

Déterminants

Exercice 1 : Calculer les déterminants suivants :

$$\boxed{1} \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{2} \quad \begin{vmatrix} 84 & 8 & 4 \\ 35 & 3 & 5 \\ 62 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{3} \quad \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$$

où ω est une racine cubique de l'unité.

$$\boxed{4} \quad \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{5} \quad \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{6} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{7} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{8} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{9} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{10} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{11} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{12} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

$$\boxed{13} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{14} \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{15} \quad \begin{vmatrix} 10 & 0 & -5 & 15 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{16} \quad \begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{vmatrix}$$

$$\boxed{17} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$\boxed{18} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{19} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{20} \quad \begin{vmatrix} 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{21} \quad \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$$

$$\boxed{22} \quad \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.$$

$$\boxed{23} \quad \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}.$$

$$\boxed{24} \quad \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}.$$

$$\boxed{25} \quad \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \\ ab & a^2 & b^2 \end{vmatrix}.$$

$$\boxed{26} \quad \begin{vmatrix} a & b & (0) \\ c & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{vmatrix}.$$

$$\boxed{27} \quad \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}.$$

$$\text{[28]} \quad \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{p} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n+p}{0} & \binom{n+p}{1} & \cdots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix}.$$

$$\text{[29]} \quad \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & \cdots & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & b_2 & \cdots & b_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & \cdots & \cdots & b_n & a_n + b_n \end{vmatrix}.$$

$$\text{[30]} \quad \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & \cdots & a_1 - b_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_n - b_1 & \cdots & a_n - b_n \end{vmatrix}, (n \geq 3).$$

$$\text{[31]} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}.$$

$$\text{[32]} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & 2 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Pour [26] : Chercher une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. On notera α et β les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation caractéristique, et on exprimera le déterminant en fonction de α et β .

Exercice 2 : Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1, 2, -1)$, $v = (3, 0, m)$ et $w = (m, 1, 1)$.

Déterminer les valeurs du réel m tel que (u, v, w) soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 : On note pour $(a, b, c, x) \in \mathbb{R}^4$ et $D(x) = \begin{vmatrix} \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ \sin(x+a) & \sin(x+b) & \sin(x+c) \\ \sin(b-c) & \sin(c-a) & \sin(a-b) \end{vmatrix}.$

Montrer que $D(x)$ ne dépend pas de x , et que $D(x) \leq 0$.

Exercice 4 : Calculer $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & \cdots & n \\ n & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 3 & 4 & \ddots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}$

Exercice 5 : Calculer les déterminants suivants (les premiers de taille n et le troisième $2n$)

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (0) \quad \delta_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & \cdots & b & b \\ b & b & a & & b & b \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ b & b & b & & a & b \\ b & b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix} \quad \Delta_{2n} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & 0 & & b & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & b & 0 & & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

Exercice 6 : Calculer le déterminant de :

[1] $A = (a^{\min(i,j)})_{1 \leq i, j \leq n}$;

[3] $C = (\delta_{i+j, n+1})_{1 \leq i, j \leq n}$.

[4] $(\text{sh}(a_i + a_j))_{1 \leq i, j \leq n}$

[2] $B = (|i-j|)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Exercice 7 (Déterminant de Hurwitz) : Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $b \neq c$.

On considère $D(a, b, c) = \begin{vmatrix} a & (b) \\ & \ddots \\ (c) & a \end{vmatrix}$

- [1] Montrer que $D(a + X, b + X, c + X) \in \mathbb{R}_1[X]$.
 [2] En déduire $D(a + X, b + X, c + X)$ puis $D(a, b, c)$.

Exercice 8 (Déterminant de Vandermonde [1]) : Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $a_1, \dots, a_n$ n éléments d'un corps $\mathbb{K}$.

On appelle déterminant de Vandermonde l'élément de $\mathbb{K}$ défini par :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \det \left((a_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n} \right) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Montrer que, $\forall n \geq 2$, $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.

[1]. Alexandre-Théophile Vandermonde (parfois appelé Alexis-Théophile), né à Paris le **28 février 1735** et mort à Paris le **1^{er} janvier 1796**, est un mathématicien français. Il fut aussi économiste, musicien et chimiste, travaillant notamment avec Étienne Bézout et Antoine Lavoisier. Son nom est maintenant surtout associé à une matrice et son déterminant.