A) = \det(I_n)$, i.e. $\det(A^{-1})\det(A) = 1$.

I.7 Transposée

Théorème 7 :

$$\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(A^\top) = \det(A).$$

Preuve :

– Si A est non inversible, alors $\operatorname{rg}(A) < n$.

La transposée n'ayant aucune influence sur le rang, on a aussi $\operatorname{rg}(A^\top) < n$: la transposée de A n'est donc pas inversible non plus.

En particulier, A et sa transposée ont toutes deux un déterminant nul. Égal donc !

– Si A est inversible, alors on peut par transvections successives (sur les colonnes) se ramener à une matrice diagonale à coefficients a_1, a_2, $\cdots$, a_n non nuls :

$$\Delta = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

On a encore $AT = \Delta$ et $\det(A) = \det(\Delta) = \prod_{k=1}^{n} a_k$.

Or, $(AT)^\top = T^\top A^\top \implies \det\left((AT)^\top\right) = \det(T^\top A^\top) = \det(T^\top) \times \det(A^\top) = \det(A^\top)$.

L'égalité $(AT)^\top = \Delta^\top (= \Delta)$ entraîne alors $\det(A^\top) = \det\left((AT)^\top\right) = \det(\Delta) = \det(A)$.

D'où, $\det(A^\top) = \det(A)$.

Exercice 8 : Calculer $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$ où $a,\, b \in \mathbb{K}$.

Conséquences : Toutes les propriétés vues sur les colonnes des déterminants sont donc valables sur les lignes.

En particulier,

Corollaire 7.1 :

1. Le déterminant est linéaire par rapport à chacune des lignes de la matrice.
2. Le déterminant d'une matrice dont une ligne est nulle est nul.
3. Le déterminant d'une matrice est changé en son opposé si l'on échange deux lignes distinctes.
4. Le déterminant d'une matrice dont deux lignes sont égales est nul.
5. On ne change pas le déterminant lorsqu'on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres.
6. Si les lignes de A forment une familles liée, alors le déterminant est nul.
7. Une transposition sur les lignes de A change le déterminant en son opposé.
$$\forall\, i \neq j,\ \det\left(\mathrm{L}_{i,j,n}\mathrm{A}\right) = -\det(\mathrm{A}).$$
8. Une dilatation par λ sur les lignes de A multiplie le déterminant par λ.
$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \det\left(\mathrm{H}_{i,n}(\lambda)\mathrm{A}\right) = \lambda \det(\mathrm{A}).$$
9. Une transvection sur les lignes de A ne change pas le déterminant.
$$\forall\, i \neq j,\ \lambda \in \mathbb{K},\ \det\left(\mathrm{T}_{i,j,n}(\lambda)\mathrm{A}\right) = \det(\mathrm{A}).$$

II Calculs de déterminants

II.1 Développement suivant une ligne ou une colonne

Lemme 1 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,n} \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} m_{2,2} & \cdots & m_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,2} & \cdots & m_{n,n} \end{vmatrix}_{n-1}.$$

Preuve : Soit $c \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$.

Considérons l'application $f: \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \mathrm{A} & \longmapsto & \begin{vmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ c & \mathrm{A} \end{vmatrix} \end{array}$ où $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} m_{2,2} & \cdots & m_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,2} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix}_n$.

En assimilant la matrice A au $(n-1)$-uplet de ses vecteurs colonnes, l'application f est également une forme multilinéaire antisymétrique et vérifiant $f(\mathrm{I}_{n-1}) = 1$ quel que soit le vecteur colonne c.
Par unicité d'une telle application, $f \equiv \det_{n-1}$.
Conclusion,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,n} \end{vmatrix}_n = f\begin{pmatrix} m_{2,2} & \cdots & m_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,2} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} m_{2,2} & \cdots & m_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,2} & \cdots & m_{n,n} \end{vmatrix}_{n-1}.$$

Remarque : On obtient un résultat analogue en transposant.

Définition 3 : Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on appelle *mineur d'indice* $(i\,;j)$ de A le déterminant $\Delta_{i,j}(\mathrm{A})$ de la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en rayant la ligne i et la colonne j de A

$$\Delta_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Théorème 8 : Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, $\det(\mathrm{A}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(\mathrm{A})$ par développement suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne,

$\forall\, j \in [\![1\,;n]\!]$, $\phantom{\det(\mathrm{A})} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(\mathrm{A})$ par développement suivant la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Preuve : Soit $\mathrm{A} = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On montre ce résultat sur la première formule. L'invariance du déterminant par la transposée donnant le second résultat.

Par linéarité par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne, on a :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

En composant à droite par $j-1$ matrices de transposition :

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{i,j} \begin{vmatrix} a_{1,j} & a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n,j} & a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

En composant à gauche par $i-1$ matrices de transposition :

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1}(-1)^{i-1} a_{i,j} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{1,j} & a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n,j} & a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

D'après le lemme (1) :

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j-2} a_{i,j}\, \Delta_{i,j}(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j}\, \Delta_{i,j}(A).$$

Exercice 9 : Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ en développant par rapport à la colonne 3 puis par rapport à la ligne 2.

II.2 Déterminant d'une matrice 3×3

Proposition 9 (Règle de Sarrus) :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{2,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{3,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix}$$

$$= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} \cdots$$
$$- a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}.$$

Preuve :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ \square & a_{2,2} & a_{2,3} \\ \square & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{2,1} \begin{vmatrix} \square & a_{1,2} & a_{1,3} \\ \square & \square & \square \\ \square & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{3,1} \begin{vmatrix} \square & a_{1,2} & a_{1,3} \\ \square & a_{2,2} & a_{2,3} \\ \square & \square & \square \end{vmatrix}$$

$$= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} \cdots$$
$$- a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}.$$

Exercice 10 : Soient a, b et c trois scalaires quelconques.

Calculer les déterminants suivants :

1 $\begin{vmatrix} bc & ac & ab \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2 $\begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ c & b & bc \end{vmatrix}$.

3 $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$.

4 $\begin{vmatrix} n! & (n-1)! & (n-2)! \\ (n-1)! & (n-2)! & (n-3)! \\ (n-2)! & (n-3)! & (n-4)! \end{vmatrix}$.

5 $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$.

6 $\begin{vmatrix} \mathrm{P}(a) & \mathrm{P}(a+1) & \mathrm{P}(a+2) \\ \mathrm{P}(b) & \mathrm{P}(b+1) & \mathrm{P}(b+2) \\ \mathrm{P}(c) & \mathrm{P}(c+1) & \mathrm{P}(c+2) \end{vmatrix}$ où $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$

III Déterminant d'un endomorphisme

III.1 Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base en dimension n

Dans un $\mathbb{K}$-ev E de dimension n, considérons une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E.

$\forall\, j \in [\![1\,;n]\!]$, il existe un unique n-uplet $(a_{1,j}, \dots, a_{n,j}) \in \mathbb{K}^p$ tel que $v_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}e_i$ et on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

Définition 4 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Pour toute famille $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_n)$ de n vecteurs de E, on appelle *déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$*, noté $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ le déterminant de la matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\det{}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right).$$

En reprenant les notations ci-dessous et en posant :

$$\mathrm{A} = (\mathrm{C}_1|\dots|\mathrm{C}_n) \quad \text{où} \quad \forall\, j \in [\![1\,;n]\!]\,,\ \mathrm{C}_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_j),\ \text{on a :}$$

$$\det{}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det{}_{\mathcal{B}}(\mathrm{C}_1|\dots|\mathrm{C}_n) = \det{}_{\mathcal{B}}(\mathrm{A}).$$

Exercice 11 : Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.
On considère $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$. Calculer $\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u}, \vec{v})$. Un commentaire ?

Exercice 12 : Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$, on considère la famille $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1\,;0\,;1)$, $v_2 = (2\,;1\,;3)$ et $v_3 = (1\,;4\,;2)$.
Déterminer $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$. Un commentaire ?

Proposition 10 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$.
L'application $\det_{\mathcal{B}} : \mathrm{E}^n \longmapsto \mathbb{K}$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $\det_{\mathcal{B}}$ est linéaire par rapport à chaque variable : $\det_{\mathcal{B}}$ est n-linéaire.
2. $\det_{\mathcal{B}}$ est antisymétrique : la transposition de deux vecteurs change $\det_{\mathcal{B}}$ en son opposé.
3. $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.
4. On ne change pas la valeur de $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ si on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres.
5. Si la famille $\mathcal{F}$ est liée, alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = 0$.

Théorème 11 (Caractérisation des bases) : Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, et $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E.

$$\mathcal{F} \text{ est une base de E} \iff \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$$

Preuve : Posons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_n)$ et considérons l'unique endomorphisme f de E défini par :

$$\forall\, j \in [\![1\,;n]\!]\,,\ f(e_j) = v_j.$$

Notons $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Par définition, on a :

$$\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\Big(f(e_1)|\dots|f(e_n)\Big) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\Big(v_1|\dots|v_n\Big) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\Big(\mathcal{F}\Big).$$

Profitons alors de tout le travail et chemin accompli :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \text{ est une base de E} &\iff f \text{ transforme la base } \mathcal{B} \text{ en une base de E.}\\
&\iff f \text{ est bijective.}\\
&\iff \mathrm{A} \text{ est inversible.}\\
&\iff \det(\mathrm{A}) \neq 0.\\
&\iff \det\Big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\Big) \neq 0\\
&\iff \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0.
\end{aligned}$$

Exercice 13 : Justifier que la famille $\mathcal{F}$ de l' exercice (12) est une base de $\mathbb{R}^3$.

III.2 Déterminant d'un endomorphisme en dimension finie

Définition/Théorème 5 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et f un endomorphisme de E.

Le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$ est indépendant de la base $\mathcal{B}$ de E.

On l'appelle le *déterminant de* f et on le note $\det(f)$.

Remarque : Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, alors :

$$\det(f) = \det(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Ainsi, $|\det(f)|$ est le coefficient par lequel f multiplie les volumes.

Exemples 3 :

- $\det(\mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \det(\mathrm{Id}_\mathrm{E}(e_1), \dots, \mathrm{Id}_\mathrm{E}(e_n)) = \det(e_1, \dots, e_n) = 1$.
- $\det(\lambda \mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \det(\lambda e_1, \dots, \lambda e_n) = \lambda^n$.
- Soit p la projection sur F dans la direction de $\mathrm{G} \neq \{0_\mathrm{E}\}$.

  En prenant $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base adaptée à la somme direct $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \det(p) &= \det(p(e_1), \dots, p(e_p), p(e_{p+1}), \dots, p(e_n)) \\ &= \det(e_1, \dots, e_p, 0_\mathrm{E}, \dots, 0_\mathrm{E}) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

- Soit s la symétrie par rapport à F dans la direction de G. $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base adaptée à la somme direct $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \det(s) &= \det(s(e_1), \dots, s(e_p), s(e_{p+1}), \dots, s(e_n)) \\ &= \det(e_1, \dots, e_p, -e_{p+1}, \dots, -e_n) \\ &= (-1)^{n-p}. \end{aligned}$$

Preuve : Posons $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.

Alors $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \cdots, f(e_n)) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)$.

Si on considère une autre base $\mathcal{B}'$ de E et P la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a :

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\mathrm{P} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}'}\left(f(\mathcal{B}')\right) &= \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)\right) \\ &= \det\left(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\mathrm{P}\right) \\ &= \det(\mathrm{P}^{-1})\det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)\det(\mathrm{P}) \\ &= \frac{1}{\det(\mathrm{P})}\det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)\det(\mathrm{P}) \\ &= \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right) \\ &= \det_{\mathcal{B}}\left(f(\mathcal{B})\right). \end{aligned}$$

Proposition 12 : Soient $f, g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

$$\det(g \circ f) = \det(g) \times \det(f).$$

Preuve : Soit $\mathscr{B}$ une base de E.
On note $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $\mathrm{B} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$.
Alors,

$$\begin{aligned}\det(g \circ f) &= \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g \circ f)) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)) \\ &= \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)) \times \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)) = \det(g)\det(f).\end{aligned}$$

Théorème 13 (Caractérisation des automorphismes) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, et f une application linéaire de E.

$$f \text{ est un isomorphisme de E} \iff \det(f) \neq 0.$$

Dans ce cas, $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$.

Preuve : Soit $\mathscr{B}$ une base de E.
On note $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

$$\begin{aligned} f \text{ est un isomorphisme de E} &\iff \text{A est inversible} \\ &\iff \det(\mathrm{A}) \neq 0 \\ &\iff \det(f) \neq 0.\end{aligned}$$

Si f est bijective alors $\det(\mathrm{A}) \in \mathbb{K}^*$, et on a :

$$\det(f^{-1}) = \det(\mathrm{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathrm{A})} = \frac{1}{\det(f)}.$$

Exercice 14 : Calculer le déterminant des endomorphismes suivants :

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{XP}' + \mathrm{P} \end{array}$

2. $\mathrm{T} : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M}^\top \end{array}$

IV Applications

IV.1 Systèmes linéaires

Rappel 6 : On considère un système linéaire $AX = B$ de n equations à n inconnues, avec $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Le système $AX = B$ est dit de Cramer s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

(*i.*) A est de rang n.
(*ii.*) $A \sim_L I_n$.
(*iii.*) $A \sim_C I_n$.
(*iv.*) $A \in \mathscr{G}l(\mathbb{K})$.
(*v.*) Pour tout $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.
(*vi.*) Pour tout $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.
(*vii.*) Le système $AX = 0_{n,1}$ admet une unique solution.

L'unique solution de ce système est alors $X = A^{-1}B$.

Théorème 14 : Le système linéaire $AX = B$ est de Cramer si, et seulement si $\det(A) \neq 0$.

On donne a présent des formules précisant la solution unique d'un tel système.

Proposition 15 (Formules de Cramer (Hors-Programme)) : Pour toute matrice carrée inversible $A \in \mathscr{G}l(\mathbb{K})$, la solution $X = (x_1, \dots, x_n)$ du système de Cramer $AX = B$ est donnée par :

$$\forall\, k \in [\![1\,;n]\!]\,, \quad x_k = \frac{\det\left(C_1(A), \dots, \overset{\text{position } k}{\overset{\downarrow}{B}}, \dots, C_n(A)\right)}{\det(A)}.$$

Preuve : L'unique solution X du système de Cramer $AX = B$ vérifie :

$$x_1C_1 + \dots + x_nC_n = B.$$

On obtient alors (avec B en position k) :

$$\begin{aligned}\det\left(C_1, \dots, \overset{\text{position } k}{\overset{\downarrow}{B}}, \dots, C_n\right) &= \det\left(C_1, \dots, \sum_{j=1}^{n} x_jC_j, \dots, C_n\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j\det\left(C_1, \dots, C_j, \dots, C_n\right)\\ &= x_k\det\left(C_1, \dots, C_k, \dots, C_n\right)\\ &= x_k\det(A).\end{aligned}$$

Comme $\det(A) \neq 0$, on obtient le résultat souhaité.

Exercice 15 : À l'aide des formules de Cramer, résoudre le système :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 7 \\ -3x_1 + x_3 & = -8 \\ x_2 + 2x_3 & = -3 \end{cases}.$$

IV.2 Équation des hyperplans vectoriels

Théorème 16 : Soit E de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$ et $\mathrm{H} = \mathrm{vect}\,(v_2, \dots, v_n)$ un hyperplan de E.

Alors, pour tout $v \in \mathrm{E}$:

$$v \in \mathrm{H} \iff \det{}_{\mathcal{B}}(v, v_2, \dots, v_n) = 0.$$

Preuve : Tout d'abord, notons que $(v_2, \dots, v_n)$ est une famille libre par hypothèse.
Dès lors, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \det{}_{\mathcal{B}}(v, v_2, \dots, v_n) = 0 &\iff (v, v_2, \dots, v_n) \text{ est liée} \\ &\iff v \in \mathrm{vect}\,(v_2, \dots, v_n) = \mathrm{H}. \end{aligned}$$

Remarque : Ainsi H est le noyau de la forme linéaire non nulle :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ v & \longmapsto & \det{}_{\mathcal{B}}(v, v_2, \dots, v_n) \end{array}$$

et H est défini par l'équation linéaire $\varphi(v) = 0$.

Exercice 16 : Déterminer l'équation cartésienne :

1. du plan vectoriel dirigé par les vecteurs $v_1 = (1\,;0\,;-1)$, et $v_2 = (1\,;1\,;1)$.
2. du plan passant par les points $\mathrm{A}\,(1\,;0\,;0)$, $\mathrm{B}\,(0\,;1\,;0)$ et $\mathrm{C}\,(0\,;0\,;1)$.