Logique et Raisonnement

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 1

Ce chapitre a pour but d'introduire les concepts fondamentaux des mathématiques, à savoir les bases même du raisonnement.

Le but n'est pas l'étude de la logique formelle, ni même la présentation rigoureuse de cette logique formelle, mais de voir comment des rudiments de la théorie de la logique permettent une mise en forme rigoureuse de la structure de la pensée et du cheminement logique.

À travers ce premier chapitre, nous en profiterons pour revoir quelques résultats importants des années précédentes. Cela permettra de dépoussiérer un peu vos connaissances et revenir sur des théorèmes et méthodes importants.

Dernier conseil avant de débuter : le travail en CPGE et la réussite qui en découle est essentiellement personnel par le fait qu'il demande d'acquérir une certaine maturité mathématique ; ce qui demande temps et persévérance. Absolument tous les résultats, méthodes, démonstrations ou autres exercices sont importants. Gardez confiance, insistez et demandez moi.

La réussite est à ce prix mais comme dit l'adage :

« À vaincre sans périls, on triomphe sans gloire. »

Vous réussirez !

I. Terminologie mathématique

1. **Terminologie mathématique**
   - Énoncé
   - Quantificateurs ou connecteurs logiques
   - Texte mathématique
2. **Notions de logique formelle**
3. **Exemples de raisonnements**

I. Terminologie mathématique

1. Énoncé

Définition 1 (Objets) :

Les objets mathématiques sont les éléments des ensembles de base (nombres, vecteurs, points) et les diverses constructions faites à partir de ces objets, comme les ensembles, les listes, les relations, les fonctions, les opérations.

Un même objet mathématique peut avoir diverses expressions ou écritures, par exemple : 2, $\sqrt{4}$, $\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}$, ... sont diverses écritures du même objet.

ATTENTION

N'oubliez jamais que le symbole « $=$ » est un signe fort et qu'il ne doit être employé qu'entre deux objets rigoureusement identiques.

I. Terminologie mathématique

1. Énoncé

Définition 2 (Assertion) :

On appelle *proposition* (ou assertion) toute phrase $\mathcal{P}$ dont on peut dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Une proposition toujours vraie est appelée une tautologie [1].

Un énoncé (autre nom d'assertion) fait toujours intervenir un verbe, souvent sous la forme d'un symbole de relation, comme $=$, $\leqslant$, $\subset$, $\perp$, ...

[1]. du grec $\tau\alpha\grave{\upsilon}\tau o\lambda o\gamma\iota\alpha$, composé de $\tau\alpha\grave{\upsilon}\tau\acute{o}$, « la même chose », et $\lambda\acute{\epsilon}\gamma\omega$, « dire » : le fait de redire la même chose donc apparenté à la lapalissade en français courant.

Exemples 1 :

- $3+5$ est un objet mathématique, $3+5=8$ est un énoncé mathématique.

En informatique, on parle d'expression booléenne : c'est une combinaison de symboles et d'opérations qui peut s'évaluer en 0, représentant Faux, ou en 1, représentant Vrai.

Exemples 1 :

- $3 + 5$ est un objet mathématique, $3 + 5 = 8$ est un énoncé mathématique.
- « 2 est pair », « 3 est pair » ou encore « π est un entier » sont des énoncés qu'ils soient vrais ou faux.

En informatique, on parle d'expression booléenne : c'est une combinaison de symboles et d'opérations qui peut s'évaluer en 0, représentant Faux, ou en 1, représentant Vrai.

Exemples 1 :

- $3+5$ est un objet mathématique, $3+5=8$ est un énoncé mathématique.
- « 2 est pair », « 3 est pair » ou encore « π est un entier » sont des énoncés qu'ils soient vrais ou faux.
- Les phrases : « Bonjour ! », « $\cos x + x^2$ », « Cette assertion est fausse. », « Quel jour sommes-nous ? », ... ne sont pas des assertions.

En informatique, on parle d'expression booléenne : c'est une combinaison de symboles et d'opérations qui peut s'évaluer en 0, représentant Faux, ou en 1, représentant Vrai.

Vocabulaire : Lorsque qu'une proposition dépend d'une variable x appartenant à un ensemble E, on pourra la noter $\mathcal{P}(x)$ et on parle alors plutôt de prédicat.

Exemples 2 :

- Si on pose $\mathcal{P}(x) : x > 1$, alors $\mathcal{P}(2)$ est vraie, $\mathcal{P}(-1)$ est fausse.

L'ensemble E sera, suivant les cas, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou un sous-ensemble de l'un de ces ensembles $(\mathbb{N}^*, \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 = 9\},]-3\,;3[, \dots)$.

Vocabulaire : Lorsque qu'une proposition dépend d'une variable x appartenant à un ensemble E, on pourra la noter $\mathscr{P}(x)$ et on parle alors plutôt de prédicat.

Exemples 2 :

- Si on pose $\mathscr{P}(x) : x > 1$, alors $\mathscr{P}(2)$ est vraie, $\mathscr{P}(-1)$ est fausse.
- $\mathscr{P}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$: « le triangle ABC est rectangle en A » est un prédicat sur l'ensemble des triplets $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$ de points du plan.

L'ensemble E sera, suivant les cas, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou un sous-ensemble de l'un de ces ensembles $\left(\mathbb{N}^*, \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 = 9\}, \,]-3\,;3[, \dots\right)$.

Vocabulaire : Lorsque qu'une proposition dépend d'une variable x appartenant à un ensemble E, on pourra la noter $\mathscr{P}(x)$ et on parle alors plutôt de prédicat.

Exemples 2 :

- Si on pose $\mathscr{P}(x) : x > 1$, alors $\mathscr{P}(2)$ est vraie, $\mathscr{P}(-1)$ est fausse.
- $\mathscr{P}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$: « le triangle ABC est rectangle en A » est un prédicat sur l'ensemble des triplets $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$ de points du plan.
- Si on pose $\mathscr{P}(n)$: « n est un nombre premier », alors $\mathscr{P}(7)$ est vraie, $\mathscr{P}(8)$ est fausse.

L'ensemble E sera, suivant les cas, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou un sous-ensemble de l'un de ces ensembles $\left(\mathbb{N}^*, \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 = 9\}, \left]-3\,;3\right[, \dots\right)$.

Les connecteurs logiques permettent de « fabriquer » des propositions plus complexes à partir de propositions élémentaires.

Définition 3 (Le quantificateur universel $\forall$) :

Le symbole $\forall$ placé devant une variable x signifie « quel que soit x ».

Ainsi la proposition « $\forall x \in \mathrm{E}, \mathcal{P}(x)$ » se lit « quel que soit x appartenant à l'ensemble E, $\mathcal{P}(x)$ est vraie ».

Remarque : « $\forall x \in \mathrm{E}, \mathcal{P}(x)$ » est synonyme de « $\forall x, \Big(x \in \mathrm{E} \implies \mathcal{P}(x) \text{ est vraie}\Big)$ ».

Exemples 3 :

- L'énoncé mathématique « $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \geqslant n$ » se lit « pour tout entier naturel n, ... »

Les connecteurs logiques permettent de « fabriquer » des propositions plus complexes à partir de propositions élémentaires.

Définition 3 (Le quantificateur universel $\forall$) :

Le symbole $\forall$ placé devant une variable x signifie « quel que soit x ».

Ainsi la proposition « $\forall x \in \mathrm{E}, \mathcal{P}(x)$ » se lit « quel que soit x appartenant à l'ensemble E, $\mathcal{P}(x)$ est vraie ».

Remarque : « $\forall x \in \mathrm{E}, \mathcal{P}(x)$ » est synonyme de « $\forall x$, $\Big(x \in \mathrm{E} \implies \mathcal{P}(x) \text{ est vraie}\Big)$ ».

Exemples 3 :

- L'énoncé mathématique « $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \geqslant n$ » se lit « pour tout entier naturel n, ... »
- La commutativité de l'addition dans $\mathbb{R}$ s'écrit :

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y = y + x,$$

et se lit « pour tout couple de réels $(x\,;y)$, ... ».

Les connecteurs logiques permettent de « fabriquer » des propositions plus complexes à partir de propositions élémentaires.

Définition 3 (Le quantificateur universel $\forall$) :

Le symbole $\forall$ placé devant une variable x signifie « quel que soit x ».

Ainsi la proposition « $\forall\, x \in \mathrm{E},\ \mathcal{P}(x)$ » se lit « quel que soit x appartenant à l'ensemble E, $\mathcal{P}(x)$ est vraie ».

Remarque : « $\forall\, x \in \mathrm{E},\ \mathcal{P}(x)$ » est synonyme de « $\forall\, x$, $\Big(x \in \mathrm{E} \implies \mathcal{P}(x)$ est vraie$\Big)$ ».

Exemples 3 :

- L'énoncé mathématique « $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n^2 \geqslant n$ » se lit « pour tout entier naturel n, ... »
- La commutativité de l'addition dans $\mathbb{R}$ s'écrit :

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y = y + x,$$

  et se lit « pour tout couple de réels $(x\,;y)$, ... ».
- « f est positive sur l'intervalle I » se traduit par $\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) \geqslant 0$.

Définition 4 (Le quantificateur existentiel $\exists$) :

- Le symbole $\exists$ placé devant une variable x signifie « il existe (au moins) un x ».
  La proposition « $\exists\, x \in \mathrm{E}, \mathscr{P}(x)$ » se lit donc « il existe un élément x de E tel que $\mathscr{P}(x)$ est vraie ».

Remarque : « $\exists\, x \in \mathrm{E}, \mathscr{P}(x)$ » est synonyme de « $\exists\, x, \Big(x \in \mathrm{E}$ et $\mathscr{P}(x)$ est vraie$\Big)$ ».

Exemples 4 :

- Tout nombre réel positif peut s'écrire comme le carré d'un nombre s'écrit en langage mathématique :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \exists\, y \in \mathbb{R} \,/\, x = y^2.$$

Définition 4 (Le quantificateur existentiel $\exists$) :

- Le symbole $\exists$ placé devant une variable x signifie « il existe (au moins) un x ».
  La proposition « $\exists\, x \in \mathrm{E},\ \mathcal{P}(x)$ » se lit donc « il existe un élément x de E tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie ».
- Le symbole $\exists!$ placé devant une variable x signifie « il existe un unique x ».
  La proposition « $\exists!\, x \in \mathrm{E},\ \mathcal{P}(x)$ » se lit donc « il existe un unique élément x de E tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie ».

Remarque : « $\exists\, x \in \mathrm{E},\ \mathcal{P}(x)$ » est synonyme de « $\exists\, x,$ $\Big(x \in \mathrm{E}$ et $\mathcal{P}(x)$ est vraie$\Big)$ ».

Exemples 4 :

- Tout nombre réel positif peut s'écrire comme le carré d'un nombre s'écrit en langage mathématique :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \exists\, y \in \mathbb{R} \,/\, x = y^2.$$
- Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$. Pour exprimer le fait que la fonction f s'annule sur $\mathbb{R}$, on écrit :
$$\exists\, x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) = 0.$$

Définition 4 (Le quantificateur existentiel $\exists$) :

- Le symbole $\exists$ placé devant une variable x signifie « il existe (au moins) un x ».
  La proposition « $\exists x \in \mathrm{E}, \mathcal{P}(x)$ » se lit donc « il existe un élément x de E tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie ».
- Le symbole $\exists!$ placé devant une variable x signifie « il existe un unique x ».
  La proposition « $\exists!x \in \mathrm{E}, \mathcal{P}(x)$ » se lit donc « il existe un unique élément x de E tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie ».

Remarque : « $\exists x \in \mathrm{E}, \mathcal{P}(x)$ » est synonyme de « $\exists x, \Big(x \in \mathrm{E} \text{ et } \mathcal{P}(x) \text{ est vraie}\Big)$ ».

Exemples 4 :

- Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$. Pour exprimer le fait que la fonction f s'annule sur $\mathbb{R}$, on écrit :
  $$\exists x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) = 0.$$
  Pour exprimer que f ne s'annule qu'une seule fois :
  $$\exists! x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) = 0.$$

Remarque : L'ordre des quantificateurs est important. On peut le constater en comparant par exemple les propositions :

$$« \, \forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}_+ \,/\, x^2 = y \, » \text{ et } « \, \exists\, y \in \mathbb{R}_+, \forall\, x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 = y \, ».$$

Proposition 1 (Inversion des quantificateurs) :

- $\exists\, x,\ \exists\, y,\ \mathcal{P}(x, y)$ est équivalent à dire $\exists\, y,\ \exists\, x,\ \mathcal{P}(x, y)$

On peut donc intervertir des symboles identiques.

Exemple 5 :

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 \geqslant 0.$
- $\forall\, y \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 \geqslant 0.$

Remarque : L'ordre des quantificateurs est important. On peut le constater en comparant par exemple les propositions :

$$\text{« } \forall\, x \in \mathbb{R},\, \exists\, y \in \mathbb{R}_+ \,/\, x^2 = y \text{ » et « } \exists\, y \in \mathbb{R}_+, \forall\, x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 = y \text{ ».}$$

Proposition 1 (Inversion des quantificateurs) :

- $\exists\, x,\, \exists\, y,\, \mathcal{P}(x, y)$ est équivalent à dire $\exists\, y,\, \exists\, x,\, \mathcal{P}(x, y)$
- $\forall\, x,\, \forall\, y,\, \mathcal{P}(x, y)$ est équivalent à dire $\forall\, y,\, \forall\, x,\, \mathcal{P}(x, y)$

On peut donc intervertir des symboles identiques.

Exemple 5 :

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- $\forall\, x \in \mathbb{R},\, \forall\, y \in \mathbb{R},\, x^2 + y^2 \geqslant 0.$
- $\forall\, y \in \mathbb{R},\, \forall\, x \in \mathbb{R},\, x^2 + y^2 \geqslant 0.$

ATTENTION

En général, on ne peut intervertir les symboles $\forall$ et $\exists$ sans changer le sens de la formule.

Contre-Exemple 6 :

Les deux propositions suivantes ne sont pas équivalentes :

- $\forall\, x \in \mathrm{I},\ \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* \,/ \qquad \forall\, y \in \mathrm{I},\ |x-y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

Remarque : Dans la première assertion, on noterait plutôt $\alpha\,(\varepsilon\,;x)$ pour montrer la dépendance de α à ε ET x.

ATTENTION

En général, on ne peut intervertir les symboles $\forall$ et $\exists$ sans changer le sens de la formule.

Contre-Exemple 6 :

Les deux propositions suivantes ne sont pas équivalentes :

- $\forall\, x \in \mathrm{I},\ \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* \ / \qquad \forall\, y \in \mathrm{I},\ |x-y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$
- $\qquad \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* \ / \ \forall\, x \in \mathrm{I},\ \forall\, y \in \mathrm{I},\ |x-y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

Remarque : Dans la première assertion, on noterait plutôt $\alpha\,(\varepsilon\,;x)$ pour montrer la dépendance de α à ε ET x.

ATTENTION

- Dans une assertion du type $\forall\, x \in \mathrm{E}, \exists\, y \in \mathrm{F}, \mathcal{P}(x, y)$, y **dépend** de x. On le note alors souvent $y(x)$.
  Il faut comprendre que la lecture se fait, dans l'ordre,

ATTENTION

- Dans une assertion du type $\forall\, x \in \mathrm{E}, \exists\, y \in \mathrm{F}, \mathcal{P}(x, y)$, y **dépend** de x. On le note alors souvent $y(x)$.
  Il faut comprendre que la lecture se fait, dans l'ordre,
  1. pour n'importe quel élément fixé de E, appelé x

ATTENTION

- Dans une assertion du type $\forall\, x \in \mathrm{E}, \exists\, y \in \mathrm{F}, \mathcal{P}(x, y)$, y **dépend** de x. On le note alors souvent $y(x)$.
  Il faut comprendre que la lecture se fait, dans l'ordre,
  1. pour n'importe quel élément fixé de E, appelé x
  2. on peut trouver un objet y dans F (dépendant de x) tel que $\mathcal{P}(x, y)$ soit vrai.

ATTENTION

- Dans une assertion du type $\forall\, x \in \mathrm{E}, \exists\, y \in \mathrm{F}, \mathcal{P}(x, y)$, y **dépend** de x. On le note alors souvent $y(x)$.
  Il faut comprendre que la lecture se fait, dans l'ordre,
  1. pour n'importe quel élément fixé de E, appelé x
  2. on peut trouver un objet y dans F (dépendant de x) tel que $\mathcal{P}(x, y)$ soit vrai.
- Dans une assertion du type $\exists\, y \in \mathrm{F}, \forall\, x \in \mathrm{E}, \mathcal{P}(x, y)$, y est **indépendant** de x.
  Il faut comprendre que

ATTENTION

- Dans une assertion du type $\forall\, x \in \mathrm{E},\ \exists\, y \in \mathrm{F},\ \mathcal{P}(x, y)$, y **dépend** de x. On le note alors souvent $y(x)$.
  Il faut comprendre que la lecture se fait, dans l'ordre,
  1. pour n'importe quel élément fixé de E, appelé x
  2. on peut trouver un objet y dans F (dépendant de x) tel que $\mathcal{P}(x, y)$ soit vrai.
- Dans une assertion du type $\exists\, y \in \mathrm{F},\ \forall\, x \in \mathrm{E},\ \mathcal{P}(x, y)$, y est **indépendant** de x.
  Il faut comprendre que
  1. un certain élément particulier, noté y, dans E

ATTENTION

- Dans une assertion du type $\forall\, x \in \mathrm{E}$, $\exists\, y \in \mathrm{F}$, $\mathcal{P}(x, y)$, y **dépend** de x. On le note alors souvent $y(x)$.
  Il faut comprendre que la lecture se fait, dans l'ordre,
  1. pour n'importe quel élément fixé de E, appelé x
  2. on peut trouver un objet y dans F (dépendant de x) tel que $\mathcal{P}(x, y)$ soit vrai.
- Dans une assertion du type $\exists\, y \in \mathrm{F}$, $\forall\, x \in \mathrm{E}$, $\mathcal{P}(x, y)$, y est **indépendant** de x.
  Il faut comprendre que
  1. un certain élément particulier, noté y, dans E
  2. rend vraie la propriété $\mathcal{P}(x, y)$ pour tout x de E.

Exercice 1 :

Écrire en langage formalisé :

1. L'équation $\cos x = 0$ possède au moins une solution réelle.

Exercice 1 :

Écrire en langage formalisé :

1. L'équation $\cos x = 0$ possède au moins une solution réelle.
2. L'entier n est un multiple de 3.

Exercice 1 :

Écrire en langage formalisé :

1. L'équation $\cos x = 0$ possède au moins une solution réelle.
2. L'entier n est un multiple de 3.
3. L'entier n est un carré (parfait).

Exercice 1 :

Écrire en langage formalisé :

1. L'équation $\cos x = 0$ possède au moins une solution réelle.
2. L'entier n est un multiple de 3.
3. L'entier n est un carré (parfait).
4. Les courbes des fonctions f et g ont un unique point en commun.

Exercice 1 :

Écrire en langage formalisé :

1. L'équation $\cos x = 0$ possède au moins une solution réelle.
2. L'entier n est un multiple de 3.
3. L'entier n est un carré (parfait).
4. Les courbes des fonctions f et g ont un unique point en commun.
5. La définition d'une fonction continue en un point a d'un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 1 :

Écrire en langage formalisé :

1. L'équation $\cos x = 0$ possède au moins une solution réelle.
2. L'entier n est un multiple de 3.
3. L'entier n est un carré (parfait).
4. Les courbes des fonctions f et g ont un unique point en commun.
5. La définition d'une fonction continue en un point a d'un intervalle de $\mathbb{R}$.
6. La définition d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente en $\ell \in \mathbb{R}$.

Un texte mathématique est constitué de :

1. Définitions : On appelle définition toute manière d'accorder un nom jusqu'ici inusité à un objet vérifiant une certaine propriété. Une définition crée ainsi une classe d'objets.
   Pourquoi un nom « jusqu'ici inusité » ? Tout simplement parce qu'il ne faut pas qu'un même nom puisse signifier des choses différentes.
   Si l'homonymie est tolérée dans le langage usuel, elle ne l'est pas en mathématiques, par souci de rigueur formelle.

Un texte mathématique est constitué de :

1. Définitions : On appelle définition toute manière d'accorder un nom jusqu'ici inusité à un objet vérifiant une certaine propriété. Une définition crée ainsi une classe d'objets.
   Pourquoi un nom « jusqu'ici inusité » ? Tout simplement parce qu'il ne faut pas qu'un même nom puisse signifier des choses différentes.
   Si l'homonymie est tolérée dans le langage usuel, elle ne l'est pas en mathématiques, par souci de rigueur formelle.

Définition 5 (Fonction croissante) :

Soient I un intervalle et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que f est croissante sur I si $\forall\, x, y \in \mathrm{I},\ x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$.

I. Terminologie mathématique

3. Texte mathématique

Un texte mathématique est constitué de :

1. Définitions : On appelle définition toute manière d'accorder un nom jusqu'ici inusité à un objet vérifiant une certaine propriété. Une définition crée ainsi une classe d'objets.
   Pourquoi un nom « jusqu'ici inusité » ? Tout simplement parce qu'il ne faut pas qu'un même nom puisse signifier des choses différentes.
   Si l'homonymie est tolérée dans le langage usuel, elle ne l'est pas en mathématiques, par souci de rigueur formelle.

Définition 5 (Fonction croissante) :

Soient I un intervalle et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que f est croissante sur I si $\forall\, x, y \in \mathrm{I},\ x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$.

Remarque : L'équivalence est utilisée de façon plus ou moins implicite dans les définitions. Par exemple dans la phrase ci-dessus, il est sous-entendu que, réciproquement, si f est une fonction croissante sur I alors $\forall\, x, y \in \mathrm{I},\ x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
Le « si » d'une définition est donc à penser comme étant un « si, et seulement si ».

2. **Résultats :** des énoncés mettant en jeu les objets définis dans la théorie, et donnant des propriétés vérifiées par ces objets.
   On distingue :

   les axiomes : Dans une théorie formelle quelconque, mathématique ou non, on appelle axiomes les propositions que la théorie tient pour vraies sans justification comme points de départ.

2. **Résultats :** des énoncés mettant en jeu les objets définis dans la théorie, et donnant des propriétés vérifiées par ces objets.
On distingue :

les axiomes : Dans une théorie formelle quelconque, mathématique ou non, on appelle axiomes les propositions que la théorie tient pour vraies sans justification comme points de départ.

les théorèmes : les résultats les plus significatifs, démontrés à partir des axiomes et de résultats démontrés antérieurement ;

2. **Résultats :** des énoncés mettant en jeu les objets définis dans la théorie, et donnant des propriétés vérifiées par ces objets.
On distingue :

   les axiomes : Dans une théorie formelle quelconque, mathématique ou non, on appelle axiomes les propositions que la théorie tient pour vraies sans justification comme points de départ.

   les théorèmes : les résultats les plus significatifs, démontrés à partir des axiomes et de résultats démontrés antérieurement ;

   les propositions : des résultats de moindre envergure ;

2. **Résultats :** des énoncés mettant en jeu les objets définis dans la théorie, et donnant des propriétés vérifiées par ces objets.
On distingue :

les axiomes : Dans une théorie formelle quelconque, mathématique ou non, on appelle axiomes les propositions que la théorie tient pour vraies sans justification comme points de départ.

les théorèmes : les résultats les plus significatifs, démontrés à partir des axiomes et de résultats démontrés antérieurement ;

les propositions : des résultats de moindre envergure ;

les lemmes : des résultats à voir comme des étapes vers des résultats plus consistants (résultats préliminaires, mais pouvant avoir leur intérêt en soi)

2. **Résultats :** des énoncés mettant en jeu les objets définis dans la théorie, et donnant des propriétés vérifiées par ces objets.
On distingue :

les axiomes : Dans une théorie formelle quelconque, mathématique ou non, on appelle axiomes les propositions que la théorie tient pour vraies sans justification comme points de départ.

les théorèmes : les résultats les plus significatifs, démontrés à partir des axiomes et de résultats démontrés antérieurement ;

les propositions : des résultats de moindre envergure ;

les lemmes : des résultats à voir comme des étapes vers des résultats plus consistants (résultats préliminaires, mais pouvant avoir leur intérêt en soi)

les corollaires : des conséquences assez immédiates d'autres résultats, par exemple des cas particuliers intéressants ;

les caractérisations : On appelle caractérisation tout théorème sur une notion qui donne une condition équivalente à la définition de cette notion. Une caractérisation est donc, au fond, ce qu'on pourrait appeler une « redéfinition » mais bien souvent plus pratique.

les caractérisations : On appelle caractérisation tout théorème sur une notion qui donne une condition équivalente à la définition de cette notion. Une caractérisation est donc, au fond, ce qu'on pourrait appeler une « redéfinition » mais bien souvent plus pratique.

Théorème 2 (Caractérisation des fonctions dérivables croissantes) :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

f est croissante sur I si, et seulement si f' est positive sur I.

les caractérisations : On appelle caractérisation tout théorème sur une notion qui donne une condition équivalente à la définition de cette notion. Une caractérisation est donc, au fond, ce qu'on pourrait appeler une « redéfinition » mais bien souvent plus pratique.

Théorème 2 (Caractérisation des fonctions dérivables croissantes) :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

$$f \text{ est croissante sur I si, et seulement si } f' \text{ est positive sur I.}$$

Remarque : Un énoncé s'exprime souvent sous la forme $A \Longrightarrow B$.
La proposition A regroupe les hypothèses. La proposition B regroupe les conclusions.
Mathématiquement parlant, on parlera respectivement de « condition suffisante » et « condition nécessaire ». On revient sur ces notions un peu plus loin.
Ne pas oublier de bien apprendre, comprendre et citer toutes les hypothèses d'un résultat.

Par exemple, considérons le théorème (2) :

Théorème 2 (Caractérisation des fonctions dérivables croissantes) :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

$$f \text{ est croissante sur I si, et seulement si } f' \text{ est positive sur I.}$$

Il y a trois conditions dans cet énoncé :

1. bien sûr, $f' \geqslant 0$, que personne n'oublie ;

Par exemple, considérons le théorème (2) :

Théorème 2 (Caractérisation des fonctions dérivables croissantes) :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

f est croissante sur I si, et seulement si f' est positive sur I.

Il y a trois conditions dans cet énoncé :

1. bien sûr, $f' \geqslant 0$, que personne n'oublie ;
2. mais aussi f dérivable sur I (sans laquelle l'énoncé n'a pas de sens),

Par exemple, considérons le théorème (2) :

Théorème 2 (Caractérisation des fonctions dérivables croissantes) :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

f est croissante sur I si, et seulement si f' est positive sur I.

Il y a trois conditions dans cet énoncé :

1. bien sûr, $f' \geqslant 0$, que personne n'oublie ;
2. mais aussi f dérivable sur I (sans laquelle l'énoncé n'a pas de sens),
3. et, plus souvent oubliée, le fait que I est un intervalle (sans quoi le résultat est faux !).

Par exemple, considérons le théorème (2) :

Théorème 2 (Caractérisation des fonctions dérivables croissantes) :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

f est croissante sur I si, et seulement si f' est positive sur I.

Il y a trois conditions dans cet énoncé :

1. bien sûr, $f' \geqslant 0$, que personne n'oublie ;
2. mais aussi f dérivable sur I (sans laquelle l'énoncé n'a pas de sens),
3. et, plus souvent oubliée, le fait que I est un intervalle (sans quoi le résultat est faux !).

3. Démonstrations : des justifications de la véracité des résultats.

Par exemple, considérons le théorème (2) :

Théorème 2 (Caractérisation des fonctions dérivables croissantes) :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

f est croissante sur I si, et seulement si f' est positive sur I.

Il y a trois conditions dans cet énoncé :

1. bien sûr, $f' \geqslant 0$, que personne n'oublie ;
2. mais aussi f dérivable sur I (sans laquelle l'énoncé n'a pas de sens),
3. et, plus souvent oubliée, le fait que I est un intervalle (sans quoi le résultat est faux !).

3. Démonstrations : des justifications de la véracité des résultats.
4. **Conjectures :** des énoncés qu'on pense être vrais, mais qu'on n'a pas encore réussi à prouver.

Définition 6 (Négation) :

La proposition contraire de $\mathcal{P}$, notée (non $\mathcal{P}$) ou $\rceil\mathcal{P}$ et appelée « négation de $\mathcal{P}$ », est la proposition qui est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse et qui est fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie.

Pour manipuler une assertion composée avec des connecteurs, on peut parcourir la liste complète des valeurs de vérité possibles des assertions qui ont servi à la construire, et créer un tableau appelé table de vérité.

$\mathcal{P}$	non $\mathcal{P}$
V	F
F	V

Figure 1 – Table de vérité de la négation.

Définition 6 (Négation) :

La proposition contraire de $\mathcal{P}$, notée (non $\mathcal{P}$) ou $\rceil\mathcal{P}$ et appelée « négation de $\mathcal{P}$ », est la proposition qui est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse et qui est fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie.

Pour manipuler une assertion composée avec des connecteurs, on peut parcourir la liste complète des valeurs de vérité possibles des assertions qui ont servi à la construire, et créer un tableau appelé table de vérité.

$\mathcal{P}$	non $\mathcal{P}$
V	F
F	V

Figure 1 – Table de vérité de la négation.

Prouver qu'une proposition est vraie est donc équivalent à prouver que sa négation est fausse. C'est le principe du **raisonnement par l'absurde**.

Exemples 7 :

Les deux propositions suivantes sont contraires l'une de l'autre :

- Quel que soit x, $\mathcal{P}(x)$ est vraie, ou $\forall\, x$, $\mathcal{P}(x)$.

Exemples 7 :

Les deux propositions suivantes sont contraires l'une de l'autre :

- Quel que soit x, $\mathcal{P}(x)$ est vraie, ou $\forall\, x,\ \mathcal{P}(x)$.
- Il existe un x tel que $\mathcal{P}(x)$ est faux, ou $\exists\, x,\ \rceil\mathcal{P}(x)$.

Méthode 1 :

Pour nier une proposition, on échange les quantificateurs $\forall$ par $\exists$ et $\exists$ par $\forall$, puis on nie la conclusion.

Exercice 2 :

Donner la négation des propositions suivantes :

1. $\exists\, x \in \mathbb{R}, x^2 + x - 2 = 0.$

Méthode 1 :

Pour nier une proposition, on échange les quantificateurs $\forall$ par $\exists$ et $\exists$ par $\forall$, puis on nie la conclusion.

Exercice 2 :

Donner la négation des propositions suivantes :

1. $\exists\, x \in \mathbb{R}, x^2 + x - 2 = 0.$
2. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}_+, x^2 = y.$

Méthode 1 :

Pour nier une proposition, on échange les quantificateurs $\forall$ par $\exists$ et $\exists$ par $\forall$, puis on nie la conclusion.

Exercice 2 :

Donner la négation des propositions suivantes :

1. $\exists\, x \in \mathbb{R}, x^2 + x - 2 = 0.$
2. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}_+, x^2 = y.$
3. $\exists\, \mathrm{M} \in \mathbb{R}_+, \forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) < \mathrm{M}.$

Méthode 2 :

Soit une proposition du type $\forall\, x \in \mathrm{E},\ \mathcal{P}(x)$ où E est un ensemble.

- Pour montrer que l'assertion $\mathcal{P}$ est vraie, il suffit de montrer que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tous les x de E.

Méthode 2 :

Soit une proposition du type $\forall\, x \in \mathrm{E},\ \mathcal{P}(x)$ où E est un ensemble.

- Pour montrer que l'assertion $\mathcal{P}$ est vraie, il suffit de montrer que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tous les x de E.
- Pour montrer que l'assertion $\mathcal{P}$ est fausse, il suffit de trouver un x de E pour laquelle $\mathcal{P}(x)$ soit fausse. Un tel x est appelé contre-excemple à la proposition $\forall\, x \in \mathrm{E},\ \mathcal{P}(x)$.

Méthode 2 :

Soit une proposition du type $\forall\, x \in \mathrm{E},\ \mathcal{P}(x)$ où E est un ensemble.

- Pour montrer que l'assertion $\mathcal{P}$ est vraie, il suffit de montrer que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tous les x de E.
- Pour montrer que l'assertion $\mathcal{P}$ est fausse, il suffit de trouver un x de E pour laquelle $\mathcal{P}(x)$ soit fausse. Un tel x est appelé contre-exemple à la proposition $\forall\, x \in \mathrm{E},\ \mathcal{P}(x)$.

Exercice 3 :

1. L'assertion « Tout entier positif est la somme de trois carrés (d'entiers) » est-elle vraie ?

Méthode 2 :

Soit une proposition du type $\forall\, x \in \mathrm{E},\ \mathcal{P}(x)$ où E est un ensemble.

- Pour montrer que l'assertion $\mathcal{P}$ est vraie, il suffit de montrer que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tous les x de E.
- Pour montrer que l'assertion $\mathcal{P}$ est fausse, il suffit de trouver un x de E pour laquelle $\mathcal{P}(x)$ soit fausse. Un tel x est appelé contre-exemple à la proposition $\forall\, x \in \mathrm{E},\ \mathcal{P}(x)$.

Exercice 3 :

1. L'assertion « Tout entier positif est la somme de trois carrés (d'entiers) » est-elle vraie ?
2. Même question avec l'assertion « Toute suite croissante est divergente vers $+\infty$ ».

Définition 7 :

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

- La proposition ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$), notée $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$, appelée conjonction de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, est vraie lorsque les deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies, fausse dans le cas contraire.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Figure 2 – Table de vérité des connecteurs logiques

Définition 7 :

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

- La proposition ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$), notée $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$, appelée conjonction de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, est vraie lorsque les deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies, fausse dans le cas contraire.
- La proposition ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$), notée $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$, appelée disjonction de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, est vraie lorsque l'une au moins des deux propositions $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ est vraie, fausse dans le cas contraire.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Figure 2 – Table de vérité des connecteurs logiques

- Pour montrer que la proposition $\mathscr{P} \wedge \mathscr{Q}$ est vraie, il suffira donc de prouver que les deux propositions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont vraies.

Remarque : On prendra garde au fait que le « ou » logique est un « ou » inclusif, contrairement au « ou » du langage courant qui lui est exclusif (par exemple dans « Fromage ou Dessert »).

Un peu d'humour : On demande à une logicienne qui vient d'accoucher si elle a eu un garçon ou une fille. Que répond-elle ? [2].

[2]. Oui !

- Pour montrer que la proposition $\mathscr{P} \wedge \mathscr{Q}$ est vraie, il suffira donc de prouver que les deux propositions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont vraies.
- Pour montrer que la proposition $\mathscr{P} \vee \mathscr{Q}$ est vraie, il suffira donc de prouver que l'une des deux propositions $\mathscr{P}$ ou $\mathscr{Q}$ est vraie (ou que les deux le sont).

Remarque : On prendra garde au fait que le « ou » logique est un « ou » inclusif, contrairement au « ou » du langage courant qui lui est exclusif (par exemple dans « Fromage ou Dessert »).

Un peu d'humour : On demande à une logicienne qui vient d'accoucher si elle a eu un garçon ou une fille. Que répond-elle ? [2].

[2]. Oui !

Exercice 4 :

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^3 - x > 0$.

Vérifier que la proposition « $x > 1$ ou $-1 < x < 0$ » est vraie.

Proposition 3 (Propriété de $\wedge$ et $\vee$) :

Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ des propositions. On a les équivalences entre :

- $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}$.

Proposition 3 (Propriété de $\wedge$ et $\vee$) :

Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ des propositions. On a les équivalences entre :

- $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}$.
- $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R}$ et $\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$.

Proposition 3 (Propriété de $\wedge$ et $\vee$) :

Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ des propositions. On a les équivalences entre :

- $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}$.
- $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R}$ et $\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$.
- $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \vee \mathcal{P}$.

Proposition 3 (Propriété de $\wedge$ et $\vee$) :

Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ des propositions. On a les équivalences entre :

- $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}$.
- $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R}$ et $\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$.
- $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \vee \mathcal{P}$.
- $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R}$ et $\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$.

Proposition 3 (Propriété de $\wedge$ et $\vee$) :

Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ des propositions. On a les équivalences entre :

- $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}$.
- $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R}$ et $\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$.
- $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \vee \mathcal{P}$.
- $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R}$ et $\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$.
- $\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$ et $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{P} \vee \mathcal{R})$

Proposition 3 (Propriété de $\wedge$ et $\vee$) :

Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ des propositions. On a les équivalences entre :

- $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}$.
- $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R}$ et $\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$.
- $\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$ et $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{P} \vee \mathcal{R})$
- $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \vee \mathcal{P}$.
- $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R}$ et $\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$.
- $\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$ et $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{P} \wedge \mathcal{R})$.

Proposition 3 (Propriété de $\wedge$ et $\vee$) :

Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ des propositions. On a les équivalences entre :

- $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}$.
- $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R}$ et $\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$.
- $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \vee \mathcal{P}$.
- $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R}$ et $\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$.
- $\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$ et $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{P} \vee \mathcal{R})$
- $\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$ et $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{P} \wedge \mathcal{R})$.
- $\rceil(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})$ et $\rceil\mathcal{P} \vee \rceil\mathcal{Q}$

Proposition 3 (Propriété de $\wedge$ et $\vee$) :

Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ des propositions. On a les équivalences entre :

- $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}$.
- $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \vee \mathcal{P}$.
- $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R}$ et $\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$.
- $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R}$ et $\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$.
- $\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$ et $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{P} \vee \mathcal{R})$
- $\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$ et $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{P} \wedge \mathcal{R})$.
- $\rceil(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})$ et $\rceil\mathcal{P} \vee \rceil\mathcal{Q}$
- $\rceil(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$ et $\rceil\mathcal{P} \wedge \rceil\mathcal{Q}$.

Proposition 3 (Propriété de $\wedge$ et $\vee$) :

Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ des propositions. On a les équivalences entre :

- $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}$.
- $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R}$ et $\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$.
- $\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$ et $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{P} \vee \mathcal{R})$
- $\rceil(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})$ et $\rceil\mathcal{P} \vee \rceil\mathcal{Q}$
- $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \vee \mathcal{P}$.
- $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R}$ et $\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$.
- $\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$ et $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{P} \wedge \mathcal{R})$.
- $\rceil(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$ et $\rceil\mathcal{P} \wedge \rceil\mathcal{Q}$.

Conjonction et disjonction sont donc associatives, commutatives et distributives l'une sur l'autre.

Méthode 3 :

- Pour prouver une conjonction $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$, on prouve en deux temps : on prouve $\mathcal{P}$, puis on prouve $\mathcal{Q}$.

Méthode 3 :

- Pour prouver une conjonction $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$, on prouve en deux temps : on prouve $\mathcal{P}$, puis on prouve $\mathcal{Q}$.
- Pour prouver une disjonction $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$, on prouve que $\rceil\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$, ce qui revient à supposer que $\mathcal{P}$ n'est pas vraie, et à en déduire que $\mathcal{Q}$ est vraie.
  Par commutativité de la disjonction, on peut, bien sûr, intervertir $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

  Remarque : Un bon choix de la propriété que l'on nie peut parfois simplifier la démonstration.

On dit qu'une proposition $\mathscr{P}$ « implique » une proposition $\mathscr{Q}$ si, et seulement si $\mathscr{Q}$ est vraie chaque fois que $\mathscr{P}$ est vraie.

Exemple 8 :

Posons $\mathscr{P} : 1 = 2$ et $\mathscr{Q} : 2 = 3$.

Si $\mathscr{P}$ est vraie alors $1 + 1 = 2 + 1$ donc $\mathscr{Q}$.

Cela revient à dire qu'il est impossible qu'on ait $\mathscr{P}$ vraie sans avoir $\mathscr{Q}$ vraie également.

Autrement dit, $\mathscr{P} \wedge \rceil \mathscr{Q}$ est une contradiction *i.e.* $\rceil(\mathscr{P} \wedge \rceil \mathscr{Q})$ est une tautologie.

Mais en utilisant les équivalences usuelles, cela revient à $(\rceil \mathscr{P}) \vee \mathscr{Q}$ tautologie ou finalement, ce qui est encore équivalent $\mathscr{Q} \vee \rceil \mathscr{P}$ tautologie.

Définition 8 (Implication) :

Soient deux propositions logiques $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

L'assertion $(\mathcal{Q} \vee \rceil \mathcal{P})$ est notée $(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q})$ et on dit que $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$.

On dit alors que $\mathcal{P}$ est une condition suffisante de $\mathcal{Q}$ et que $\mathcal{Q}$ est une condition nécessaire de $\mathcal{P}$.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Figure 3 – Table de vérité de l'implication.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Figure 3 – Table de vérité de l'implication.

Remarques :

- Pour montrer que la proposition $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ est vraie, il suffira donc de supposer de $\mathcal{P}$ est vraie et montrer que, sous cette condition, $\mathcal{Q}$ est vraie.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Figure 3 – Table de vérité de l'implication.

Remarques :

- Pour montrer que la proposition $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ est vraie, il suffira donc de supposer de $\mathcal{P}$ est vraie et montrer que, sous cette condition, $\mathcal{Q}$ est vraie.
- Pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie, il suffit que $\mathcal{P}$ soit vraie.

II. Notions de logique formelle

3. Implications (Si ... alors ...)

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Figure 3 – Table de vérité de l'implication.

Remarques :

- Pour montrer que la proposition $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ est vraie, il suffira donc de supposer de $\mathcal{P}$ est vraie et montrer que, sous cette condition, $\mathcal{Q}$ est vraie.
- Pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie, il suffit que $\mathcal{P}$ soit vraie.
- Pour que $\mathcal{P}$ soit vraie, il faut que $\mathcal{Q}$ soit vraie mais ce n'est pas suffisant (troisième ligne de la table de vérité).

Exemple 9 :

Soit $x \in \mathcal{R}$, si $x > 1$ alors $x^2 > 1$ est une proposition vraie.

- Pour que $x^2 > 1$ soit vraie, il suffit que la condition $x > 1$ soit vérifiée mais elle n'est pas nécessaire :
  $x = -2$ donne aussi $x^2 > 1$ et pourtant $x < 1$

Exemple 9 :

Soit $x \in \mathcal{R}$, si $x > 1$ alors $x^2 > 1$ est une proposition vraie.

- Pour que $x^2 > 1$ soit vraie, il suffit que la condition $x > 1$ soit vérifiée mais elle n'est pas nécessaire :
  $x = -2$ donne aussi $x^2 > 1$ et pourtant $x < 1$
- Pour que $x > 1$, il est nécessaire que la condition $x^2 > 1$ soit vérifiée.
  En effet, si $x^2 \leqslant 1$ alors $-1 \leqslant x \leqslant 1$ mais la condition $x^2 > 1$ n'est pas suffisante ($x = -2$).

Exercice 5 :

Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il faut qu'il ait 3 angles droits.

Exercice 5 :

Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il faut qu'il ait 3 angles droits.
2. Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il suffit qu'il ait 3 angles droits.

Exercice 5 :

Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il faut qu'il ait 3 angles droits.
2. Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il suffit qu'il ait 3 angles droits.
3. Une condition nécessaire pour qu'un quadrilatère soit un carré est que ses diagonales soient perpendiculaires.

Exercice 5 :

Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il faut qu'il ait 3 angles droits.
2. Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il suffit qu'il ait 3 angles droits.
3. Une condition nécessaire pour qu'un quadrilatère soit un carré est que ses diagonales soient perpendiculaires.
4. Une condition suffisante pour qu'un quadrilatère soit un carré est que ses diagonales soient perpendiculaires

Enfin, il faut bien prêter attention aux deux dernières lignes de la figure (3) : une hypothèse fausse conduit à tous les résultats possibles :

- **« Faux $\Longrightarrow$ Faux » est vraie :**

Remarque : La phrase : « si tu es le pape, alors je suis la reine d'Angleterre est donc vraie ».

Enfin, il faut bien prêter attention aux deux dernières lignes de la figure (3) : une hypothèse fausse conduit à tous les résultats possibles :

- **« Faux $\implies$ Faux » est vraie :**

  Remarque : La phrase : « si tu es le pape, alors je suis la reine d'Angleterre est donc vraie ».

- **« Faux $\implies$ Vrai » est vraie :** un petit exemple :

$$(2 = 3 \text{ et } 2 = 1) \implies 2 + 2 = 3 + 1 \implies 4 = 4.$$

  L'affirmation de départ est fausse et on en déduit par un raisonnement tout à fait juste, une affirmation vraie.

Enfin, il faut bien prêter attention aux deux dernières lignes de la figure (3) : une hypothèse fausse conduit à tous les résultats possibles :

- **« Faux $\Longrightarrow$ Faux » est vraie :**

  Remarque : La phrase : « si tu es le pape, alors je suis la reine d'Angleterre est donc vraie ».

- **« Faux $\Longrightarrow$ Vrai » est vraie :** un petit exemple :

$$(2 = 3 \text{ et } 2 = 1) \Longrightarrow 2+2 = 3+1 \Longrightarrow 4 = 4.$$

  L'affirmation de départ est fausse et on en déduit par un raisonnement tout à fait juste, une affirmation vraie.

Une conséquence pratique de cette étude est que, si votre hypothèse de départ est fausse, bien que par la suite vous teniez des raisonnements entièrement justes, vous n'avez aucune idée en fin de raisonnement de la véracité ou de la fausseté des conclusions auxquelles vous êtes parvenu(e). On dit aussi qu'à partir du faux, on démontre n'importe quoi !

Enfin, il faut bien prêter attention aux deux dernières lignes de la figure (3) : une hypothèse fausse conduit à tous les résultats possibles :

- **« Faux $\implies$ Faux » est vraie :**

  Remarque : La phrase : « si tu es le pape, alors je suis la reine d'Angleterre est donc vraie ».

- **« Faux $\implies$ Vrai » est vraie :** un petit exemple :

$$(2 = 3 \text{ et } 2 = 1) \implies 2+2 = 3+1 \implies 4 = 4.$$

  L'affirmation de départ est fausse et on en déduit par un raisonnement tout à fait juste, une affirmation vraie.

Une conséquence pratique de cette étude est que, si votre hypothèse de départ est fausse, bien que par la suite vous teniez des raisonnements entièrement justes, vous n'avez aucune idée en fin de raisonnement de la véracité ou de la fausseté des conclusions auxquelles vous êtes parvenu(e). On dit aussi qu'à partir du faux, on démontre n'importe quoi !
En plus clair, arriver à un résultat correct se basant sur une hypothèse fausse ne sera jamais compté comme juste...

Enfin, il faut bien prêter attention aux deux dernières lignes de la figure (3) : une hypothèse fausse conduit à tous les résultats possibles :

- **« Faux $\implies$ Faux » est vraie :**

  Remarque : La phrase : « si tu es le pape, alors je suis la reine d'Angleterre est donc vraie ».

- **« Faux $\implies$ Vrai » est vraie :** un petit exemple :

$$(2 = 3 \text{ et } 2 = 1) \implies 2 + 2 = 3 + 1 \implies 4 = 4.$$

  L'affirmation de départ est fausse et on en déduit par un raisonnement tout à fait juste, une affirmation vraie.

Une conséquence pratique de cette étude est que, si votre hypothèse de départ est fausse, bien que par la suite vous teniez des raisonnements entièrement justes, vous n'avez aucune idée en fin de raisonnement de la véracité ou de la fausseté des conclusions auxquelles vous êtes parvenu(e). On dit aussi qu'à partir du faux, on démontre n'importe quoi !
En plus clair, arriver à un résultat correct se basant sur une hypothèse fausse ne sera jamais compté comme juste...

ATTENTION

On verra plus loin que la négation d'une implication n'est pas une implication mais une conjonction *i.e.* un « et ».

Exercice 6 (Le missionnaire et les cannibales) :

Les cannibales d'une tribu se préparent à manger un missionnaire. Désirant lui prouver une dernière fois leur respect de la dignité et de la liberté humaine, les cannibales proposent au missionnaire de décider lui-même de son sort en faisant une courte déclaration : si celle-ci est vraie, le missionnaire sera rôti, et il sera bouilli dans le cas contraire. Que doit dire le missionnaire pour sauver sa vie ?

Proposition 4 (Transitivité) :

L'implication est **transitive** *i.e.* si :

$$\left(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}\right) \text{ et } \left(\mathcal{Q} \implies \mathcal{R}\right) \text{ sont vraies alors } \left(\mathcal{P} \implies \mathcal{R}\right) \text{ est vraie.}$$

Définition 8 (Contraposée et réciproque) :

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

- L'implication (non $\mathcal{Q}$) $\implies$ (non $\mathcal{P}$), notée $\rceil\mathcal{Q} \implies \rceil\mathcal{P}$, est appelée la contraposition ou la contraposée de $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$.

ATTENTION

Une implication et sa réciproque peuvent très bien avoir des valeurs de vérité différentes, ou l'une être évidente et l'autre pas.

Exemple 10 :

- La contraposée de la proposition « la nuit, tous les chats sont gris » est « Si au moins un chat n'est pas gris, alors il fait jour ».

Définition 8 (Contraposée et réciproque) :

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux propositions.

- L'implication (non $\mathscr{Q}$) $\implies$ (non $\mathscr{P}$), notée $\rceil\mathscr{Q} \implies \rceil\mathscr{P}$, est appelée la contraposition ou la contraposée de $\mathscr{P} \implies \mathscr{Q}$.
- L'implication $\mathscr{Q} \implies \mathscr{P}$ est appelée l'implication réciproque de $\mathscr{P} \implies \mathscr{Q}$.

ATTENTION

Une implication et sa réciproque peuvent très bien avoir des valeurs de vérité différentes, ou l'une être évidente et l'autre pas.

Exemple 10 :

- La contraposée de la proposition « la nuit, tous les chats sont gris » est « Si au moins un chat n'est pas gris, alors il fait jour ».
- Sa réciproque est « Si tous les chats sont gris, alors il fait nuit ».

Exercice 7 :

Citer des propositions dont la réciproque est fausse.

Définition 9 (Équivalence) :

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

On dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes et on note $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ lorsque les propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ont les mêmes valeurs de vérité.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Figure 4 – Table de vérité de l'équivalence.

II. Notions de logique formelle

4. Équivalence (...si, et seulement si ...)

Définition 9 (Équivalence) :

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

On dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes et on note $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ lorsque les propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ont les mêmes valeurs de vérité.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$	$\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$	$(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \implies \mathcal{P})$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Figure 4 – Table de vérité de l'équivalence.

En particulier, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes lorsqu'on a, à la fois, $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$.

ATTENTION

Lorsque l'on écrit $\mathscr{P} \iff \mathscr{Q}$ cela sous-entend « $\mathscr{P} \iff \mathscr{Q}$ est vraie » mais nullement que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ le soient. Les propositions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ seront seulement vraies ou fausses en même temps.

ATTENTION

Lorsque l'on écrit $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ cela sous-entend « $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ est vraie » mais nullement que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ le soient. Les propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ seront seulement vraies ou fausses en même temps.

Vocabulaire : Lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes, on dit que $\mathcal{P}$ est vraie si, et seulement si $\mathcal{Q}$ est vraie.

On dit aussi que $\mathcal{P}$ est une condition nécessaire et suffisante (CNS) de $\mathcal{Q}$ ou encore que pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie, il faut et il suffit que $\mathcal{P}$ soit vraie.

Exercice 8 :

Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Longleftrightarrow$, $\Longleftarrow$, $\Longrightarrow$.

1. $x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 4 \ \ldots \ x = 2\,;$

Exercice 8 :

Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\iff$, $\Longleftarrow$, $\Longrightarrow$.

1. $x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 4 \ \ldots \ x = 2$;
2. $z \in \mathbb{C} \quad z = \overline{z} \ \ldots \ z \in \mathbb{R}$;

Exercice 8 :

Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Longleftrightarrow$, $\Longleftarrow$, $\Longrightarrow$.

1. $x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 4 \ \ldots \ x = 2\,;$
2. $z \in \mathbb{C} \quad z = \overline{z} \ \ldots \ z \in \mathbb{R}\,;$
3. $x \in \mathbb{R} \quad x = \pi \ \ldots \ e^{2ix} = 1.$

Théorème 5 :

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

L'implication $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ et sa contraposée sont équivalentes. Autrement dit :

$$(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \iff (\rceil\mathcal{Q} \implies \rceil\mathcal{P}).$$

Théorème 5 :

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

L'implication $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ et sa contraposée sont équivalentes. Autrement dit :

$$(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \iff (\rceil \mathcal{Q} \implies \rceil \mathcal{P}).$$

Cette propriété était particulièrement utilisée dans vos jeunes classes pour prouver qu'un triangle n'était pas rectangle ou que deux droites n'étaient pas parallèles à partir de la négation de l'égalité des carrés et des quotients respectivement.

Théorème 5 :

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

L'implication $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ et sa contraposée sont équivalentes. Autrement dit :

$$(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \iff (\rceil \mathcal{Q} \implies \rceil \mathcal{P}).$$

Cette propriété était particulièrement utilisée dans vos jeunes classes pour prouver qu'un triangle n'était pas rectangle ou que deux droites n'étaient pas parallèles à partir de la négation de l'égalité des carrés et des quotients respectivement.

Exercice 9 :

Montrer que $\forall\ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x \neq -1 \text{ et } y \neq -1) \implies (x + xy + y \neq -1).$$

Méthode 4 :

D'après la proposition (4) pour démontrer que n énoncés $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, ...$\mathcal{P}_n$ sont équivalents, il suffit de démontrer les n implications :

$$\mathcal{P}_1 \implies \mathcal{P}_2 \implies \ldots \implies \mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_1.$$

Proposition 6 :

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. Alors :

- non (non $\mathcal{P}$) $\iff$ $\mathcal{P}$.

Proposition 6 :

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. Alors :

- non (non $\mathcal{P}$) $\iff$ $\mathcal{P}$.
- non ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) $\iff$ (non $\mathcal{P}$) ou (non $\mathcal{Q}$), **(Loi de Morgan)**

Proposition 6 :

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. Alors :

- non (non $\mathcal{P}$) $\iff$ $\mathcal{P}$.
- non ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) $\iff$ (non $\mathcal{P}$) ou (non $\mathcal{Q}$), **(Loi de Morgan)**
- non ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) $\iff$ (non $\mathcal{P}$) et (non $\mathcal{Q}$), **(Loi de Morgan)**

Proposition 6 :

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. Alors :

- non (non $\mathcal{P}$) $\iff$ $\mathcal{P}$.
- non ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) $\iff$ (non $\mathcal{P}$) ou (non $\mathcal{Q}$), **(Loi de Morgan)**
- non ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) $\iff$ (non $\mathcal{P}$) et (non $\mathcal{Q}$), **(Loi de Morgan)**
- non ($\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$) $\iff$ $\mathcal{P}$ et (non $\mathcal{Q}$).

Proposition 6 :

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. Alors :

- non (non $\mathcal{P}$) $\iff$ $\mathcal{P}$.
- non ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) $\iff$ (non $\mathcal{P}$) ou (non $\mathcal{Q}$), **(Loi de Morgan)**
- non ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) $\iff$ (non $\mathcal{P}$) et (non $\mathcal{Q}$), **(Loi de Morgan)**
- non ($\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$) $\iff$ $\mathcal{P}$ et (non $\mathcal{Q}$).
- non ($\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$) $\iff$ ($\mathcal{P} \iff$ (non $\mathcal{Q}$)) $\iff$ ((non $\mathcal{P}$) $\iff \mathcal{Q}$).

Proposition 6 :

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. Alors :

- non (non $\mathcal{P}$) $\iff$ $\mathcal{P}$.
- non ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) $\iff$ (non $\mathcal{P}$) ou (non $\mathcal{Q}$), **(Loi de Morgan)**
- non ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) $\iff$ (non $\mathcal{P}$) et (non $\mathcal{Q}$), **(Loi de Morgan)**
- non ($\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$) $\iff$ $\mathcal{P}$ et (non $\mathcal{Q}$).
- non ($\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$) $\iff$ ($\mathcal{P} \iff$ (non $\mathcal{Q}$)) $\iff$ ((non $\mathcal{P}$) $\iff \mathcal{Q}$).

Exemple 11 :

La négation de « la nuit, tous les chats sont gris » est « la nuit, il existe au moins un chat qui n'est pas gris ».

Exercice 10 :

Nier la proposition : « tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans ».

Trois types de raisonnements peuvent être mis en œuvre :

1. **Raisonnement direct :** $\mathscr{P} \implies \mathscr{Q}$.
   La rédaction commencera systématiquement par « Supposons que $\mathscr{P}$ est vraie ... »

Trois types de raisonnements peuvent être mis en œuvre :

1. **Raisonnement direct :** $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$.
   La rédaction commencera systématiquement par « Supposons que $\mathcal{P}$ est vraie ... »
2. **Raisonnement par contraposition :** (non $\mathcal{Q}$) $\implies$ (non $\mathcal{P}$).
   La rédaction commencera par « Supposons que $\mathcal{Q}$ n'est pas vérifiée ... »

Trois types de raisonnements peuvent être mis en œuvre :

1. **Raisonnement direct :** $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$.
   La rédaction commencera systématiquement par « Supposons que $\mathcal{P}$ est vraie ... »
2. **Raisonnement par contraposition :** $(\text{non } \mathcal{Q}) \implies (\text{non } \mathcal{P})$.
   La rédaction commencera par « Supposons que $\mathcal{Q}$ n'est pas vérifiée ... »
3. **Raisonnement par l'absurde :** $\mathcal{P}$ et $(\text{non } \mathcal{Q})$ conduisent à une contradiction.
   La rédaction commencera par « Supposons que $\mathcal{P}$ est vraie et que $\mathcal{Q}$ n'est pas vérifiée ... ».

Trois types de raisonnements peuvent être mis en œuvre :

1. **Raisonnement direct :** $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$.
   La rédaction commencera systématiquement par « Supposons que $\mathcal{P}$ est vraie ... »
2. **Raisonnement par contraposition :** $(\text{non } \mathcal{Q}) \implies (\text{non } \mathcal{P})$.
   La rédaction commencera par « Supposons que $\mathcal{Q}$ n'est pas vérifiée ... »
3. **Raisonnement par l'absurde :** $\mathcal{P}$ et $(\text{non } \mathcal{Q})$ conduisent à une contradiction.
   La rédaction commencera par « Supposons que $\mathcal{P}$ est vraie et que $\mathcal{Q}$ n'est pas vérifiée ... ».

Dans tous les cas, une bonne traduction des propriétés devrait conduire au résultat escompté.

Trois types de raisonnements peuvent être mis en œuvre :

1. **Raisonnement direct :** $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$.
   La rédaction commencera systématiquement par « Supposons que $\mathcal{P}$ est vraie ... »
2. **Raisonnement par contraposition :** $(\text{non } \mathcal{Q}) \implies (\text{non } \mathcal{P})$.
   La rédaction commencera par « Supposons que $\mathcal{Q}$ n'est pas vérifiée ... »
3. **Raisonnement par l'absurde :** $\mathcal{P}$ et $(\text{non } \mathcal{Q})$ conduisent à une contradiction.
   La rédaction commencera par « Supposons que $\mathcal{P}$ est vraie et que $\mathcal{Q}$ n'est pas vérifiée ... ».

Dans tous les cas, une bonne traduction des propriétés devrait conduire au résultat escompté.

ATTENTION

Même si cela est sous-entendu, pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie il faut, certes, que l'implication $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ soit vraie mais aussi vérifier que $\mathcal{P}$ le soit également.

On parle de modus ponens [3], ou syllogisme :

Si $\mathcal{P}$ est vraie et $(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q})$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$ est vraie

$$\mathcal{P} \wedge (\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \implies \mathcal{Q}.$$

Exemple 12 :

Tout homme est mortel, or Socrate est un homme, donc Socrate est mortel.

Exemple 12 :

Tout homme est mortel, or Socrate est un homme, donc Socrate est mortel.

Exercice 11 :

1. Montrer par un raisonnement direct que, si n est un entier pair, alors n^2 est pair.

Exemple 12 :

Tout homme est mortel, or Socrate est un homme, donc Socrate est mortel.

Exercice 11 :

1. Montrer par un raisonnement direct que, si n est un entier pair, alors n^2 est pair.
2. Montrer par un raisonnement par contraposition que, si n^2 est pair, alors n est pair.

Exemple 12 :

Tout homme est mortel, or Socrate est un homme, donc Socrate est mortel.

Exercice 11 :

1. Montrer par un raisonnement direct que, si n est un entier pair, alors n^2 est pair.
2. Montrer par un raisonnement par contraposition que, si n^2 est pair, alors n est pair.
3. Montrer par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Aide : On pourra utiliser le résultat de la question 2.

Pour démontrer une équivalence, il est très souvent commode de procéder en deux étapes en démontrant successivement que $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ et que $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$.

$$(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}) \iff (\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}).$$

Pour démontrer une équivalence, il est très souvent commode de procéder en deux étapes en démontrant successivement que $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ et que $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$.

$$(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}) \iff (\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}).$$

Dans les cas simples et en faisant attention qu'il y a équivalence à chaque étape, on pourra raisonner par équivalence comme pour les équations.

Pour démontrer une équivalence, il est très souvent commode de procéder en deux étapes en démontrant successivement que $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ et que $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$.

$$(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}) \iff (\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}).$$

Dans les cas simples et en faisant attention qu'il y a équivalence à chaque étape, on pourra raisonner par équivalence comme pour les équations.

Exemple 13 :

On a montré successivement que si n est un entier pair, alors n^2 est pair puis que si n^2 est pair, alors n est pair.

Donc, n est pair $\iff$ n^2 est pair.

Propriété universelle : Pour démontrer qu'une propriété du type « $\forall x \in \mathrm{E}$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie »,

Propriété universelle : Pour démontrer qu'une propriété du type « $\forall\, x \in \mathrm{E}$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie »,

- on peut introduire une variable x représentant un élément sans aucune condition si ce n'est appartenir à E et prouver ensuite que $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

Propriété universelle : Pour démontrer qu'une propriété du type « $\forall x \in \mathrm{E}$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie »,

- on peut introduire une variable x représentant un élément sans aucune condition si ce n'est appartenir à E et prouver ensuite que $\mathcal{P}(x)$ est vraie.
- On peut également montrer par l'absurde que l'existence d'un x de E tel que $\rceil\mathcal{P}$ est fausse.

Propriété universelle : Pour démontrer qu'une propriété du type « $\forall x \in \mathrm{E}$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie »,

- on peut introduire une variable x représentant un élément sans aucune condition si ce n'est appartenir à E et prouver ensuite que $\mathcal{P}(x)$ est vraie.
- On peut également montrer par l'absurde que l'existence d'un x de E tel que $\rceil\mathcal{P}$ est fausse.
- Enfin, dans les cas plus complexes, on peut également raisonner par disjonction des cas en étudiant les différentes situations selon les valeurs de x :

$$\Big((\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \implies \mathcal{R}\Big) \iff \Big((\mathcal{P} \implies \mathcal{R}) \wedge (\mathcal{Q} \implies \mathcal{R})\Big).$$

Propriété universelle : Pour démontrer qu'une propriété du type « $\forall\, x \in \mathrm{E}$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie »,

- on peut introduire une variable x représentant un élément sans aucune condition si ce n'est appartenir à E et prouver ensuite que $\mathcal{P}(x)$ est vraie.
- On peut également montrer par l'absurde que l'existence d'un x de E tel que $\rceil\mathcal{P}$ est fausse.
- Enfin, dans les cas plus complexes, on peut également raisonner par disjonction des cas en étudiant les différentes situations selon les valeurs de x :

$$\Big((\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \implies \mathcal{R}\Big) \iff \Big((\mathcal{P} \implies \mathcal{R}) \wedge (\mathcal{Q} \implies \mathcal{R})\Big).$$

Exemples 14 :

1. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 \geqslant 2x$.
   En effet, soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geqslant 0$ comme carré d'un nombre réel. Par conséquent, $x^2 + 1 \geqslant 2x$, ce qu'il fallait établir.

Propriété universelle : Pour démontrer qu'une propriété du type « $\forall\, x \in \mathrm{E}$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie »,

- on peut introduire une variable x représentant un élément sans aucune condition si ce n'est appartenir à E et prouver ensuite que $\mathcal{P}(x)$ est vraie.
- On peut également montrer par l'absurde que l'existence d'un x de E tel que $\rceil\mathcal{P}$ est fausse.
- Enfin, dans les cas plus complexes, on peut également raisonner par disjonction des cas en étudiant les différentes situations selon les valeurs de x :

$$\Big((\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \implies \mathcal{R}\Big) \iff \Big((\mathcal{P} \implies \mathcal{R}) \wedge (\mathcal{Q} \implies \mathcal{R})\Big).$$

Exemples 14 :

1. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 \geqslant 2x$.
   En effet, soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geqslant 0$ comme carré d'un nombre réel. Par conséquent, $x^2 + 1 \geqslant 2x$, ce qu'il fallait établir.
2. Tout entier naturel supérieur à 2 est produit de nombres premiers.

Exercice 12 :

Montrer, sans utiliser le fait qu'il s'agit d'une somme classique, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est un entier.

Existence d'un objet : Démontrer qu'une propriété du type « $\exists\, x, \mathcal{P}(x)$ est vraie » est souvent ce qu'il y a de plus délicat.

Existence d'un objet : Démontrer qu'une propriété du type « $\exists\, x, \mathcal{P}(x)$ est vraie » est souvent ce qu'il y a de plus délicat.

- Dans le meilleur des cas, on construit explicitement x qui convient. Pour s'aider à définir un tel x convenable, on peut alors mener un raisonnement dit, par analyse/synthèse (cf. plus loin).

Existence d'un objet : Démontrer qu'une propriété du type « $\exists\, x, \mathcal{P}(x)$ est vraie » est souvent ce qu'il y a de plus délicat.

- Dans le meilleur des cas, on construit explicitement x qui convient. Pour s'aider à définir un tel x convenable, on peut alors mener un raisonnement dit, par analyse/synthèse (cf. plus loin).
- On peut également montrer qu'il est absurde que $\mathcal{P}$ soit fausse pour tout x.

Existence d'un objet : Démontrer qu'une propriété du type « $\exists\, x, \mathcal{P}(x)$ est vraie » est souvent ce qu'il y a de plus délicat.

- Dans le meilleur des cas, on construit explicitement x qui convient. Pour s'aider à définir un tel x convenable, on peut alors mener un raisonnement dit, par analyse/synthèse (cf. plus loin).
- On peut également montrer qu'il est absurde que $\mathcal{P}$ soit fausse pour tout x.

Exemples 15 :

1. Il existe une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = -f$.
   En effet, posons $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$. Alors, f est dérivable par composition et on calcule :
   $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} = -f(x)$.
   Donc $f' = -f$.

Existence d'un objet : Démontrer qu'une propriété du type « $\exists\, x, \mathcal{P}(x)$ est vraie » est souvent ce qu'il y a de plus délicat.

- Dans le meilleur des cas, on construit explicitement x qui convient. Pour s'aider à définir un tel x convenable, on peut alors mener un raisonnement dit, par analyse/synthèse (cf. plus loin).
- On peut également montrer qu'il est absurde que $\mathcal{P}$ soit fausse pour tout x.

Exemples 15 :

1. Il existe une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = -f$.
   En effet, posons $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$. Alors, f est dérivable par composition et on calcule : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\,\mathrm{e}^{-x} = -f(x)$.
   Donc $f' = -f$.
2. Si $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ est dérivable, positive et $f(0) = 0$, alors sa dérivée est négative en au moins un point.

Pour déterminer les solutions d'un problème, on peut raisonner en deux temps :

Analyse : On suppose que le problème est résolu et on en déduit des conditions nécessaires sur la solution. On restreint le champ des solutions possibles.

Pour déterminer les solutions d'un problème, on peut raisonner en deux temps :

Analyse : On suppose que le problème est résolu et on en déduit des conditions nécessaires sur la solution. On restreint le champ des solutions possibles.

Synthèse : On montre que ces conditions sont suffisantes *i.e.* que les possibilités obtenues dans l'analyse sont plus que des possibilités, et on résout le problème

Pour déterminer les solutions d'un problème, on peut raisonner en deux temps :

Analyse : On suppose que le problème est résolu et on en déduit des conditions nécessaires sur la solution. On restreint le champ des solutions possibles.

Synthèse : On montre que ces conditions sont suffisantes *i.e.* que les possibilités obtenues dans l'analyse sont plus que des possibilités, et on résout le problème

En pratique, on démontre que, si x est solution d'un problème, il ne peut prendre que certaines valeurs (Analyse). On vérifie ensuite si ces valeurs sont effectivement solutions (Synthèse). À l'issue de ce double mouvement, on a déterminé tous les éléments qui répondent au problème.

III. Exemples de raisonnements

4. Raisonnement par Analyse-Synthèse

Pour déterminer les solutions d'un problème, on peut raisonner en deux temps :

Analyse : On suppose que le problème est résolu et on en déduit des conditions nécessaires sur la solution. On restreint le champ des solutions possibles.

Synthèse : On montre que ces conditions sont suffisantes *i.e.* que les possibilités obtenues dans l'analyse sont plus que des possibilités, et on résout le problème

En pratique, on démontre que, si x est solution d'un problème, il ne peut prendre que certaines valeurs (Analyse). On vérifie ensuite si ces valeurs sont effectivement solutions (Synthèse). À l'issue de ce double mouvement, on a déterminé tous les éléments qui répondent au problème.

Ce type de raisonnement sera souvent pratiqué lorsqu'on demandera de prouver l'existence et l'unicité d'un certain x vérifiant une propriété $\mathcal{P}(x)$.

Pour déterminer les solutions d'un problème, on peut raisonner en deux temps :

Analyse : On suppose que le problème est résolu et on en déduit des conditions nécessaires sur la solution. On restreint le champ des solutions possibles.

Synthèse : On montre que ces conditions sont suffisantes *i.e.* que les possibilités obtenues dans l'analyse sont plus que des possibilités, et on résout le problème

En pratique, on démontre que, si x est solution d'un problème, il ne peut prendre que certaines valeurs (Analyse). On vérifie ensuite si ces valeurs sont effectivement solutions (Synthèse). À l'issue de ce double mouvement, on a déterminé tous les éléments qui répondent au problème.

Ce type de raisonnement sera souvent pratiqué lorsqu'on demandera de prouver l'existence et l'unicité d'un certain x vérifiant une propriété $\mathcal{P}(x)$.

- Démontrant l'unicité d'un tel x hypothétique on procédera à l'analyse d'une telle solution tout en cherchant une caractérisation de celle-ci.

Pour déterminer les solutions d'un problème, on peut raisonner en deux temps :

Analyse : On suppose que le problème est résolu et on en déduit des conditions nécessaires sur la solution. On restreint le champ des solutions possibles.

Synthèse : On montre que ces conditions sont suffisantes *i.e.* que les possibilités obtenues dans l'analyse sont plus que des possibilités, et on résout le problème

En pratique, on démontre que, si x est solution d'un problème, il ne peut prendre que certaines valeurs (Analyse). On vérifie ensuite si ces valeurs sont effectivement solutions (Synthèse). À l'issue de ce double mouvement, on a déterminé tous les éléments qui répondent au problème.

Ce type de raisonnement sera souvent pratiqué lorsqu'on demandera de prouver l'existence et l'unicité d'un certain x vérifiant une propriété $\mathcal{P}(x)$.

- Démontrant l'unicité d'un tel x hypothétique on procédera à l'analyse d'une telle solution tout en cherchant une caractérisation de celle-ci.
- Posant alors un tel x, on vérifiera qu'il répond au problème quitte à imposer de nouvelles contraintes.

Exercice 13 :

Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 13 :

Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Remarque :

- La phase d'analyse est la recherche de conditions nécessaires.

Exercice 13 :

Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Remarque :

- La phase d'analyse est la recherche de conditions nécessaires.
- La phase de synthèse est la donnée de conditions suffisantes.

Rappel (Deux propriétés de $\mathbb{N}$) :

1. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.

Rappel (Deux propriétés de $\mathbb{N}$) :

1. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.
2. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

Rappel (Deux propriétés de $\mathbb{N}$) :

1. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.
2. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

Théorème (Raisonnement par récurrence simple) :

On considère une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}$, et on suppose que :

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie, **(Initialisation)**

Rappel (Deux propriétés de $\mathbb{N}$) :

1. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.
2. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

Théorème (Raisonnement par récurrence simple) :

On considère une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}$, et on suppose que :

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie, **(Initialisation)**
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{P}(k)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. **(Principe d'hérédité)**

Rappel (Deux propriétés de $\mathbb{N}$) :

1. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.
2. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

Théorème (Raisonnement par récurrence simple) :

On considère une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}$, et on suppose que :

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie, **(Initialisation)**
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{P}(k)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. **(Principe d'hérédité)**

Alors la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 10 (Suite de propositions vraie à partir d'un certain rang) :

Soit $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de propositions.

On dit que $\mathcal{P}$ (ou $\mathcal{P}_n$ par abus de langage) est vraie à partir d'un certain rang si :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n \geqslant n_0,\ \mathcal{P}_n.$$

Définition 10 (Suite de propositions vraie à partir d'un certain rang) :

Soit $\mathscr{P} = (\mathscr{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de propositions.

On dit que $\mathscr{P}$ (ou $\mathscr{P}_n$ par abus de langage) est vraie à partir d'un certain rang si :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}_n.$$

Si la propriété $\mathscr{P}$ n'est initialisée qu'à partir d'un certain rang n_0, bien sûr, celle-ci ne sera alors vraie que pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Exercice 14 :

Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, les propriétés suivantes :

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $3^n - 1$ est pair.

Exercice 14 :

Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, les propriétés suivantes :

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $3^n - 1$ est pair.
2. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

ATTENTION

Les deux conditions du théorème (7) doivent être soigneusement vérifiées. Deux exemples pour le prouver :

- Montrer que la proposition $\mathcal{P}_n$: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, 3 divise 2^n est héréditaire.
  Est-elle vraie pour tout entier n ?

ATTENTION

Les deux conditions du théorème (7) doivent être soigneusement vérifiées. Deux exemples pour le prouver :

- Montrer que la proposition $\mathscr{P}_n$: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, 3 divise 2^n est héréditaire.
  Est-elle vraie pour tout entier n ?
- Soit la propriété $\mathscr{P}_n$: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n^2 - n + 41$ est un nombre premier.
  Est-elle initialisable ?

Plusieurs formes de récurrence, en apparence plus générales que la récurrence ordinaire, s'avèrent équivalentes.

Il peut arriver que, pour l'hérédité, quand il s'agit de démontrer $\mathcal{P}(k+1)$, on ait besoin de supposer la propriété aux deux rangs précédents, c'est-à-dire non seulement pour n, mais aussi pour $n-1$. On est amené à utiliser le principe de récurrence suivant :

Corollaire I (Raisonnement par récurrence double) :

On considère une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}$, et on suppose que :

- $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies,

Plusieurs formes de récurrence, en apparence plus générales que la récurrence ordinaire, s'avèrent équivalentes.

Il peut arriver que, pour l'hérédité, quand il s'agit de démontrer $\mathcal{P}(k+1)$, on ait besoin de supposer la propriété aux deux rangs précédents, c'est-à-dire non seulement pour n, mais aussi pour $n-1$. On est amené à utiliser le principe de récurrence suivant :

Corollaire 1 (Raisonnement par récurrence double) :

On considère une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}$, et on suppose que :

- $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies,
- pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{P}(k)$ et $\mathcal{P}(k+1)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(k+2)$ est vraie.

Plusieurs formes de récurrence, en apparence plus générales que la récurrence ordinaire, s'avèrent équivalentes.

Il peut arriver que, pour l'hérédité, quand il s'agit de démontrer $\mathcal{P}(k+1)$, on ait besoin de supposer la propriété aux deux rangs précédents, c'est-à-dire non seulement pour n, mais aussi pour $n-1$. On est amené à utiliser le principe de récurrence suivant :

Corollaire 1 (Raisonnement par récurrence double) :

On considère une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}$, et on suppose que :

- $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies,
- pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{P}(k)$ et $\mathcal{P}(k+1)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(k+2)$ est vraie.

Alors la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n.$$

Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n$.

La récurrence précédente peut être généralisée à plus d'hypothèses, 3, 4, etc.

Mais tous ces principes apparaissent comme des cas particuliers du principe de récurrence suivant, parfois appelé récurrence forte, qui permet, pour démontrer la propriété au rang suivant de la supposer vraie pour tous les rangs inférieurs (pour cette raison, cette forme de récurrence est aussi appelée récurrence cumulative).

Corollaire 2 (Raisonnement par récurrence forte) :

On considère une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}$, et on suppose que :

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie,

La récurrence précédente peut être généralisée à plus d'hypothèses, 3, 4, etc.

Mais tous ces principes apparaissent comme des cas particuliers du principe de récurrence suivant, parfois appelé récurrence forte, qui permet, pour démontrer la propriété au rang suivant de la supposer vraie pour tous les rangs inférieurs (pour cette raison, cette forme de récurrence est aussi appelée récurrence cumulative).

Corollaire 2 (Raisonnement par récurrence forte) :

On considère une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}$, et on suppose que :

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour $k \leqslant n$, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

La récurrence précédente peut être généralisée à plus d'hypothèses, 3, 4, etc.

Mais tous ces principes apparaissent comme des cas particuliers du principe de récurrence suivant, parfois appelé récurrence forte, qui permet, pour démontrer la propriété au rang suivant de la supposer vraie pour tous les rangs inférieurs (pour cette raison, cette forme de récurrence est aussi appelée récurrence cumulative).

Corollaire 2 (Raisonnement par récurrence forte) :

On considère une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}$, et on suppose que :

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour $k \leqslant n$, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Alors la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16 (Théorème fondamental de l'arithmétique) :

Montrer que tout entier $n \geqslant 2$ admet un diviseur premier.