# Types de raisonnement

Commentaires :

- *Une erreur récurrente et persistante est de croire que le quotient de deux fonctions dérivables est dérivable. Ceci est faux si le dénominateur s'annule !*
- *Pensez à mettre des phrases pour expliquer succinctement votre démarche.*
- *Le temps où l'on avait besoin de $u$, $v$, $u'$ et $v'$ est révolu. Vous êtes assez grand pour dériver sans cette béquille.*
- *Trop nombreux sont ceux qui confondent implication directe et leur réciproque. Réfléchissez bien à quelle propriété vous avez besoin.*
- *On peut conserver les inégalités en multipliant par un réel non nul positif $a$ car la fonction $x \longmapsto ax$ est alors croissante pas parce que $a$ est croissant ou je ne sais quoi. Relisez-vous !*
- *Chaque fois que vous vous sentirez obligés de vous justifier par un « forcément », vous verrez que ce sera « forcément » faux.*
- *Attention, c'est la fonction $g$ qui est définie ou dérivable et non $g(x)$ qui l'est aussi mais qui donnera toujours $0$.*

## Correction de l'exercice 1 –

1.

| $\mathcal{P}$ | $\mathcal{Q}$ | $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ | $\rceil\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ | $(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \vee \Big((\rceil\mathcal{P}) \implies \mathcal{Q}\Big)$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V |
| V | F | F | V | V |
| F | V | V | V | V |
| F | F | V | F | V |

On en déduit que l'assertion $(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \vee \Big((\rceil\mathcal{P}) \implies \mathcal{Q}\Big)$ est une tautologie.

2.

| $\mathcal{P}$ | $\mathcal{Q}$ | $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ | $\rceil\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ | $(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \wedge \Big((\rceil\mathcal{P}) \implies \mathcal{Q}\Big)$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V |
| V | F | F | V | F |
| F | V | V | V | V |
| F | F | V | F | F |

On en déduit que l'assertion $(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \wedge \Big((\rceil\mathcal{P}) \implies \mathcal{Q}\Big)$ est équivalente à $\mathcal{Q}$.

Commentaires : *Pour certains, vous avez vraiment pensé que l'exercice consistait simplement à me faire deux tableaux avec des V et des F sans me mettre une seule phrase ?*

## Correction de l'exercice 2 –

1. Pour tout $x, y \in [1\,;+\infty[$, $(1+xy)-(x+y)=(x-1)(y-1) \geqslant 0$ *i.e.* $x+y \leqslant 1+xy$.

   Commentaires : *Évitez le plus possible de faire des successions d'équivalences. C'est moche !*

   *De plus, commencer par écrire « On a $x+y \leqslant \dots$ » est faux.*

2. Par récurrence sur $n$ :
   - L'inégalité est évidente pour $n=1$ (il y a même égalité).

— Supposons l'inégalité vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $a_1, \ldots, a_{n+1} \in [1\,;+\infty[$. Comme $1 + a_{n+1} > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n+1}(1+a_i) &= \left(\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\right)(1+a_{n+1}) \\ &\leqslant 2^{n-1}\left(1+\prod_{i=1}^{n}a_i\right)(1+a_{n+1}) \quad \text{par hypothèse de récurrence.} \\ &= 2^{n-1}\left(1+\underbrace{a_{n+1}+\prod_{i=1}^{n}a_i}_{x+y}+\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)a_{n+1}\right)\end{aligned}$$

D'après la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}&\leqslant 2^{n-1}\left(1+\underbrace{1+\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)a_{n+1}}_{1+xy}+\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)a_{n+1}\right) \\ &= 2^{n}\left(1+\prod_{i=1}^{n+1}a_i\right).\end{aligned}$$

La propriété est héréditaire.

Commentaires : *Je redis que montrer une hérédité ne consiste pas à juste changer $n$ en $n+1$, ce serait bien trop simple.*

— Initialisée pour $n = 1$ et héréditaire, la propriété est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

## Correction de l'exercice 3 –

1. 1/ La traduction immédiate de la propriété est :

$$\mathcal{P} : \exists\, i, j \in \{0, \ldots, n\},\ (i \neq j) \text{ et } \left(x_j - x_i \leqslant \frac{1}{n}\right).$$

Quitte à réordonner la liste des $x_i$, on peut très bien supposer qu'il existe deux réels consécutifs vérifiant cette propriété. Ce qui s'écrit :

$$\mathcal{P} : \exists i \in \{1, \cdots, n\},\ x_i - x_{i-1} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Commentaires : *La « réordonnation » devait être expliquée.*

2. La négation de cette assertion est donc :

$$\forall\, i \in \{1, \cdots, n\},\ x_i - x_{i-1} > \frac{1}{n}.$$

Commentaires : *Attention ! si les $x_i$ n'avaient pas été ordonnés, la distance entre deux d'entre eux aurait du s'écrire avec des valeurs absolues.*

3. Supposons que la propriété $\mathcal{P}$ est fausse, c'est-à-dire que :

$$\forall\, i \in \{1, \cdots, n\},\ x_i - x_{i-1} > \frac{1}{n}.$$

En écrivant :

$$\begin{aligned}x_n - x_0 &= (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_2 - x_1) + (x_1 - x_0) \\ &> n \times \frac{1}{n} = 1.\end{aligned}$$

Cette dernière égalité contredit la définition des $x_i$. Elle est donc fausse. On conclut que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie.

## Correction de l'exercice 4 –

1. Soit $\mathrm{F} : t \longmapsto t - \ln(1+t)$. F est définie et dérivable sur $]-1\,;+\infty[$.

   Commentaires : *On ne dérive plus sans montrer que la fonction est dérivable et dire où.*

   Pour tout $t > -1$, $\mathrm{F}'(t) = 1 - \dfrac{1}{1+t} = \dfrac{t}{1+t}$. On en déduit que F est décroissante sur $]-1\,;0]$ et croissante sur $[0\,;1[$, donc elle possède une valeur minimale en 0, qui est 0.

   Conclusion, pour tout $t > -1$, $\mathrm{F}(t) \geqslant 0 \iff \ln(1+t) \leqslant t$.

   Commentaires : *La démonstration est bien plus jolie en utilisant la concavité de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ : sa courbe est donc sous ses tangentes. En particulier celle en 0 d'équation $y = x$.*

2. Il est presque évident que $\mathscr{D}_\varphi = ]-1\,;0[ \cup ]0\,;+\infty[$.

   Sur $\mathscr{D}_\varphi$, $\varphi$ est un quotient de fonctions dérivables **dont le dénominateur ne s'annule pas**, elle y est dérivable et on a :
   $$\forall\, t \in \mathscr{D}_\varphi,\ \varphi'(t) = -\frac{\ln(1+t) - t}{t^2} > 0.$$
   La fonction $\varphi$ est donc strictement monotone sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

   Commentaires : *Attention ! Personne n'a jamais dit qu'elle était strictement monotone sur $\mathscr{D}_\varphi$ mais sur tout intervalle inclus dans celui-ci.*

3. (a) La fonction $x \longmapsto 1 + ax$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et est à valeurs dans $]1\,;+\infty[$, donc dans $]0\,;+\infty[$.

   La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

   D'après le théorème de composition des fonctions dérivables, $x \longmapsto \ln(1+ax)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

   De même, la fonction $x \longmapsto \ln(1+bx)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

   La fonction $g$, quotient de fonctions dérivables **dont le dénominateur ne s'annule pas**, est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) Pour tout $x > 0$,
   $$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\frac{a}{1+ax}\ln(1+bx) - \dfrac{b}{1+bx}\ln(1+ax)}{(\ln(1+bx))^2} \\ &= \frac{a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax)}{(1+ax)(1+bx)(\ln(1+bx))^2} \\ &= \frac{abx(\varphi(bx) - \varphi(ax))}{(1+ax)(1+bx)(\ln(1+bx))^2} \quad \text{du signe de } (\varphi(bx) - \varphi(ax)). \end{aligned}$$
   Comme $0 < a \leqslant b$ et $x > 0$ alors $0 < ax \leqslant bx$, et $\varphi(bx) - \varphi(ax) \geqslant 0$ par croissance de $\varphi$

   Donc, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) \geqslant 0$ : la fonction $g$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

   Par croissance de $g$ sur $\mathbb{R}_+^*$, si $a \leqslant b$, alors $\dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$ et $g\left(\dfrac{1}{b}\right) \leqslant g\left(\dfrac{1}{a}\right)$. Ce qui se traduit par :
   $$(0 <)\ \frac{\ln\left(1 + \dfrac{a}{b}\right)}{\ln 2} \leqslant \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \dfrac{b}{a}\right)} \iff \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right)\ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leqslant (\ln 2)^2.$$

   Commentaires : *On fera bien attention au fait que l'on multiplie les inégalités par des nombres positifs.*

Par symétrie du rôle joué par $a$ et $b$ et par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, ce résultat est encore vrai pour $a \geqslant b$.

Conclusion,

$$\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad \ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leqslant (\ln 2)^2.$$