Logique & Raisonnement

Exercice 1 : Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est majorée ;
2. f est bornée ;
3. f est paire ;
4. f est impaire ;
5. f ne s'annule jamais ;
6. f est strictement décroissante ;
7. f est croissante ;
8. f est la fonction nulle ;
9. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts ;
10. f est inférieure à g ;
11. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.

Exercice 2 : En utilisant convenablement les quantificateurs, énoncer le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones.

Exercice 3 : Soient les nombres réels x_1, x_2, ..., x_n. Traduire en langage formalisé les phrases suivantes :

1. Les x_i sont tous nuls
2. L'un des x_i est nul
3. Les x_i sont non tous nuls
4. Les x_i sont tous non nuls
5. Les x_i sont égaux
6. 2 au moins parmi les x_i sont égaux
7. 2 au moins parmi les x_i sont distincts
8. Les x_i sont tous distincts

Exercice 4 : Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nier, de la manière la plus précise possible, les énoncés qui suivent :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leqslant 1$.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante et positive.
4. Il existe $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) \leqslant 0$.
5. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $y \in \mathbb{R}$, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.

Exercice 5 :

1. Montrer que les assertions $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$ et $(\rceil\mathcal{P} \implies \mathcal{Q})$ sont équivalentes.
2. **Application :** Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\max\left\{x^2,\, (x-2)^2\right\} \geqslant 1$.

Exercice 6 :

1. Déterminer les solutions réelles de l'équation $\sqrt{x+6} = x$.
2. Montrer qu'il existe un unique réel x tel que $\sqrt{x-2} = \sqrt{2x-1}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{N}$, l'équation $x(x+1)(2x+1) = 84$.

Logique & Raisonnement

Exercice 7 : Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, les propriétés suivantes :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 1$ et, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n}$.

   Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, u_n est majorée par 3.
2. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
3. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$.
5. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ est divisible par 6.
6. $\forall\, n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.
7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$ et, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + 3n(n+1)$.

   Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, u_n est un multiple de 6.

Exercice 8 : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = -1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

Correction : On montre ce résultat par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, $u_0 = -1 = 3^0 - 2^1 = 1 - 2 = -1$ et pour $n = 1$, $u_1 = -1 = 3^1 - 2^2$ donc la relation est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Supposons qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$, tel que $u_k = 3^k - 2^{k+1}$ et $u_{k+1} = 3^{k+1} - 2^{k+2}$ (et seulement pour ce k).

Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_{k+2} = 5u_{k+1} - 6u_k = 5(3^{k+1} - 2^{k+2}) - 2 \times 3(3^k - 2^{k+1})$
$= 3^{k+1}(5-2) - 2^{k+2}(5-3) = 3^{k+2} - 2^{k+3}$.

La relation est donc vraie pour $k+2$ et la propriété est héréditaire.

Étant initialisée à partir de $n = 0$, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 3^n - 2^{n+1}.$$

Exercice 9 : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n+1}u_{n-1}.$$

Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant u_n \leqslant n^2$.

Correction : Pour l'hérédité,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{2}{n+1}u_{n-1} \leqslant n^2 + \frac{2}{n+1}(n-1)^2 = n^2 + 2(n-1)\frac{n-1}{n+1} \\ &\leqslant n^2 + 2(n-1) = n^2 + 2n + 1 - 3 \leqslant (n+1)^2. \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} &= u_n + \frac{2}{n+1}u_{n-1} \leqslant n^2 + \frac{2}{n+1}(n-1)^2 \\ &= \frac{n^3 + 3n^2 - 4n + 2}{n+1} \leqslant \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{n+1} = (n+1)^2. \end{aligned}$$

Exercice 10 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1}(u_0^2 + u_1^2 + \ldots + u_n^2).$$

Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.

Exercice 11 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_0 \geqslant 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 2^n u_0$.