Types de raisonnement

Exercice 1 – Donner le tableau des valeurs de vérité des assertions suivantes, puis conclure :

1. $(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \vee \Big((\rceil\mathcal{P}) \implies \mathcal{Q}\Big)$.
2. $(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \wedge \Big((\rceil\mathcal{P}) \implies \mathcal{Q}\Big)$.

Exercice 2 (Une inégalité sur des réels) –

1. Montrer que $\forall\, x, y \in [1\,;+\infty[,\ x + y \leqslant 1 + xy$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*, a_1, \dots, a_n \in [1, +\infty[$. En déduire que :

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \leqslant 2^{n-1}\left(1+\prod_{i=1}^{n}a_i\right).$$

Exercice 3 (Une version des tiroirs de Dirichlet) – Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On se donne $n+1$ réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ éléments de $[0\,;1]$ vérifiant $0 \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant 1$.

On veut démontrer par l'absurde la propriété suivante :

$$\mathcal{P} :\ \text{« Il y a deux de ces réels qui sont distants de moins de } \frac{1}{n}. \text{ »}$$

1. Écrire à l'aide de quantificateurs et des valeurs $(x_i - x_{i-1})$ une formule logique équivalente à la propriété.
2. Écrire la négation de cette formule logique.
3. Rédiger une démonstration par l'absurde de la propriété $\mathcal{P}$.

Exercice 4 –

1. Montrer que pour tout $t \in]-1\,;+\infty[$, $\ln(1+t) \leqslant t$.
2. Soit $\varphi : t \longmapsto \dfrac{(1+t)\ln(1+t)}{t}$.

   Préciser l'ensemble de définition de φ et vérifiez que φ est strictement monotone sur tout intervalle sur lequel elle est définie.
3. Soit a, b deux réels strictement positifs tels que $a \leqslant b$.

   On pose $g : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (a) Justifier soigneusement que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Pour $x > 0$, exprimez $g'(x)$ à l'aide de $\varphi(bx) - \varphi(ax)$.

   En déduire que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. En évaluant g en $\dfrac{1}{a}$ et $\dfrac{1}{b}$, montrer que :

$$\forall\,(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad \ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leqslant (\ln 2)^2.$$