Chapitre I

Logique et Raisonnement

CONTENU

I/ Terminologie mathématique

I.1 Énoncé

Définition 1 (Objets) : Les *objets* mathématiques sont les éléments des ensembles de base (nombres, vecteurs, points) et les diverses constructions faites à partir de ces objets, comme les ensembles, les listes, les relations, les fonctions, les opérations.

ATTENTION N'oubliez jamais que le symbole « = » est un signe fort et qu'il ne doit être employé qu'entre deux objets rigoureusement identiques.

Définition 2 (Assertion) : On appelle *proposition* (ou assertion) toute phrase $\mathcal{P}$ dont on peut dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Une proposition toujours vraie est appelée une *tautologie* [1].

Exemples 1 :

— $3+5$ est un objet mathématique, $3+5=8$ est un énoncé mathématique.

— « 2 est pair », « 3 est pair » ou encore « π est un entier » sont des énoncés qu'ils soient vrais ou faux.

— Les phrases : « Bonjour ! », « $\cos x + x^2$ », « Cette assertion est fausse. », « Quel jour sommes-nous ? », ... ne sont pas des assertions.

Vocabulaire : Lorsqu'une proposition dépend d'une variable x appartenant à un ensemble E, on pourra la noter $\mathcal{P}(x)$ et on parle alors plutôt de *prédicat*.

Exemples 2 :

— Si on pose $\mathcal{P}(x) : x > 1$, alors $\mathcal{P}(2)$ est vraie, $\mathcal{P}(-1)$ est fausse.

— $\mathcal{P}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$: « le triangle ABC est rectangle en A » est un prédicat sur l'ensemble des triplets $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$ de points du plan.

— Si on pose $\mathcal{P}(n)$: « n est un nombre premier », alors $\mathcal{P}(7)$ est vraie, $\mathcal{P}(8)$ est fausse.

Remarque : L'ensemble E sera, suivant les cas, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou un sous-ensemble de l'un de ces ensembles ($\mathbb{N}^*$, $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 = 9\}$, $]-3\,;3[$, ...).

I.2 Quantificateurs ou connecteurs logiques

Les connecteurs logiques permettent de « fabriquer » des propositions plus complexes à partir de propositions élémentaires.

Définition 3 (Le quantificateur universel $\forall$) : Le symbole $\forall$ placé devant une variable x signifie « quel que soit x ».

Ainsi la proposition « $\forall x \in \mathrm{E}, \mathcal{P}(x)$ » se lit « quel que soit x appartenant à l'ensemble E, $\mathcal{P}(x)$ est vraie ».

[1]. du grec $\tau\alpha\grave{\upsilon}\tau o\lambda o\gamma\iota\alpha$, composé de $\tau\alpha\grave{\upsilon}\tau\acute{o}$, « la même chose », et $\lambda\acute{\epsilon}\gamma\omega$, « dire » : le fait de redire la même chose donc apparenté à la lapalissade en français courant.

Remarque : « $\forall\, x \in \mathrm{E},\ \mathcal{P}(x)$ » est synonyme de « $\forall\, x,\ \Big(x \in \mathrm{E} \implies \mathcal{P}(x)$ est vraie$\Big)$ ».

Exemples 3 :

— L'énoncé mathématique « $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n^2 \geqslant n$ » se lit « pour tout entier naturel n, ... »

— La commutativité de l'addition dans $\mathbb{R}$ s'écrit :

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y = y+x,$$

et se lit « pour tout couple de réels $(x\,;y)$, ... ».

— « f est positive sur l'intervalle I » se traduit par $\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) \geqslant 0$.

Définition 4 (Le quantificateur existentiel $\exists$) :

— Le symbole $\exists$ placé devant une variable x signifie « il existe (au moins) un x ».

La proposition « $\exists\, x \in \mathrm{E},\ \mathcal{P}(x)$ » se lit donc « il existe un élément x de E tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie ».

— Le symbole $\exists\,!$ placé devant une variable x signifie « il existe un unique x ».

La proposition « $\exists\,!\, x \in \mathrm{E},\ \mathcal{P}(x)$ » se lit donc « il existe un unique élément x de E tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie ».

Remarque : « $\exists\, x \in \mathrm{E},\ \mathcal{P}(x)$ » est synonyme de « $\exists\, x,\ \Big(x \in \mathrm{E}$ et $\mathcal{P}(x)$ est vraie$\Big)$ ».

Exemples 4 :

— Tout nombre réel positif peut s'écrire comme le carré d'un nombre s'écrit en langage mathématique :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \exists\, y \in \mathbb{R} \,/\, x = y^2.$$

— Soit $f:\ \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$. Pour exprimer le fait que la fonction f s'annule sur $\mathbb{R}$, on écrit :

$$\exists\, x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) = 0.$$

Pour exprimer que f ne s'annule qu'une seule fois :

$$\exists\,!\, x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) = 0.$$

Remarque : L'ordre des quantificateurs est important. On peut le constater en comparant par exemple les propositions :

$$\text{« } \forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R}_+ \,/\, x^2 = y \text{ » et « } \exists\, y \in \mathbb{R}_+, \forall\, x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 = y \text{ ».}$$

Proposition 1 (Inversion des quantificateurs) :

— $\exists\, x,\ \exists\, y,\ \mathcal{P}(x,y)$ est équivalent à dire $\exists\, y,\ \exists\, x,\ \mathcal{P}(x,y)$

— $\forall\, x,\ \forall\, y,\ \mathcal{P}(x,y)$ est équivalent à dire $\forall\, y,\ \forall\, x,\ \mathcal{P}(x,y)$

On peut donc intervertir des symboles identiques.

Exemple 5 : Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

— $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ x^2+y^2 \geqslant 0.$

— $\forall\, y \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2+y^2 \geqslant 0.$

ATTENTION En général, on ne peut intervertir les symboles $\forall$ et $\exists$ sans changer le sens de la formule.

Contre-Exemple 6 : Les deux propositions suivantes ne sont pas équivalentes :

— $\forall x \in \mathrm{I},\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* \,/\ \ \forall y \in \mathrm{I},\ |x-y| < \alpha \implies |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$

— $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* \,/\, \forall x \in \mathrm{I},\ \forall y \in \mathrm{I},\ |x-y| < \alpha \implies |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$

Remarque : Dans la première assertion, on noterait plutôt $\alpha\,(\varepsilon\,;x)$ pour montrer la dépendance de α à ε ET x.

ATTENTION

— Dans une assertion du type $\forall x \in \mathrm{E},\ \exists y \in \mathrm{F},\ \mathcal{P}(x,y)$, y **dépend** de x. On le note alors souvent $y(x)$.

Il faut comprendre que la lecture se fait, dans l'ordre,

1. pour n'importe quel élément fixé de E, appelé x
2. on peut trouver un objet y dans F (dépendant de x) tel que $\mathcal{P}(x,y)$ soit vrai.

— Dans une assertion du type $\exists y \in \mathrm{F},\ \forall x \in \mathrm{E},\ \mathcal{P}(x,y)$, y est **indépendant** de x.

Il faut comprendre que

1. un certain élément particulier, noté y, dans E
2. rend vraie la propriété $\mathcal{P}(x,y)$ pour tout x de E.

Exercice 1 : Écrire en langage formalisé :

1. L'équation $\cos x = 0$ possède au moins une solution réelle.
2. L'entier n est un multiple de 3.
3. L'entier n est un carré (parfait).
4. Les courbes des fonctions f et g ont un unique point en commun.
5. La définition d'une fonction continue en un point a d'un intervalle de $\mathbb{R}$.
6. La définition d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente en $\ell \in \mathbb{R}$.

I.3 Texte mathématique

Un texte mathématique est constitué de :

1. Définitions : On appelle définition toute manière d'accorder un nom jusqu'ici inusité à un objet vérifiant une certaine propriété. Une définition crée ainsi une classe d'objets.

Définition 5 (Fonction croissante) : Soient I un intervalle et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que f est *croissante* sur I si $\forall x, y \in \mathrm{I},\ x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$.

Remarque : L'équivalence est utilisée de façon plus ou moins implicite dans les définitions. Par exemple dans la phrase ci-dessus, il est sous-entendu que, réciproquement, si f est une fonction croissante sur I alors $\forall x, y \in \mathrm{I},\ x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$.

2. **Résultats :** des énoncés mettant en jeu les objets définis dans la théorie, et donnant des propriétés vérifiées par ces objets.

   On distingue :

   les axiomes : Dans une théorie formelle quelconque, mathématique ou non, on appelle axiomes les propositions que la théorie tient pour vraies sans justification comme points de départ.

   les théorèmes : les résultats les plus significatifs, démontrés à partir des axiomes et de résultats démontrés antérieurement ;

   les propositions : des résultats de moindre envergure ;

   les lemmes : des résultats à voir comme des étapes vers des résultats plus consistants (résultats préliminaires, mais pouvant avoir leur intérêt en soi)

   les corollaires : des conséquences assez immédiates d'autres résultats, par exemple des cas particuliers intéressants ;

   les caractérisations : On appelle caractérisation tout théorème sur une notion qui donne une condition équivalente à la définition de cette notion. Une caractérisation est donc, au fond, ce qu'on pourrait appeler une « redéfinition » mais bien souvent plus pratique.

Théorème 2 (Caractérisation des fonctions dérivables croissantes) :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

$$f \text{ est croissante sur I si, et seulement si } f' \text{ est positive sur I.}$$

Remarque :

Il y a trois conditions dans cet énoncé :

(a) bien sûr, $f' \geqslant 0$, que personne n'oublie ;
(b) mais aussi f dérivable sur I (sans laquelle l'énoncé n'a pas de sens),
(c) et, plus souvent oubliée, le fait que I est un intervalle (sans quoi le résultat est faux !).

3. Démonstrations : des justifications de la véracité des résultats.
4. **Conjectures :** des énoncés qu'on pense être vrais, mais qu'on n'a pas encore réussi à prouver.

II/ Notions de logique formelle

II.1 Proposition contraire

Définition 6 (Négation) : La proposition *contraire* de $\mathcal{P}$, notée (non $\mathcal{P}$) ou $\rceil\mathcal{P}$ et appelée « négation de $\mathcal{P}$ », est la proposition qui est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse et qui est fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie.

$\mathcal{P}$	non $\mathcal{P}$
V	F
F	V

Figure I.1 – Table de vérité de la négation.

Prouver qu'une proposition est vraie est donc équivalent à prouver que sa négation est fausse. C'est le principe du **raisonnement par l'absurde**.

Exemples 7 : Les deux propositions suivantes sont contraires l'une de l'autre :
— Quel que soit x, $\mathcal{P}(x)$ est vraie, ou $\forall\, x,\ \mathcal{P}(x)$.
— Il existe un x tel que $\mathcal{P}(x)$ est faux, ou $\exists\, x,\ \rceil\mathcal{P}(x)$.

Méthode 1 (Négation d'une proposition) :
Pour nier une proposition, on échange les quantificateurs $\forall$ par $\exists$ et $\exists$ par $\forall$, puis on nie la conclusion.

Exercice 2 : Donner la négation des propositions suivantes :
1. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x - 2 = 0$.
2. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}_+, x^2 = y$.
3. $\exists\, \mathrm{M} \in \mathbb{R}_+, \forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) < \mathrm{M}$.

Méthode 2 (Du bon usage du contre-exemple) :
Soit une proposition du type $\forall\, x \in \mathrm{E},\ \mathcal{P}(x)$ où E est un ensemble.
— Pour montrer que l'assertion $\mathcal{P}$ est vraie, il suffit de montrer que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tous les x de E.
— Pour montrer que l'assertion $\mathcal{P}$ est fausse, il suffit de trouver un x de E pour laquelle $\mathcal{P}(x)$ soit fausse. Un tel x est appelé *contre-exemple* à la proposition $\forall\, x \in \mathrm{E},\ \mathcal{P}(x)$.

Exercice 3 :
1. L'assertion « Tout entier positif est la somme de trois carrés (d'entiers) » est-elle vraie ?
2. Même question avec l'assertion « Toute suite croissante est divergente vers $+\infty$ ».

II.2 Conjonction et Disjonction

Définition 7 : Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.
— La proposition ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$), notée $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$, appelée *conjonction* de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, est vraie lorsque les deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies, fausse dans le cas contraire.
— La proposition ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$), notée $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$, appelée *disjonction* de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, est vraie lorsque l'une au moins des deux propositions $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ est vraie, fausse dans le cas contraire.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Figure I.2 – Table de vérité des connecteurs logiques

— Pour montrer que la proposition $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ est vraie, il suffira donc de prouver que les deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies.
— Pour montrer que la proposition $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ est vraie, il suffira donc de prouver que l'une des deux propositions $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ est vraie (ou que les deux le sont).

Remarque : On prendra garde au fait que le « ou » logique est un « ou » inclusif, contrairement au « ou » du langage courant qui lui est exclusif (par exemple dans « Fromage ou Dessert »).

Exercice 4 : Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^3 - x > 0$.

Vérifier que la proposition « $x > 1$ ou $-1 < x < 0$ » est vraie.

Proposition 3 (Propriété de $\wedge$ et $\vee$) :
Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ des propositions. On a les équivalences entre :

— $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}$.
— $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R}$ et $\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$.
— $\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$ et $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{P} \vee \mathcal{R})$
— $\rceil(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})$ et $\rceil\mathcal{P} \vee \rceil\mathcal{Q}$
— $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \vee \mathcal{P}$.
— $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R}$ et $\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$.
— $\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$ et $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{P} \wedge \mathcal{R})$.
— $\rceil(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$ et $\rceil\mathcal{P} \wedge \rceil\mathcal{Q}$.

Conjonction et disjonction sont donc associatives, commutatives et distributives l'une sur l'autre.

Méthode 3 (Démonstration d'une conjonction ou d'une disjonction) :
— Pour prouver une conjonction $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$, on prouve en deux temps : on prouve $\mathcal{P}$, puis on prouve $\mathcal{Q}$.
— Pour prouver une disjonction $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$, on prouve que $\rceil\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$, ce qui revient à supposer que $\mathcal{P}$ n'est pas vraie, et à en déduire que $\mathcal{Q}$ est vraie.

  Par commutativité de la disjonction, on peut, bien sûr, intervertir $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

II.3 Implications (Si ... alors ...)

On dit qu'une proposition $\mathcal{P}$ « implique » une proposition $\mathcal{Q}$ si, et seulement si $\mathcal{Q}$ est vraie chaque fois que $\mathcal{P}$ est vraie.

Exemple 8 : Posons $\mathcal{P} : 1 = 2$ et $\mathcal{Q} : 2 = 3$.

Si $\mathcal{P}$ est vraie alors $1 + 1 = 2 + 1$ donc $\mathcal{Q}$.

Cela revient à dire qu'il est impossible qu'on ait $\mathcal{P}$ vraie sans avoir $\mathcal{Q}$ vraie également.

Autrement dit, $\mathcal{P} \wedge \rceil\mathcal{Q}$ est une contradiction *i.e.* $\rceil(\mathcal{P} \wedge \rceil\mathcal{Q})$ est une tautologie.

Mais en utilisant les équivalences usuelles, cela revient à $(\rceil\mathcal{P}) \vee \mathcal{Q}$ tautologie ou finalement, ce qui est encore équivalent $\mathcal{Q} \vee \rceil\mathcal{P}$ tautologie.

Cela nous conduit à poser la définition suivante :

Définition 8 (Implication) : Soient deux propositions logiques $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

L'assertion $(\mathcal{Q} \vee \rceil\mathcal{P})$ est notée $(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q})$ et on dit que $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$.

On dit alors que $\mathcal{P}$ est une condition *suffisante* de $\mathcal{Q}$ et que $\mathcal{Q}$ est une condition *nécessaire* de $\mathcal{P}$.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Figure I.3 – Table de vérité de l'implication.

Remarques :

— Pour montrer que la proposition $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ est vraie, il suffira donc de supposer de $\mathcal{P}$ est vraie et montrer que, sous cette condition, $\mathcal{Q}$ est vraie.

— Pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie, il suffit que $\mathcal{P}$ soit vraie.

— Pour que $\mathcal{P}$ soit vraie, il faut que $\mathcal{Q}$ soit vraie mais ce n'est pas suffisant (troisième ligne de la table de vérité).

Exemple 9 : Soit $x \in \mathcal{R}$, si $x > 1$ alors $x^2 > 1$ est une proposition vraie.

— Pour que $x^2 > 1$ soit vraie, il suffit que la condition $x > 1$ soit vérifiée mais elle n'est pas nécessaire :

$x = -2$ donne aussi $x^2 > 1$ et pourtant $x < 1$

— Pour que $x > 1$, il est nécessaire que la condition $x^2 > 1$ soit vérifiée.

En effet, si $x^2 \leqslant 1$ alors $-1 \leqslant x \leqslant 1$ mais la condition $x^2 > 1$ n'est pas suffisante ($x = -2$).

Exercice 5 : Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il faut qu'il ait 3 angles droits.
2. Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il suffit qu'il ait 3 angles droits.
3. Une condition nécessaire pour qu'un quadrilatère soit un carré est que ses diagonales soient perpendiculaires.
4. Une condition suffisante pour qu'un quadrilatère soit un carré est que ses diagonales soient perpendiculaires

Enfin, il faut bien prêter attention aux deux dernières lignes de la figure (I.3) : une hypothèse fausse conduit à tous les résultats possibles :

• **« Faux $\implies$ Faux » est vraie :**

Remarque : La phrase : « si tu es le pape, alors je suis la reine d'Angleterre est donc vraie » [2].

• **« Faux $\implies$ Vrai » est vraie :** un petit exemple :

$$(2 = 3 \text{ et } 2 = 1) \implies 2 + 2 = 3 + 1 \implies 4 = 4.$$

L'affirmation de départ est fausse et on en déduit par un raisonnement tout à fait juste, une affirmation vraie.

On dit aussi qu'à partir du faux, on démontre n'importe quoi !

ATTENTION On verra plus loin que la négation d'une implication n'est pas une implication mais une conjonction *i.e.* un « et ».

[2]. sauf si tu es vraiment le pape et que je ne suis pas la reine d'Angleterre.

Exercice 6 (Le missionnaire et les cannibales) : Les cannibales d'une tribu se préparent à manger un missionnaire. Désirant lui prouver une dernière fois leur respect de la dignité et de la liberté humaine, les cannibales proposent au missionnaire de décider lui-même de son sort en faisant une courte déclaration : si celle-ci est vraie, le missionnaire sera rôti, et il sera bouilli dans le cas contraire. Que doit dire le missionnaire pour sauver sa vie ?

Proposition 4 (Transitivité) :
L'implication est *transitive i.e.*

$$\text{Si } \left(\mathscr{P} \implies \mathscr{Q}\right) \text{ et } \left(\mathscr{Q} \implies \mathscr{R}\right) \text{ sont vraies alors } \left(\mathscr{P} \implies \mathscr{R}\right) \text{ est vraie.}$$

Définition 9 (Contraposée et réciproque) : Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux propositions.

— L'implication (non $\mathscr{Q}$) $\implies$ (non $\mathscr{P}$), notée $\rceil\mathscr{Q} \implies \rceil\mathscr{P}$, est appelée la contraposition ou la *contraposée* de $\mathscr{P} \implies \mathscr{Q}$.
— L'implication $\mathscr{Q} \implies \mathscr{P}$ est appelée l'implication *réciproque* de $\mathscr{P} \implies \mathscr{Q}$.

ATTENTION Une implication et sa réciproque peuvent très bien avoir des valeurs de vérité différentes, ou l'une être évidente et l'autre pas.

Exemple 10 :

— La contraposée de la proposition « la nuit, tous les chats sont gris » est « Si au moins un chat n'est pas gris, alors il fait jour ».
— Sa réciproque est « Si tous les chats sont gris, alors il fait nuit ».

Exercice 7 : Citer des propositions dont la réciproque est fausse.

II.4 Équivalence (...si, et seulement si ...)

Définition 10 (Équivalence) : Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux propositions.

On dit que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont équivalentes et on note $\mathscr{P} \iff \mathscr{Q}$ lorsque les propositions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ ont les mêmes valeurs de vérité.

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \iff \mathscr{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

$\mathscr{P} \implies \mathscr{Q}$	$\mathscr{Q} \implies \mathscr{P}$	$(\mathscr{P} \implies \mathscr{Q}) \wedge (\mathscr{Q} \implies \mathscr{P})$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Figure I.4 – Table de vérité de l'équivalence.

En particulier, $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont équivalentes lorsqu'on a, à la fois, $\mathscr{P} \implies \mathscr{Q}$ et $\mathscr{Q} \implies \mathscr{P}$.

ATTENTION Lorsque l'on écrit $\mathscr{P} \iff \mathscr{Q}$ cela sous-entend « $\mathscr{P} \iff \mathscr{Q}$ est vraie » mais nullement que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ le soient. Les propositions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ seront seulement vraies ou fausses en même temps.

Vocabulaire : Lorsque $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont équivalentes, on dit que $\mathscr{P}$ est vraie *si, et seulement si* $\mathscr{Q}$ est vraie.

On dit aussi que $\mathscr{P}$ est une condition *nécessaire et suffisante* (CNS) de $\mathscr{Q}$ ou encore que pour que $\mathscr{Q}$ soit vraie, il faut et il suffit que $\mathscr{P}$ soit vraie.

Exercice 8 : Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\iff$, $\Longleftarrow$, $\Longrightarrow$.

1. $x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 4 \ \dots \ x = 2$;
2. $z \in \mathbb{C} \quad z = \overline{z} \ \dots \ z \in \mathbb{R}$;
3. $x \in \mathbb{R} \quad x = \pi \ \dots \ e^{2ix} = 1$.

Théorème 5 :
Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux propositions.

L'implication $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$ et sa contraposée sont équivalentes [3]. Autrement dit :

$$(\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}) \iff (\rceil\mathscr{Q} \Longrightarrow \rceil\mathscr{P}).$$

Exercice 9 : Montrer que $\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x \neq -1 \text{ et } y \neq -1) \Longrightarrow (x + xy + y \neq -1).$$

Méthode 4 (Équivalence par implications tournantes) :
D'après la proposition (4) pour démontrer que n énoncés $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$, ...$\mathscr{P}_n$ sont équivalents, il suffit de démontrer les n implications :

$$\mathscr{P}_1 \Longrightarrow \mathscr{P}_2 \Longrightarrow \dots \Longrightarrow \mathscr{P}_n \Longrightarrow \mathscr{P}_1.$$

II.5 Négation d'énoncés

Proposition 6 :
Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux propositions. Alors :

— non (non $\mathscr{P}$) $\iff \mathscr{P}$.
— non ($\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$) $\iff$ (non $\mathscr{P}$) ou (non $\mathscr{Q}$), **(Loi de Morgan [4])**
— non ($\mathscr{P}$ ou $\mathscr{Q}$) $\iff$ (non $\mathscr{P}$) et (non $\mathscr{Q}$), **(Loi de Morgan)**
— non ($\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$) $\iff \mathscr{P}$ et (non $\mathscr{Q}$).
— non ($\mathscr{P} \iff \mathscr{Q}$) $\iff$ ($\mathscr{P} \iff$ (non $\mathscr{Q}$)) $\iff$ ((non $\mathscr{P}$) $\iff \mathscr{Q}$).

[3]. On parle de *modus tollens* du latin : « procédé qui nie en niant ».
[4]. **Auguste (ou Augustus) De Morgan** (27 juin 1806 à Madurai (Tamil Nadu) - 18 mars 1871) est un mathématicien et logicien britannique. Il est le fondateur avec Boole de la logique moderne.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$	$\rceil(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q})$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	F

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\rceil\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge (\rceil\mathcal{Q})$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

Figure I.5 – Négation d'une implication.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$	$\rceil(\mathcal{P} \iff \mathcal{Q})$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	V	F

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\rceil\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \iff \rceil\mathcal{Q}$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	F

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\rceil\mathcal{P}$	$\rceil\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	F

Figure I.6 – Négation d'une équivalence.

Exemple 11 : La négation de « la nuit, tous les chats sont gris » est « la nuit, il existe au moins un chat qui n'est pas gris ».

Exercice 10 : Nier la proposition : « tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans ».

III/ Exemples de raisonnements

III.1 Démonstration d'une implication $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$

Trois types de raisonnements peuvent être mis en œuvre :

1. **Raisonnement direct :** $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$.

   La rédaction commencera systématiquement par « Supposons que $\mathcal{P}$ est vraie … »
2. **Raisonnement par contraposition :** (non $\mathcal{Q}$) $\implies$ (non $\mathcal{P}$).

   La rédaction commencera par « Supposons que $\mathcal{Q}$ n'est pas vérifiée … »
3. **Raisonnement par l'absurde :** $\mathcal{P}$ et (non $\mathcal{Q}$) conduisent à une contradiction.

   La rédaction commencera par « Supposons que $\mathcal{P}$ est vraie et que $\mathcal{Q}$ n'est pas vérifiée … ».

ATTENTION Même si cela est sous-entendu, pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie il faut, certes, que l'implication $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ soit vraie mais aussi vérifier que $\mathcal{P}$ le soit également.

On parle de *modus ponens* [5], ou syllogisme :

$$\text{Si } \mathcal{P} \text{ est vraie et } (\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \text{ est vraie, alors } \mathcal{Q} \text{ est vraie}$$

$$\mathcal{P} \wedge (\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \implies \mathcal{Q}.$$

[5]. On pose $\mathcal{P}$ pour prouver $\mathcal{Q}$

Exemple 12 : Tout homme est mortel, or Socrate est un homme, donc Socrate est mortel. [6]

Exercice 11 :

1. Montrer par un raisonnement direct que, si n est un entier pair, alors n^2 est pair.
2. Montrer par un raisonnement par contraposition que, si n^2 est pair, alors n est pair.
3. Montrer par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Aide : On pourra utiliser le résultat de la question 2.

III.2 Démonstration d'une équivalence $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$

Pour démontrer une équivalence, il est très souvent commode de procéder en deux étapes en démontrant successivement que $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ et que $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$.

$$(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \land (\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}) \iff (\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}).$$

Dans les cas simples et en faisant attention qu'il y a équivalence à chaque étape, on pourra raisonner par équivalence comme pour les équations.

Exemple 13 : On a montré successivement que si n est un entier pair, alors n^2 est pair puis que si n^2 est pair, alors n est pair.

Donc, n est pair $\iff$ n^2 est pair.

III.3 Démonstration d'une propriété

Propriété universelle : Pour démontrer qu'une propriété du type « $\forall x \in \mathrm{E}, \mathcal{P}(x)$ est vraie »,

— on peut introduire une variable x représentant un élément sans aucune condition si ce n'est appartenir à E et prouver ensuite que $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

— On peut également montrer par l'absurde que l'existence d'un x de E tel que $\rceil\mathcal{P}$ est fausse.

— Enfin, dans les cas plus complexes, on peut également raisonner par disjonction des cas en étudiant les différentes situations selon les valeurs de x :

$$\Big((\mathcal{P} \lor \mathcal{Q}) \implies \mathcal{R}\Big) \iff \Big((\mathcal{P} \implies \mathcal{R}) \land (\mathcal{Q} \implies \mathcal{R})\Big).$$

Exemples 14 :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 \geqslant 2x$.

   En effet, soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geqslant 0$ comme carré d'un nombre réel.

   Par conséquent, $x^2 + 1 \geqslant 2x$, ce qu'il fallait établir.
2. Tout entier naturel supérieur à 2 est produit de nombres premiers.

[6]. Un sophisme est un raisonnement faux ayant une apparence de vérité dont l'exemple classique est « Tous les chats sont mortels, or Socrate est mortel, donc Socrate est un chat ».

Pour être complet, l'énigme « Dans une ville, le barbier rase tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes. Qui rase le barbier ? » qui conduit à une situation qui ne peut exister est appelée *paradoxe*.

Exercice 12 : Montrer, sans utiliser le fait qu'il s'agit d'une somme classique, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est un entier.

Existence d'un objet : Démontrer qu'une propriété du type « $\exists\, x, \mathcal{P}(x)$ est vraie » est souvent ce qu'il y a de plus délicat.

- Dans le meilleur des cas, on construit explicitement x qui convient. Pour s'aider à définir un tel x convenable, on peut alors mener un raisonnement dit, par *analyse/synthèse* (*cf.* plus loin).
- On peut également montrer qu'il est absurde que $\mathcal{P}$ soit fausse pour tout x.

Exemples 15 :

1. Il existe une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = -f$.

   En effet, posons $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$. Alors, f est dérivable par composition et on calcule :

   $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\,\mathrm{e}^{-x} = -f(x)$.

   Donc $f' = -f$.
2. Si $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ est dérivable, positive et $f(0) = 0$, alors sa dérivée est négative en au moins un point.

III.4 Raisonnement par Analyse-Synthèse

Pour déterminer les solutions d'un problème, on peut raisonner en deux temps :

Analyse : On suppose que le problème est résolu et on en déduit des conditions nécessaires sur la solution. On restreint le champ des solutions possibles.

Synthèse : On montre que ces conditions sont suffisantes *i.e.* que les possibilités obtenues dans l'analyse sont plus que des possibilités, et on résout le problème

Exercice 13 : Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Remarque :

- La phase d'analyse est la recherche de conditions nécessaires.
- La phase de synthèse est la donnée de conditions suffisantes.

III.5 Raisonnement par récurrence

Rappel 1 (Deux propriétés de $\mathbb{N}$) :

1. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.
2. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

Théorème 7 (Raisonnement par récurrence simple) :
On considère une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}$, et on suppose que :

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie, **(Initialisation)**
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{P}(k)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. **(Principe d'hérédité)**

Alors la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 11 (Suite de propositions vraie à partir d'un certain rang) : Soit $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de propositions.

On dit que $\mathcal{P}$ (ou $\mathcal{P}_n$ par abus de langage) est vraie à partir d'un certain rang si :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}_n.$$

Exercice 14 : Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, les propriétés suivantes :

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $3^n - 1$ est pair.
2. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

ATTENTION

Les deux conditions du théorème (7) doivent être soigneusement vérifiées. Deux exemples pour le prouver :

— Montrer que la proposition $\mathcal{P}_n$: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, 3 divise 2^n est héréditaire.

Est-elle vraie pour tout entier n ?

— Soit la propriété $\mathcal{P}_n$: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n^2 - n + 41$ est un nombre premier [7].

Est-elle initialisable ?

Corollaire 7.1 (Raisonnement par récurrence double) :
On considère une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}$, et on suppose que :

— $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies,

— pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{P}(k)$ et $\mathcal{P}(k+1)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(k+2)$ est vraie.

Alors la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15 : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n.$$

Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n$.

La récurrence précédente peut être généralisée à plus d'hypothèses, 3, 4, etc. Mais tous ces principes apparaissent comme des cas particuliers du principe de récurrence suivant, parfois appelé récurrence forte, qui permet, pour démontrer la propriété au rang suivant de la supposer vraie pour tous les rangs inférieurs (pour cette raison, cette forme de récurrence est aussi appelée récurrence cumulative).

Corollaire 7.2 (Raisonnement par récurrence forte) :
On considère une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}$, et on suppose que :

— $\mathcal{P}(0)$ est vraie,

[7]. Le polynome P défini par $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 41$ est dû à **Leonhard Euler** (né le 15 avril 1707 à Bâle et mort à 76 ans le 7 septembre 1783 à Saint-Pétersbourg). Pour tout entier relatif n inférieur à 40, $\mathrm{P}(n)$ est premier.

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour $k \leqslant n$, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Alors la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16 (Théorème fondamental de l'arithmétique) : Montrer que tout entier $n \geqslant 2$ admet un diviseur premier.