Devoir maison n° 2
Rappels sur les fonctions

À rendre le lundi 18 septembre 2023.

Les copies dont les résultats ne sont pas encadrés ou celles où il n'y a pas de phrase (dont ponctuation) ne seront pas corrigées.
L'exercice obligatoire est **OBLIGATOIRE**, et les exercices facultatifs sont **FACULTATIFS**.

Exercice obligatoire : arcs de chaînette

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\quad f(x) = \dfrac{1}{2}\big(\exp(x) + \exp(-x)\big) \quad$ et $\quad g(x) = \dfrac{1}{2}\big(\exp(x) - \exp(-x)\big)$.

Partie A : quelques formules

1. Simplifier $f(x)^2 - g(x)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad f(x+y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$.

Partie B : études de f et g

3. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

   b) Étudier le signe de f et de g. *On pourra raisonner algébriquement.*

   c) Justifier que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et que : $\quad f' = g \quad$ et $\quad g' = f$.

   d) En déduire les tableaux de variations de f et de g.

On note $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{G}$) la courbe représentative de f (resp. g) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

4. Étudier la position relative de $\mathscr{F}$ et de $\mathscr{G}$. *On pourra raisonner algébriquement.*
5. a) Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à $\mathscr{G}$ au point d'abscisse 0.

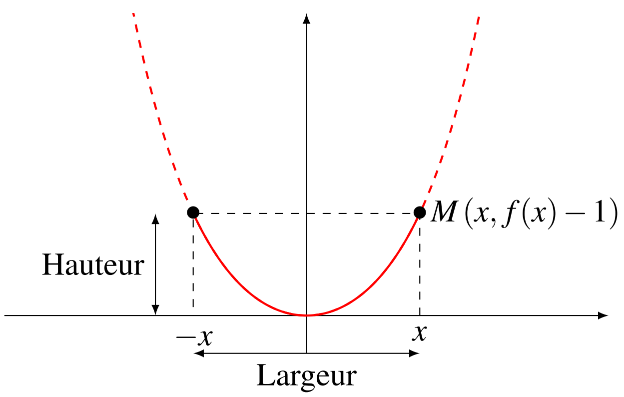
   b) Étudier la position relative de T et $\mathscr{G}$. *On pourra étudier une fonction judicieusement choisie, et utiliser la question 3d.*
6. Tracer **SOIGNEUSEMENT** la droite T (en rouge), puis les courbes $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ (au crayon à papier).

Partie C : application

On a représenté ci-contre la courbe d'équation :

$$y = f(x) - 1.$$

Cette courbe est appelée une *chaînette*. On s'intéresse ici aux *arcs de chaînette*, délimités par deux points de cette courbe symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Un tel arc est représenté sur le graphique ci-contre en trait plein. On définit la *largeur* et la *hauteur* de l'arc de chaînette délimité par les points M et M' comme indiqué sur le graphique.



Le but de cette partie est d'étudier les positions possibles sur la courbe du point M d'abscisse x strictement positive afin que la largeur de l'arc de chaînette soit égale à sa hauteur.

7. Justifier que le problème étudié se ramène à la résolution de l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\exp(x) + \exp(-x) - 4x - 2 = 0.$$

On note φ la fonction $x \mapsto \exp(x) + \exp(-x) - 4x - 2$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

8. Déterminer la limite de φ en $+\infty$.
9. a) Justifier que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et y calculer sa dérivée φ'.
   b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\quad \varphi'(x) \geq 0 \iff \exp(x)^2 - 4\exp(x) - 1 \geq 0$.
   c) Déterminer le signe de la fonction $z \mapsto z^2 - 4z - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
   d) En déduire le tableau de signes de φ'.
10. Combien existe-il de positions qui répondent au problème posé ?

Exercices facultatifs

Exercice A

Montrer que pour tous $x, y \in \left]-1, 1\right[$: $\quad \dfrac{x+y}{1+xy} \in \left]-1, 1\right[$.

Exercice B : fonctions tan et cotan

On appelle *fonction tangente*, et on note tan, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

1. Donner le domaine de définition $\mathscr{D}$ de la fonction tan.
2. Montrer que la fonction tan est impaire et π-périodique.
3. Étudier la fonction tan sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
4. a) Donner l'équation de la tangente à tan en l'origine.
   b) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $\quad \tan(x) \geq x$.
5. Tracer le graphe de la fonction tan sur $[-2\pi, 2\pi]$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On appelle *fonction cotangente*, et on note cotan, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\tan(x)} = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

6. Sans faire d'étude de fonction, tracer dans le même repère qu'à la question 5 le graphe de la fonction cotangente sur $\left]-2\pi, 2\pi\right[$.
7. Étudier la fonction cotan sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
8. Montrer que pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$: $\quad 0 < \operatorname{cotan}(x) \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\sin(x)}$.

Rendez-vous au DM9 pour faire le lien entre la fonction cotan *et* $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Devoir maison n° 3
Nombres complexes

À rendre le lundi 25 septembre 2023.

Les copies dont les résultats ne sont pas encadrés ou celles où il n'y a pas de phrase (dont ponctuation) ne seront pas corrigées.

Exercice 1 : une suite à valeurs complexes

On note $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $z_0 = 8$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $z_{n+1} = \dfrac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{4} \times z_n$.

1. Calculer z_1, z_2 et z_3 sous forme algébrique.
2. a) Déterminer une forme exponentielle de $\dfrac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{4}$.

   b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $z_n = 8 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$.

   c) Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ a-t-on $z_n \in \mathbb{R}$?

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = |z_n|$.

   d) Donner la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et étudier sa limite.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1cm). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n le point image de z_n.

3. a) Placer dans $\mathscr{R}$ les points A_0, A_1, A_2 et A_3 au compas et à la règle non graduée.

   b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Expliquer comment passer géométriquement de A_n à A_{n+1}.
4. a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $A_kA_{k+1} = \dfrac{1}{2}u_k$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle ℓ_n la longueur de la *ligne brisée* reliant dans cet ordre les points A_0, A_1, A_2,..., A_{n-1} et A_n, c'est-à-dire : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A_kA_{k+1}$.

   b) Expliciter ℓ_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis étudier la convergence de la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2 : étude d'une homographie (ATS2020)

On note f la fonction $z \mapsto \dfrac{z-1}{z+1}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. *Les questions sont indépendantes.*

1. On pose $a = 1$, $b = -3$ et $c = \dfrac{-3 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}}{3}$.

   a) Calculer $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$.

   b) Montrer que le triangle ABC formé des points $A\big(f(a)\big)$, $B\big(f(b)\big)$ et $C\big(f(c)\big)$ est équilatéral.
2. Déterminer le lieu des points M d'affixe z pour lesquels : $f(z) \in \mathbb{U}$.
3. Déterminer le lieu des points M d'affixe z pour lesquels : $|f(z)| = \sqrt{2}$.
4. a) Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Étudier le nombre de solution de l'équation : $f(z) = \omega$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

   b) La fonction f est-elle injective ? surjective ?
5. Montrer si $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$, alors : $f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Exercices facultatifs

Exercice A : inégalité de Cauchy-Schwarz pour les sommes

Dans tout cet exercice, on fixe un entier naturel strictement positif n ainsi que des réels $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$. L'objectif est d'établir l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right). \tag{1}$$

1. On note T la fonction $\lambda \mapsto \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k + y_k)^2$ définie sur $\mathbb{R}$.
   a) Déterminer le signe de T.
   b) Montrer que : $\exists a,b,c \in \mathbb{R}/ \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad T(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$.
   c) Établir l'inégalité de Cauchy-Schwarz (1). *On pourra calculer le discriminant de T.*
2. **Applications.** *Les deux questions sont indépendantes.*
   a) Montrer que pour tous $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}_+^*$: $\quad (a_1+\cdots+a_n) \times \left(\dfrac{1}{a_1}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right) \geq n^2$.
   b) Montrer que pour tous $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$: $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$.

      En déduire que pour tous $b_1,\dots,b_n \in \mathbb{R}_+$: $\quad \displaystyle\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{b_k}$

      Montrer enfin que pour tout $x>1$: $\quad \sqrt{x^{2n}-1} \geq \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}\dfrac{x^n-1}{\sqrt{n}}$.

Exercice B : une fonction complexe

On note h la fonction $z \mapsto \dfrac{z^2}{z-2\mathrm{i}}$ définie sur $\mathbb{C}\setminus\{2\mathrm{i}\}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. a) Déterminer les racines carrées complexes de $8-6\mathrm{i}$ sous forme algébrique.
   b) En déduire tous les antécédents de $1+\mathrm{i}$ par h.
2. Soit $Z \in \mathbb{C}$. Discuter suivant les valeurs de Z le nombre d'antécédents de Z par h.
3. a) La fonction h est-elle injective ?

   On appelle *image de h*, et on note $\operatorname{Im} h$, l'ensemble des valeurs prises par la fonction h, *i.e.* :

   $$\operatorname{Im} h = \{h(z)\}_{z\in\mathbb{C}\setminus\{2\mathrm{i}\}}.$$

   b) Déterminer l'image de h. La fonction h est-elle surjective ?

On note g l'application $z \mapsto |z-2\mathrm{i}|^2 \times \dfrac{z^2}{z-2\mathrm{i}} + z^3$ définie sur $\mathbb{C}\setminus\{2\mathrm{i}\}$. On munit le plan $\mathscr{P}$ d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O;\vec{u},\vec{v})$, qu'on peut alors identifier à $\mathbb{C}$, et on note Γ l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $g(z)$ est un imaginaire pur : $\quad \Gamma = \{z \in \mathbb{C}\setminus\{2\mathrm{i}\}/\ g(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R}\}$.

4. a) Déterminer une équation de Γ.
   b) Montrer que Γ est la réunion d'une droite Δ et d'une courbe C, dont on donnera une équation.
   c) Tracer Γ.

Devoir maison n° 4
Géométrie élémentaire du plan

À rendre le lundi 02 octobre 2023.

Les copies dont les résultats ne sont pas encadrés ou celles où il n'y a pas de phrase (dont ponctuation) ne seront pas corrigées.
Vous traiterez **AU CHOIX** un des deux exercices.

Exercice 1 : la droite d'Euler

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère $A(-3;1)$, $B(1;5)$ et $C(3;-3)$.

1. Déterminer les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC. On le note G.
2. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC. On le note H.
3. On note $\mathscr{E}$ l'ensemble d'équation cartésienne : $25x^2-60x+25y^2-40y-390=0$.
   a) Montrer que $\mathscr{E}$ est un cercle, dont on précisera les coordonnées du centre Ω et le rayon R.
   b) Montrer que $\mathscr{E}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.
4. Montrer que les points H, Ω et G sont alignés.

Exercice 2 : lieu de projections orthogonales

Le plan affine euclidien $\mathscr{E}_2$ est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, unité graphique 2 cm. On note A le point de coordonnées $(1;1)$. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on note $\mathscr{C}_t$ le cercle passant par O et A, dont le centre Ω_t a pour abscisse t.

1. Faire un dessin sur Geogebra.
2. a) Justifier que pour tout $t\in\mathbb{R}$, Ω_t est sur la médiatrice du segment $[OA]$.
   b) En déduire les coordonnées de Ω_t, puis l'équation cartésienne de $\mathscr{C}_t$, pour tout $t\in\mathbb{R}$.
   c) Faire une figure. On prendra dans cette question **UNIQUEMENT** : $t=2$.

Pour tout $t\in\mathbb{R}$, le cercle $\mathscr{C}_t$ coupe l'axe (Ox) en O et en un autre point K_t. On note alors $\mathscr{D}_t$ la tangente à $\mathscr{C}_t$ en K_t.

3. a) Déterminer les coordonnées de K_t pour tout $t\in\mathbb{R}$.
   b) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{D}_t$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.
   c) Tracer $\mathscr{D}_2$ sur la figure de la question 2c.

Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on note H_t la projection orthogonale de A sur $\mathscr{D}_t$ et Δ_t la normale à $\mathscr{D}_t$ passant par A.

4. a) Déterminer une équation cartésienne de Δ_t pour tout $t\in\mathbb{R}$.
   b) Déterminer les coordonnées de H_t pour tout $t\in\mathbb{R}$.
   c) Placer H_2 sur la figure de la question 2c.
5. On note finalement $\mathscr{L}$ le lieu des points que décrit H_t lorsque t parcourt $\mathbb{R}$, en d'autres termes :
$$\mathscr{L}=\left\{H_t\in\mathbb{R}^2/\ t\in\mathbb{R}\right\}=\{H_t\}_{t\in\mathbb{R}}.$$
   a) Reconnaître $\mathscr{L}$.
   b) Déterminer la distance de A à $\mathscr{L}$.

Exercices facultatifs

Exercice A : autour des racines $n^{\text{ièmes}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note (E_n) l'équation : $\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right)^n = \mathrm{i}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

1. Résoudre (E_2). *Vous écrirez les solutions sous forme algébrique.*
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   a) Soit $u \in \mathbb{C}$. Résoudre l'équation : $\dfrac{z-2}{z-1} = u$ d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.
   b) Résoudre l'équation : $Z^n = \mathrm{i}$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.
   c) Résoudre finalement (E_n).

Exercice B : autour du pentagone régulier

On note $(\bigstar)$ l'équation : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. a) Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$ une solution d'$(\bigstar)$. Montrer que si on pose : $x_0 = z_0 + \dfrac{1}{z_0}$, alors :
$$x_0^2 + x_0 - 1 = 0.$$
   b) Montrer que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{5}}$ est solution d'$(\bigstar)$.
   c) En déduire une expression explicite de $\cos \dfrac{2\pi}{5}$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on note M_k le point d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{5}}$ $(k \in \mathbb{N})$. Soit H le projeté orthogonal de M_1 sur l'axe des abscisses.

2. Montrer que : $OH = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

Soient Ω le point d'affixe $-\dfrac{1}{2}$ et $\mathscr{C}$ le cercle de centre Ω passant par le point d'affixe i. On note $A(z_A)$ et $B(z_B)$ les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses, où A est le point d'abscisse positive.

3. Montrer que : $z_A = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$, puis que H est le milieu de $[OA]$.
4. Expliquer comment construire le pentagone régulier au compas et à la règle non graduée.

Devoir maison n° 5
Géométrie élémentaire de l'espace

À rendre le lundi 09 octobre 2023.

Les copies dont les résultats ne sont pas encadrés ou celles où il n'y a pas de phrase (dont ponctuation) ne seront pas corrigées.

Vous traiterez **AU CHOIX** un des deux exercices.

Exercice 1 : droites et plans de l'espace

Dans l'espace affine euclidien $\mathscr{E}_3$ muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1;2;3)$ et $B(1;0;1)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan (OAB).
2. Déterminer les équations cartésiennes de deux plans qui ont pour intersection la droite (AB).

On considère les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ définies respectivement par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-2t \\ y & = & -1+t \\ z & = & 3t \end{array}\right. \Bigg| \, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x+y-2z & = & 1 \\ 2x+y-3z & = & -1. \end{array}\right.$$

3. Déterminer un point D (resp. E) et un vecteur directeur $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$) de $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}'$).
4. Calculer la distance de A à $\mathscr{D}$.
5. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par A et contenant $\mathscr{D}$.
6. Déterminer une équation cartésienne du plan contenant $\mathscr{D}$ et tel que $\mathscr{D}'$ lui est parallèle.

Exercice 2 : projection orthogonale sur des droites

Dans l'espace affine euclidien $\mathscr{E}_3$ muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ définies respectivement par

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x+y+1 & = & 0 \\ 2x-y-z-1 & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x+y-z-1 & = & 0 \\ x+2y-z-2 & = & 0. \end{array}\right.$$

1. a) Caractériser géométriquement les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.
   b) Justifier que $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont coplanaires, puis déterminer une équation cartésienne du plan les contenant.

Pour tout $M \in \mathscr{E}_3$, on note $p_1(M)$ (resp. $p_2(M)$) la projection orthogonale de M sur $\mathscr{D}_1$ (resp. $\mathscr{D}_2$). Soit par ailleurs un point $H(a;b;c) \in \mathscr{E}_3$.

2. a) Déterminer en fonction de a, b et c les coordonnées de $p_1(H)$ (resp. $p_2(H)$).
   b) Déterminer l'ensemble des points de $\mathscr{E}_3$ ayant les mêmes projections orthogonales sur $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ que H, autrement dit l'ensemble :
   $$\{M \in \mathscr{E}_3 / \ p_1(M) = H_1 \quad \text{et} \quad p_2(M) = H_2\}.$$
3. a) Déterminer les coordonnées du milieu I de $[H_1H_2]$.
   b) Décrire l'ensemble $\mathscr{I}$ des points I lorsque H décrit $\mathscr{E}_3$.

Exercice facultatif : torseurs de l'espace

L'espace affine euclidien $\mathscr{E}_3$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On note E_3 l'espace vectoriel associé.

On appelle *champ de vecteurs* toute fonction définie sur $\mathscr{E}_3$ et à valeurs dans E_3, et *torseur de l'espace* tout champ de vecteurs $\vec{\Gamma}$ pour lequel il existe $\vec{R} \in E_3$ tel que :

$$\forall A, B \in \mathscr{E}_3, \quad \vec{\Gamma}(B) = \vec{\Gamma}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}.$$

Le vecteur $\vec{R}$ est appelé la *résultante* du torseur $\vec{\Gamma}$, et pour tout $M \in \mathscr{E}_3$, le vecteur $\vec{\Gamma}(M)$ est appelé *moment du torseur en M*.

Partie A : premières propriétés

1. Montrer que la résultante d'un torseur est unique.
2. Soient $A \in \mathscr{E}_3$ et $\vec{u}, \vec{R} \in E_3$. Montrer que l'application $M \mapsto \vec{u} + \overrightarrow{MA} \wedge \vec{R}$ est l'unique torseur de l'espace de résultante $\vec{R}$ pour lequel le moment en A vaut $\vec{u}$.

   On le note $\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{u} \end{Bmatrix}_A$, et on dit que $\vec{u}$ et $\vec{R}$ sont les *éléments de réduction en A* du torseur $\vec{\Gamma}$.
3. Montrer que pour tous $A \in \mathscr{E}_3$ et $\vec{u}, \vec{u}', \vec{R}, \vec{R}' \in E_3$: $\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{u} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \vec{R}' \\ \vec{u}' \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}+\vec{R}' \\ \vec{u}+\vec{u}' \end{Bmatrix}_A$.
4. Soit $\vec{\Gamma}$ un torseur de résultante $\vec{R}$. Montrer que pour tous $A, B \in \mathscr{E}_3$: $\vec{\Gamma}(A) \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{\Gamma}(B) \cdot \overrightarrow{AB}$.

Partie B : la division vectorielle

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E_3$ avec : $\vec{u} \neq \vec{0}$. On désire résoudre l'équation $(\bigstar)$: $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$ d'inconnue $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, qu'on appelle *division vectorielle*.

5. Résoudre l'*équation homogène associée*, *i.e.* l'équation : $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{0}$ d'inconnue $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.
6. Montrer que si : $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$, alors $(\bigstar)$ n'a pas de solution.

On suppose maintenant que : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

7. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ de sorte que le vecteur : $\vec{x}_0 = \lambda \vec{u} \wedge \vec{v}$ soit solution d'$(\bigstar)$.
8. Conclure.

Partie C : axe central d'un torseur

9. Soient $\vec{\Gamma}$, $\vec{\Gamma}_1$ et $\vec{\Gamma}_2$ trois torseurs de résultantes $\vec{R}$, $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$ respectivement.
   a) Montrer que l'application $M \mapsto \vec{R}_1 \cdot \vec{\Gamma}_2(M) + \vec{R}_2 \cdot \vec{\Gamma}_1(M)$ est constante sur $\mathscr{E}_3$. Ce nombre est appelé *comoment* de $\vec{\Gamma}_1$ et $\vec{\Gamma}_2$, et souvent noté $\gamma(\vec{\Gamma}_1, \vec{\Gamma}_2)$.
   b) Montrer que l'application $M \mapsto \vec{\Gamma}(M) \cdot \vec{R}$ est constante sur $\mathscr{E}_3$. Ce nombre est appelé *invariant scalaire de* $\vec{\Gamma}$, et on le note $h(\vec{\Gamma})$.
10. Soit $\vec{\Gamma}$ un torseur de résultante $\vec{R}$ non nulle. On appelle *axe central de* Γ l'ensemble Δ défini par :

$$\Delta = \left\{ M \in \mathscr{E}_3 /\ \text{La famille } \left(\vec{\Gamma}(M), \vec{R}\right) \text{ est liée.} \right\}.$$

   a) Montrer que Δ est une droite dirigée par $\vec{R}$.
   b) Montrer que $\vec{\Gamma}$ est constant sur l'axe central.

Devoir maison n° 6
Étude globale d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles

À rendre le lundi 16 octobre 2023.

Les copies dont les résultats ne sont pas encadrés ou celles où il n'y a pas de phrase (dont ponctuation) ne seront pas corrigées, *i.e.* notées F.

Exercice obligatoire : la fonction tangente hyperbolique

On appelle *tangente hyperbolique*, et on note tanh, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. On note Γ la courbe représentant tanh dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Le but de cet exercice est de démontrer de manière indépendante du cours les propriétés de la fonction tangente hyperbolique. Vous **N***'utiliserez donc* **PAS** *les propriétés de la fonction* tanh *démontrées dans le cours. Vous pourrez en revanche utiliser les propriétés usuelles des fonctions* sinh *et* cosh *(démontrées au DM2).*

1. a) Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité de la fonction tanh.
   b) Étudier la parité de la fonction tanh.
   c) Déterminer la limite de tanh en $+\infty$. Comment cela se traduit-il graphiquement ?
   d) Calculer la dérivée de tanh.
   e) En déduire le tableau de variation de la fonction tanh sur $\mathbb{R}$ tout entier.
2. a) Donner l'équation de la tangente Δ à Γ en 0.
   b) Étudier la position relative de Γ et Δ.
3. Sur votre feuille, tracer Δ, puis la courbe Γ, ainsi que toutes les informations que vous jugerez nécessaires.
4. a) Montrer que la fonction tanh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.
   La réciproque de la fonction tanh est appelée *argument tangente hyperbolique*, et notée $\tanh^{-1}$ ou encore Argtanh. Ainsi, par définition de la réciproque :
   $$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad y = \tanh(x) \iff x = \tanh^{-1}(y).$$
   b) Sans nouvelle étude de fonction, mais simplement grâce au graphe de la question 3, tracer le graphe de $\tanh^{-1}$.
5. Le but de cette question est d'exprimer Argtanh avec les fonctions usuelles.
   a) Donner le tableau de signe de $\dfrac{1+y}{1-y}$ suivant les valeurs de $y \in \mathbb{R}$.
   b) Résoudre pour tout $y \in \mathbb{R}$ l'équation : $\quad y = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \quad$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   c) En déduire l'expression de Argtanh à l'aide des fonctions usuelles.
6. a) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \tanh'(x) = 1 - \tanh(x)^2$.
   b) En appliquant la formule du cours donnant la dérivée d'une réciproque, calculer Argtanh$'$.
   c) Déduire des question 5c et 6b une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ sur un intervalle à préciser.

Exercices facultatifs

Exercice A : deux fonctions réciproques

Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{Arctan}\big(\sinh(x)\big)$.

1. a) Justifier que f est bien définie, et qu'elle est dérivable. Étudier la parité de f.
   b) Dresser le tableau de variation complet de f.
   c) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.

Soit g la fonction définie par : $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[, \quad g(x) = \ln\left(\dfrac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right)$.

2. a) Montrer que g est bien définie, et qu'elle est dérivable.
   b) Montrer que g est impaire.
   c) Dresser le tableau de variation complet de g.
   d) Montrer que g réalise une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle à préciser.
3. a) Calculer $f\left(\dfrac{\ln 3}{2}\right)$ et $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.
   b) Justifier que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bien définies.
   c) Montrer que pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $\quad (f \circ g)(x) = x$.
   d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\cos\big(\operatorname{Arctan}(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \sin\big(\operatorname{Arctan}(x)\big) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$
   e) En déduire que : $\quad (g \circ f)(x) = x \quad$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On déduit de la question précédente que f et g sont réciproques l'une de l'autre.

4. a) Déterminer les équations des tangentes aux courbes représentatives de f et g en l'origine.
   b) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, tracer les courbes représentatives des fonctions f et g, ainsi que les tangentes en l'origine.
   On donne : $\dfrac{\pi}{2} \approx 1{,}57, \quad \dfrac{\pi}{6} \approx 0{,}52, \quad \dfrac{\ln 3}{2} \approx 0{,}55.$

Exercice B : simplification d'une fonction

On note φ la fonction $x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) - 2\operatorname{Arctan}(x)$.

1. a) Déterminer le domaine de définition de φ.
   b) Étudier la parité de φ.
   c) Calculer $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ et $\varphi(\sqrt{3})$.
2. a) Donner le domaine de dérivabilité $\mathscr{D}$ de φ, et montrer que pour tout $x \in \mathscr{D}$:
   $$\varphi'(x) = \frac{2}{1+x^2} \times \left(\frac{1-x^2}{|1-x^2|} - 1\right).$$
   b) Donner une autre expression simple de φ sur l'intervalle $[0,1]$.
   c) Montrer que pour tout $x \geq 1$: $\quad \varphi(x) = \pi - 4\operatorname{Arctan}(x)$.
3. En déduire le tableau de variations complet de φ, puis tracer une allure de sa courbe représentative.
   On précisera notamment les limites de φ au bord de son intervalle de définition.

Devoir maison n° 7
Équations différentielles linéaires

À rendre le lundi 06 novembre 2023.

Les copies dont les résultats ne sont pas encadrés ou celles où il n'y a pas de phrase (dont ponctuation) ne seront pas corrigées.

Exercice 1 : ED(1)

On note (E) l'équation différentielle : $(1+x^2)y' + 2xy = \dfrac{1}{x}$ d'inconnue $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

1. a) Résoudre l'équation (E). *Vous détaillerez les étapes de votre raisonnement.*
   b) Montrer que pour tous $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction y solution de (E) pour laquelle : $y(a) = b$.
   c) Déterminer la solution de (E) qui vaut 1 en 1.
2. On note f la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)+2}{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
   b) Montrer que le signe de f' est celui de $x \overset{g}{\mapsto} 1 + x^2 - 2x^2\big(\ln(x)+2\big)$.
   c) Étudier les variations de g, et en déduire son signe. *On pourra noter α le zéro de g.*
   d) En déduire le tableau de variations complet de f.
   e) Construire la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.
   On donne : $\alpha \approx 0{,}7$ et $f(\alpha) \approx 1{,}1$.

Exercice 2 : ED(2)

On considère le problème de Cauchy $(\bigstar)$: $\begin{cases} z'' - z' - 6z = -6x - 1, \\ z(1) = 2 \quad \text{et} \quad z'(1) = 4 \end{cases}$ d'inconnue $z \in \mathscr{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Résoudre le problème $(\bigstar)$. *Vous détaillerez les étapes de votre raisonnement.*
2. On note h la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{3x-3} + x$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
   a) Étudier les variations de h.
   b) Déterminer la droite (T) asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.
   c) Étudier les positions relatives de (T) et $\mathscr{C}$.
   d) Donner l'équation cartésienne de la tangente Δ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
   e) Étudier la position de Δ et $\mathscr{C}$.
   f) Tracer l'asymptote, la tangente Δ, puis la courbe $\mathscr{C}$.

Exercices facultatifs

Exercice A : problème de raccordement (oral ATS)

Déterminer toutes les fonctions solutions de l'équation différentielle : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad xy''(x) + y'(x) = 1$ d'inconnue $y \in \mathscr{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *On commencera par déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.*

Exercice B : changement de variable et EDP (ATS2023)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. On note (E_α) l'équation différentielle : $\forall t > 0, \quad 4ty''(t) + 6y'(t) + \alpha y(t) = 0$ d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

1. Soit u une solution de (E_α). Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $v(t) = tu(t^2)$.
   a) Exprimer $v'(t)$ et $v''(t)$ en fonction de t, u, u' et u''.
   b) Montrer que v est solution de l'équation différentielle $(\tilde{E}_\alpha)$: $y''(t) + \alpha y(t) = 0$.
2. Résoudre (E_α). *On pourra distinguer les cas $\alpha = 0$ et $\alpha > 0$.*

Soit $v \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. On pose pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $f(x,y,z) = v(x^2 + y^2 + z^2)$.

3. Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ puis $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ en fonction de v', v'' et x, y, z.

Pour tout $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, on appelle *laplacien de f*, et on note Δf, la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \Delta f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z).$$

On note $(\hat{E}_\alpha)$ l'équation : $\Delta f + \alpha f = 0$ d'inconnue $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

4. Montrer que f est solution de $(\hat{E}_\alpha)$ si et seulement si v est solution de (E_α).

Exercice C : équation à variable séparable

Soit $r, K \in \mathbb{R}_+^*$ et $y_0 \in \mathbb{R}^*$. On note (L) le problème de Cauchy d'inconnue $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\begin{cases} y'(t) &= ry(t) - \dfrac{r}{K} y(t)^2 \\ y(0) &= y_0. \end{cases}$$

Nous allons raisonner par *analyse-synthèse*.

1. **Analyse.** On suppose dans cette question que le problème (L) possède une solution $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose : $f(t) = N(t)\,\mathrm{e}^{-rt}$.
   a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis que f est solution de l'équation (E) :
   $$\begin{cases} y'(t) &= -\dfrac{r}{K} N(t) y(t) \\ y(0) &= y_0. \end{cases}$$
   b) Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour laquelle : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = y_0\,\mathrm{e}^{g(t)}$.
   c) En déduire que N ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

   On note alors h la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{N(t)}$ définie sur $\mathbb{R}$.

   d) Montrer que h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, puis que h est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.
   e) Résoudre cette dernière équation différentielle, et en déduire une expression de N.
2. **Synthèse.** Montrer finalement que le problème (L) possède une unique solution.

Devoir maison n° 8
Systèmes linéaires

À rendre le lundi 13 novembre 2023.

Les copies dont les résultats ne sont pas encadrés ou celles où il n'y a pas de phrase (dont ponctuation) ne seront pas corrigées.

Exercice d'informatique

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note f_α la fonction $x \mapsto 3\alpha x^2 - \alpha x$ définie sur $\mathbb{R}$. Écrire une fonction Scilab `vect_f` qui prend en arguments un réel `alpha` et un entier naturel `n`, et qui renvoie le tableau contenant les valeurs $\big(f_\alpha(1), f_\alpha(2), \dots, f_\alpha(n)\big)$.

Exercice 1 : géométrie dans $\mathbb{R}^3$

On considère les deux ensembles :

$$E_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{array}{c} x-y-z=0 \\ \text{et} \quad 2x+y-z=1 \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad E_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{array}{c} x-2y-z=-3 \\ \text{et} \quad x+3y=4 \end{array} \right\}.$$

1. a) Caractériser géométriquement E_1 et E_2.
   b) Justifier que E_1 et E_2 sont coplanaires, puis montrer que $E_1 \cap E_2$ est un point.
   Attention : on ne demande pas de déterminer ce point, c'est l'objet de la question suivante.
2. Retrouver le résultat précédent en résolvant le système linéaire d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & 2y & - & z & = & -3 \\ x & + & 3y & & & = & 4. \end{array} \right.$$

Exercice 2 : géométrie dans $\mathbb{R}^4$

Les quatre questions sont indépendantes.

1. Déterminer une famille génératrice de $F = \big\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \ x+y=0 \quad \text{et} \quad x+z=0 \big\}$.
2. Montrer que la famille $\big((1,2,1,0),(4,-2,1,1),(7,2,4,2),(1,0,1,1)\big)$ est liée, et former une relation de dépendance linéaire entre ces vecteurs.
3. On pose : $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,2,3,4)$ et $u_3 = (-1,0,-1,0)$. Déterminer un système d'équations cartésiennes de $\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$.
4. On considère la famille : $\mathscr{F} = \big((1,0,2,1),(0,1,1,2),(2,0,1,1),(2,1,0,1)\big)$.
   a) Montrer que $\mathscr{F}$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}^4$. *On dit alors que $\mathscr{F}$ est une* base *de* $\mathbb{R}^4$.
   b) Décomposer le vecteur $(1,1,1,1)$ comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{F}$.

Exercices facultatifs

Exercice A : applications injectives/surjectives/bijectives

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Déterminer la réciproque lorsque c'est possible.

1. $(x,y) \overset{g_1}{\mapsto} 2y$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
2. $(x,y) \overset{g_2}{\mapsto} (1,x-y,y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $(x,y) \overset{g_3}{\mapsto} (2x+y,3x-2y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
4. $(x,y,z) \overset{g_4}{\mapsto} (x+y+z,x-y-z,x)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice B : applications affines de $\mathscr{E}_3$

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.
L'espace affine euclidien $\mathscr{E}_3$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. Soient $\mathscr{D}$ la droite passant par $A(-1;0;2)$ et dirigée par $\vec{u}(-3,4,1)$, et $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne : $x+2y-z+1=0$. Déterminer pour tout $M \in \mathscr{E}_3$ les coordonnées de la projection de M sur $\mathscr{P}$ parallèlement à $\mathscr{D}$.
2. On note g l'application $\mathscr{E}_3 \to \mathscr{E}_3$ définie [1] par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad g\big(M(x;y;z)\big) = M'(-y-z+1;-2x-y-2z+2;x+y+2z-1).$$

   a) Montrer que : $g \circ g = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}_3}$. On dit que g est une *involution*.
   b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{R}$ des points invariants par g, c'est-à-dire : $\mathscr{R} = \{M \in \mathscr{E}_3 /\ g(M) = M\}$.
   c) Montrer que : $\exists \vec{v} \in E_3 / \quad \forall M \in \mathscr{E}_3, \quad \overrightarrow{MM'} \in \mathrm{Vect}(\vec{v})$.

   On note alors m le point d'intersection de $\mathscr{R}$ avec la droite qui passe par M et dirigée par $\vec{u}$.

   d) Montrer que : $\overrightarrow{Mm} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{MM'}$.
   e) En déduire la nature de g. *On pourra faire un dessin.*

1. Si on pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors la fonction g s'écrit matriciellement $X \mapsto AX+B$. Par analogie au cas réel, on dit que g est une *application affine*.

Devoir maison n° 9
Polynômes

À rendre le lundi 20 novembre 2023.

Les copies dont les résultats ne sont pas encadrés ou celles où il n'y a pas de phrase (dont ponctuation) ne seront pas corrigées.

Exercice d'informatique

1. Le programme `mystere` ci-contre prend en entrée un vecteur ligne `t`. Que renvoie-t-il en sortie ?
2. En vous inspirant du programme ci-contre, écrire une fonction Scilab `function [m,n]=maxi(t)` qui prend en entrée un vecteur ligne `t` et qui renvoie en sortie `m` la valeur la plus grande de `t`, et `n` l'indice de la plus grande valeur de `t`.

   Par exemple, `[m,n]=maxi([1,2,12,4,5])` *doit renvoyer :* `m=12, n=3`.

```
function res=mystere(t)
    res=t(1) ;
    for k=2 :length(t)
        if t(k)>res then
           res=t(k)
        end
    end
endfunction
```

Exercice 1 : une équation polynomiale

On note $(\bigstar)$ l'équation (polynomiale) : $(X^2+4)P'' = 6P$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. a) Soient $d \in \mathbb{N}$ et $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme avec : $a_d \neq 0$.
   Exprimer le degré et le coefficient dominant de $6P$ et $(X^2+4)P''$ en fonction de d et a_d.

   b) En déduire que si P est solution de $(\bigstar)$, alors : $\deg(P) \in \{-\infty, 3\}$.
2. Déterminer les solutions d'$(\bigstar)$.
   On pourra écrire $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}[X]$, expliciter $(X^2+4)P''$, identifier les coefficients dans la relation : $(X^2+4)P'' = 6P$, pour enfin résoudre un système linéaire.

Exercice 2 : DÉS et primitive

On pose : $P = X^4 - X^3 + 2X^2 - 4X - 8 \in \mathbb{R}[X]$, $Q = 2X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 14X^2 + 25 \in \mathbb{R}[X]$ et $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)} \in \mathbb{R}(X)$.

1. Calculer la partie entière E, et le reste R de F.
2. a) Montrer que -1 et 2 sont racines de P, et déterminer leurs multiplicités respectives.

   b) Déterminer la factorisation irréductible de P sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{R(X)}{P(X)}$ sur $\mathbb{R}$.
4. a) Vérifier que $x \mapsto \dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4}$ sur $\mathbb{R}$.

   b) En déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{2x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 14x^2 + 25}{x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$ sur un intervalle à préciser.

Exercices facultatifs

Exercice A : relations coefficients-racines

1. On note $\bigstar$ le système : $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ x^2+y^2+z^2 & = & 3 \\ xyz & = & 2 \end{array}\right.$ d'inconnue $(x,y,z) \in (\mathbb{C}^*)^3$.
   a) Soit $(x_0,y_0,z_0) \in (\mathbb{C}^*)^3$ une solution de $\bigstar$. On pose : $P=(X-x_0)(X-y_0)(X-z_0)$.
   Développer P (les coefficients dépendent de x_0, y_0 et z_0), puis le déterminer explicitement.
   On pourra remarquer que : $(x_0+y_0+z_0)^2 = x_0^2+y_0^2+z_0^2+2(x_0y_0+y_0z_0+z_0x_0)$.
   b) Résoudre $\bigstar$.
2. En vous inspirant de la question précédente, résoudre les systèmes d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$:

a) $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ x^2+y^2+z^2 & = & 21 \\ xy+yz+zx & = & xyz. \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ x^2+y^2+z^2 & = & 0 \\ x^3+y^3+z^3 & = & 3. \end{array}\right.$

Exercice B : ATS2002

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul.

1. a) On appelle fonction *cotangente*, et on note cotan, la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.
   Montrer que cotan réalise une bijection de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle qu'on précisera.

   Pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$, on pose : $r_k = \operatorname{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)^2$.
   b) Montrer que : $\operatorname{Card}\{r_k /\ k \in [\![1\,,n]\!]\} = n$.
2. a) En appliquant la formule de Moivre, montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$:
$$\sin\big((2n+1)a\big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k \sin(a)^{2k+1} \cos(a)^{2n-2k}.$$
   b) Déterminer un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ pour lequel :
$$\forall a \in \mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z}), \quad \frac{\sin\big((2n+1)a\big)}{\sin(a)^{2n+1}} = P_n\big(\operatorname{cotan}(a)^2\big).$$
3. a) Déterminer les racines de P_n.
   b) En déduire une expression explicite de : $R_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} r_k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2}$.

On pose enfin : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

4. a) Montrer que pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$: $0 < \operatorname{cotan}(x) \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\sin(x)}$.
   b) Encadrer la somme S_n grâce aux questions 4a et 3b, puis en déduire la limite $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n$.

Devoir maison n° 10
Calcul matriciel

À rendre le lundi 27 novembre 2023.

Les copies dont les résultats ne sont pas encadrés ou celles où il n'y a pas de phrase (dont ponctuation) ne seront pas corrigées.

Exercice 1 : puissances et récurrence

On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $A^k = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix}$.

Exercice 2 : puissances et formule du binôme

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par : $u_0 = v_0 = 1$ et $w_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2v_n - w_n \\ w_{n+1} = 2w_n. \end{cases}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

1. Donner une matrice $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ pour laquelle : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = BX_n$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = B^n X_0$.
3. Calculer explicitement les puissances de B. *On pourra appliquer la formule du binôme.*
4. En déduire une expression explicite de u_n, v_n et w_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 : puissances et polynôme annulateur

On pose : $C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Par la méthode du pivot, calculer C^{-1} — inverse de C.
2. Calculer $C^2 - 2C$. En déduire l'expression de C^{-1} en fonction de C et I_3.
3. a) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 2X - 3$.
   b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de C^n en fonction de C et I_3.

Exercice 4 : image et noyau d'une matrice

On pose : $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{R})$.

1. Déterminer un système d'équations cartésiennes de $\operatorname{Im} D$. Caractériser géométriquement $\operatorname{Im} D$.
2. Déterminer une famille génératrice de $\ker D$.

On appelle f l'application linéaire canoniquement associée à D.

3. Donner l'expression analytique de f. Est-elle injective ? surjective ?

Exercice facultatif : ATS2021

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on pose : $P(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, et on définit : $\mathscr{F} = \{P(a,b)\}_{a,b\in\mathbb{R}}$.

1. Soient $b \in \mathbb{R}$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Trouver $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pour lesquels : $P(1,b)P(x,y) = P(\alpha,\beta)$.

On dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ admet un *inverse dans F* si M est inversible et si : $M^{-1} \in F$.

2. Soit $b \in \mathbb{R}$. Montrer que $P(1,b)$ admet un inverse dans F si et seulement si $b \notin \{1, -1/2\}$.
3. Quelles sont les valeurs de b pour lesquelles $P(1,b)$ est inversible ?
4. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Justifier que pour tout $b \in \mathbb{R}$: $P(a,b) = aP(1, b/a)$, et en déduire les valeurs de b pour lesquelles $P(a,b)$ est inversible.
5. Donner les valeurs de b pour lesquelles $P(0,b)$ est inversible.
6. Conclure en donnant une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que $P(a,b)$ soit inversible.

Devoir maison n$^{\text{o}}$ 11
Nombres réels et suites numériques

À rendre le lundi 04 décembre 2023.

Les copies dont les résultats ne sont pas encadrés ou celles où il n'y a pas de phrase (dont ponctuation) ne seront pas corrigées.

Exercice 1 : suite homographique

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.

1. a) Trouver deux réels a et b pour lesquels : $\dfrac{4X-2}{X+1} = a + \dfrac{b}{X+1}$.
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in \,]2,3]$. *On pourra raisonner par récurrence.*
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$.
   a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
   b) En déduire une expression de v_n, puis de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
3. Écrire une fonction Scilab `function res=S(n)` qui prend en entrée un entier naturel `n` et qui renvoie $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 2 : suite récurrente et nombre d'or

On note $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $w_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_{n+1} = \sqrt{1 + w_n}$.

1. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. a) Résoudre l'équation : $\sqrt{1+x} = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$.
   On appelle *nombre d'or*, et on note φ, la solution de l'équation.
   b) Justifier que $\varphi \in \,]1,2[$.
3. Faire un dessin **PROPREMENT**, sur lequel vous tracerez la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ sur $[-1,3]$, la droite d'équation : $y = x$, ainsi que les premiers termes de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (graphiquement).
4. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_{n+1} - \varphi = \dfrac{w_n - \varphi}{\sqrt{w_n + 1} + \sqrt{1+\varphi}}$.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|w_{n+1} - \varphi| \leq \dfrac{1}{2}|w_n - \varphi|$.
5. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|w_n - \varphi| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
6. En déduire que : $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi$.
7. a) Déterminer **À LA MAIN** un rang n explicite pour lequel w_n est une approximation de φ à 10^{-5} près. *On donne :* $\ln(2) \approx 0{,}7$ *et* $\ln(5) \approx 1{,}6$.
   b) Écrire une fonction Scilab `function phi=approx(e)` qui prend en entrée un nombre réel strictement positif `e`, et qui renvoie une valeur approchée de φ à `e` près.

Exercices facultatifs

Exercice A : suite « $u_{n+1} = f(u_n)$ »

On note $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $t_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $t_{n+1} = \ln(1+2t_n)$.

1. Étudier la fonction $x \overset{f}{\mapsto} \ln(1+2x)$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

2. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite d'équation : $y = x$.
   On montrera en particulier que $\mathscr{C}$ et la droite se coupent en $(0,0)$ et en un autre point (α,α).
3. Montrer que : $\alpha \in \,]1,2[$.
4. Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, tracer la droite d'équation : $y = x$, puis $\mathscr{C}$.
5. Étudier la convergence de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant les valeurs de $t_0 \in \mathbb{R}$.
   On pourra raisonner graphiquement.

Exercice B : un théorème de point fixe

1. Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante. On veut montrer que f possède un point fixe. On pose : $T = \{x \in [0,1] /\ f(x) \leq x\}$.
   a) Montrer que T possède une borne inférieure.

   On pose alors : $\tau = \inf T$.

   b) Montrer que $f(\tau)$ minore T.
   c) Montrer que : $f(T) \subset T$.
   d) En déduire que : $f(\tau) = \tau$.
2. Ce résultat est-il toujours vrai pour une fonction croissante de $[0,1[$ dans lui-même ?

Exercice C : autour de la densité

On dit qu'un ensemble $G \subset \mathbb{R}$ est *dense dans* $\mathbb{R}$ si : $\forall a,b \in \mathbb{R}, \quad a < b \implies \exists r \in G/ \quad a < r < b$.
Les trois questions sont indépendantes.

1. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $x - \dfrac{1}{n} < \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$.
   b) En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'ensemble des *nombres dyadiques* $\left\{\dfrac{p}{2^n}\right\}_{p\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Soient D, E et F trois parties de $\mathbb{R}$.
   a) Montrer que D est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tous $x,y \in \mathbb{R}$ tels que : $x < y$, l'ensemble $]x,y[\, \cap D$ est infini.
   b) On suppose D dense dans $\mathbb{R}$.
      i. Montrer que si : $D \subset E$, alors E est dense dans $\mathbb{R}$.
      ii. Montrer que si F est finie, alors $D \setminus F$ est encore dense dans $\mathbb{R}$.

Devoir maison n° 12
Limites et continuité

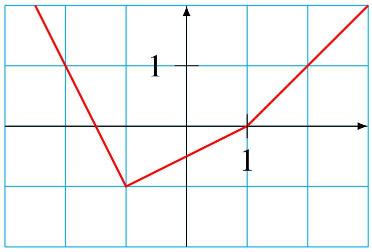
À rendre le lundi 11 décembre 2023.

Les copies dont les résultats ne sont pas encadrés ou celles où il n'y a pas de phrase (dont ponctuation) ne seront pas corrigées.

Exercice 1 : deux fonctions définies par morceaux

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Les deux questions sont indépendantes.

1. a) Déterminer une expression explicite par morceaux de la fonction f représentée ci-dessous.



   b) Écrire un programme Scilab qui permet d'obtenir le graphe ci-dessus.

2. a) Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$ la fonction $x \overset{g}{\mapsto} \begin{cases} 3x+a & \text{si } x<2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

   b) Pour cette valeur, tracer le graphe représentant la fonction g.

Exercice 2 : une réciproque

On note h la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \sqrt{1+4\ln(x)^3}$.

1. Déterminer le domaine de définition de h.
2. Donner un équivalent de h au voisinage de $+\infty$.
3. Montrer que h réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.
4. Déterminer une expression de sa fonction réciproque.

Exercice 3 : une suite définie implicitement

1. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation : $\quad e^x + x = n \quad$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ possède une unique solution, qu'on notera u_n.

   b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, puis que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $\quad e^x \geq x+1$.

   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad e^{u_n} \leq n \leq 2\,e^{u_n}$.

   c) Déterminer enfin un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ au voisinage de $+\infty$.

3. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad u_n = \ln(n) + \ln\left(1 - \dfrac{u_n}{n}\right)$.

   b) En déduire que : $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) - \dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$.

Exercice facultatif

Partie A : un résultat préliminaire

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$.
2. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, *i.e.* : $\quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad (a < b \implies \exists r \in \mathbb{Q} / \quad a < r < b)$.

Partie B : une première application

Le but de cette partie est de déterminer l'ensemble :

$$E_1 = \{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)\}.$$

3. Montrer que toutes les fonctions linéaires sont dans E_1, *i.e.* : $\quad \{x \mapsto \lambda x\}_{\lambda \in \mathbb{R}} \subset E_1$.

Réciproquement, soit $f \in E_1$.

4. a) Calculer $f(0)$.
   b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad f(nx) = nf(x)$.
   c) En déduire $f(nx)$ pour tous $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
   On pourra remarquer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $\quad nx - nx = 0$.
   d) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$: $\quad f(r) = rf(1)$.
   e) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad f(x) = xf(1)$.
   On pourra calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right)$ de deux manières différentes.
5. Conclure.

Partie C : une deuxième application

On considère maintenant l'ensemble :

$$E_2 = \{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x)f(y)\}.$$

6. Montrer que les fonctions puissances sont des éléments de E_2, *i.e.* : $\quad \{x \mapsto \lambda^x\}_{\lambda \in \mathbb{R}_+^*} \subset E_2$.
7. Réciproquement, soit $f \in E_2$. On pose : $\quad \lambda = f(1)$.
   a) Montrer que f ne s'annule pas.
   On pourra raisonner par l'absurde et remarquer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad x = x - y + y$.
   b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad f(x) \geq 0$.
   On pourra remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$.
   c) Justifier que $\ln \circ f$ est bien définie, puis que : $\quad \ln \circ f \in E_2$.
   d) Montrer enfin que f est une fonction puissance.

Partie D : une dernière application

8. En vous inspirant de ce qui précède, déterminer :

$$E_3 = \left\{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) / \ \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(xy) = f(x) + f(y)\right\}.$$

9. Enfin, déterminer : $\quad E_4 = \left\{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) / \ \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(xy) = f(x)f(y)\right\}$.

Devoir maison n° 13
Dérivabilité

À rendre le lundi 18 décembre 2023.

Les copies dont les résultats ne sont pas encadrés ou celles où il n'y a pas de phrase (dont ponctuation) ne seront pas corrigées.

Exercice obligatoire : suite récurrente et accroissements finis

Le but de cet exercice est de comparer les deux méthodes – chapitres 11 et 13 — d'étude des suites définies par une relation de récurrence « $u_{n+1} = f(u_n)$ ».

On note f la fonction $x \mapsto \ln(1+2x)$, $\mathscr{D}$ son ensemble de définition, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2cm).

1. **Graphe de f.**
   a) Étudier la fonction f : domaine de définition $\mathscr{D}$, variations et limites aux bornes de $\mathscr{D}$.
   b) Montrer que f possède deux points fixes.

   On peut vérifier que 0 en est un. On note α le deuxième point fixe, qu'on **NE** peut **PAS** expliciter.
   c) En déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite d'équation : $y = x$.
   d) Justifier que : $\alpha \in]1,2[$. *On donne :* $\mathrm{e} \in]2{,}7, 2{,}8[$.
   e) Tracer la droite d'équation : $y = x$, ainsi que $\mathscr{C}$ sur $\left]-\dfrac{1}{2}, 4\right[$.

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. **Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.** Dans cette question, on montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α, grâce aux méthodes développées au chapitre 11 « Suites numériques ».
   a) Tracer en rouge les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
   c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

   Le principal inconvénient de cette méthode est qu'on n'a pas de *vitesse de convergence* de la suite vers sa limite : si $N \in \mathbb{N}$, on n'a aucune information sur $|u_N - \alpha|$.

On note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = f(v_n)$.

3. **Étude de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.** Dans cette question, on montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers α, mais sans étudier ses variations. On aura en prime une vitesse de convergence.
   a) Tracer en vert les premiers termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n \geq \alpha$.
   c) Déterminer un réel $K \in [0,1[$ pour lequel : $\forall x \in [\alpha, +\infty[$, $\left|f'(x)\right| \leq K$.
   d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|v_{n+1} - \alpha| \leq K\,|v_n - \alpha|$.
   e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|v_n - \alpha| \leq 2K^n$.
   f) En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
4. a) Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer un entier naturel $N \in \mathbb{N}$ pour lequel : $|v_N - \alpha| \leq \varepsilon$.
   b) Écrire une fonction Scilab `approx` qui prend en entrée un nombre réel strictement positif `e` et qui affiche en sortie une approximation de α à la précision `e`.

Exercices facultatifs

Exercice A : dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction

On note f la fonction $x \mapsto (x+1)^2 \mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. On se propose dans cet exercice de déterminer explicitement la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux nombres réels u_n et v_n pour lesquels :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n (x^2 + u_n x + v_n)\, \mathrm{e}^{-x}.$$
On exprimera u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Exprimer explicitement u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En calculant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ de deux manières différentes la somme $\sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} - v_k$, déterminer une expression explicite de v_n en fonction de n.
5. Déterminer finalement une expression explicite de $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Retrouver le résultat de la question 5 en appliquant directement la formule de Leibniz à f.

Exercice B : série harmonique et constante d'Euler

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$

1. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$
   On pourra minorer intelligemment chaque terme de la somme $H_{2n} - H_n$.
   b) En déduire que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$. *On pourra raisonner par l'absurde.*
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\quad \frac{1}{1+x} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}.$
   On pourra utiliser l'inégalité des accroissements.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\quad U_n = H_n - \ln(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n).$

3. a) Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. *On pourra utiliser la question 2.*
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad \ln(n+1) \leq H_n$. *On pourra utiliser la question 2.*
   c) Montrer finalement que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   Sa limite est notée γ, et appelée constante d'Euler-Mascheroni. *On ne sait pas à ce jour si γ est rationnel. En revanche, on sait que si elle l'est, son dénominateur possède plus de 242 080 chiffres !*
   d) Trouver un équivalent de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\quad V_n = H_{kn} - H_n = \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{kn}.$

4. a) Déduire de la question 2 que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\ln(kn+1) - \ln(n+1) < V_n < \ln(kn) - \ln(n).$$
   b) En déduire que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Devoir maison n$^{\text{o}}$ 14
Espaces vectoriels

À rendre le lundi 8 janvier 2024.

Les copies dont les résultats ne sont pas encadrés ou celles où il n'y a pas de phrase (dont ponctuation) ne seront pas corrigées.

Exercice 1 : sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. a) Déterminer un système d'équations de $\mathrm{Im}A$.
   b) Déterminer une base de $\mathrm{Im}A$.
   c) Déterminer un supplémentaire de $\mathrm{Im}A$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. a) Déterminer un système d'équations de $\ker A$.
   b) Déterminer une base de $\ker A$.
3. a) Les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}A$ et $\ker A$ sont-ils en somme directe ? *Justifier.*
   b) Déterminer une base de $\mathrm{Im}A \cap \ker A$.

On note f l'application linéaire canoniquement associée à A.

4. a) Donner l'expression analytique de f.
   b) La fonction f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2 : sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$

On munit $\mathbb{R}^4$ de sa base canonique $\mathscr{B}$, puis on pose : $G = \mathrm{Vect}\big((1,0,0,1),(0,1,1,0)\big)$ et :

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \; x+y+z = 0 \quad \text{et} \quad y-z+t = 0\right\}.$$

1. Déterminer un système d'équations de G.
2. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
3. Déterminer une base de G et une base de F.
4. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
5. Déterminer la décomposition de $(1,2,3,4)$ dans une base adaptée à la somme directe.

Exercice 3 : sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

On pose : $E = \left\{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \; \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n\right\}$.

1. Montrer que pour tous $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda u \in E$ et $u+v \in E$.
2. En déduire que E est un espace vectoriel.

Exercices facultatifs

Exercice A : sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

On munit $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de sa *base canonique* $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, c'est-à-dire :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

On note $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices *symétriques de taille* 2 *à coefficients dans* $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) / \ \beta = \gamma \right\}.$$

1. Montrer que $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. a) Montrer que la famille $\mathscr{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$.

   b) Donner $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}} \left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right)$.

On note ensuite $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices *antisymétriques* de taille 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$:

$$\mathscr{A}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) / \ \beta = -\gamma \quad \text{et} \quad \alpha = \delta = 0 \right\}.$$

3. Montrer que $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, et en déterminer une base $\mathscr{G}$.
4. a) Montrer que $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

   b) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Donner la décomposition de M dans une base adaptée à cette somme directe.

Exercice B : sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$

On pose : $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / \ P(X^2) = X^2 P(X)\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / \ P(1) = P(2)\}$.

1. Montrer que : $F = \mathrm{Vect}(X^2)$, puis que : $G = \mathrm{Vect}(1, X^2 - 3X, X^3 - 7X)$.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice C : sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

On note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a\cos(2x) + b\cos(x) + c.$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Montrer que la famille de fonctions :
   a) $\mathscr{G}_1 = \big(x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \cos(x), x \mapsto 1\big)$ est une base de E.
   b) $\mathscr{G}_2 = \big(x \mapsto \cos(x)^2, x \mapsto \sin(x)^2, x \mapsto \cos(x)\big)$ est une base de E.
   c) $\mathscr{G}_3 = \big(x \mapsto \cos(x)^2, x \mapsto 1, x \mapsto \cos(2x)\big)$ n'est pas une base de E.
3. Déterminer les coordonnées de la fonction $x \mapsto 1 + 2\cos(x) + 3\cos(2x)$ dans $\mathscr{G}_1$ et dans $\mathscr{G}_2$.

Devoir maison n^{o} 15
Espaces vectoriels de dimension finie

À rendre le lundi 15 janvier 2024.

Les copies dont les résultats ne sont pas encadrés ou celles où il n'y a pas de phrase (dont ponctuation) ne seront pas corrigées.

Exercice 1 : dimension d'un sous-espace vectoriel

Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose :

$$\varepsilon_1 = e_1 + e_3, \quad \varepsilon_2 = e_1 + e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad \varepsilon_3 = 2e_1 + e_2 + 2e_3.$$

puis : $F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

1. **Exemples.** Dans chacun des cas suivants, expliciter ε_1, ε_2 et ε_3, puis donner $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.
   a) $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   b) $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
   c) $E = \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer la dimension de F.
3. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

Exercice 2 : sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}$, on considère :

$$u_1 = (1,1,1,1), \quad u_2 = (1,2,3,4) \quad \text{et} \quad u_3 = (-1,0,-1,0),$$

et on pose : $G = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ et : $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \ x+y=0 \quad \text{et} \quad x+z=0\right\}$.

1. Justifier que F est un espace vectoriel. Calculer la dimension de F.
2. Calculer la dimension de G. Déterminer un système d'équations cartésiennes de G.
3. Les espaces F et G sont-ils en somme directe ?

Dans les deux prochaines questions, on montre de deux façons différentes que :

$$F + G = \mathbb{R}^4 \quad \text{et} \quad \dim(F \cap G) = 1.$$

4. Montrer que : $F + G = \mathbb{R}^4$. En déduire $\dim(F \cap G)$.
5. Déterminer une base de $F \cap G$. En déduire que : $F + G = \mathbb{R}^4$.

Exercice 3 : image et noyau d'une matrice

On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Im} A$, un système d'équation cartésienne de $\mathrm{Im} A$, puis une base de $\ker A$.
2. Les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im} A$ et $\ker A$ sont-ils en somme directe ?
3. Déterminer un supplémentaire de $\mathrm{Im} A$, puis de $\ker A$, dans $\mathbb{R}^3$.

On note f l'application linéaire canoniquement associée à A.

4. Donner l'expression analytique de f. Est-elle injective ? surjective ?

Exercices facultatifs

Exercice A : sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$

On pose : $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] /\ P(1) = P(2) = 0\}$.

1. Montrer que la famille $\mathscr{B} = \big((X-1)(X-2), X(X-1)(X-2)\big)$ est une base de F.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice B : sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (ATS2016)

On considère l'ensemble U des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

Pour un $u \in U$, les deux premiers termes u_0 et u_1 sont donnés. La suite nulle définie par : $u_0 = 0$ et $u_1 = 0$ appartient à U.

Le but de l'exercice est de montrer que U est un espace vectoriel de dimension finie, puis d'en exhiber une base.

1. Soient $a \in U$, $b \in U$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que : $a + b \in U$ et $\alpha a \in U$.
   En déduire que U est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Soient c et d les deux suites appartenant à U telles que : $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $d_0 = 0$ et $d_1 = 1$.
   a) Montrer que (c,d) est une base de U.
   b) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel U ?
3. a) Montrer qu'il existe deux réels distincts et non nuls ρ et σ avec : $\rho < 0 < \sigma$, pour lesquels les suites géométriques $(\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sigma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à U.
   On calculera les deux nombres ρ et σ.
   On pose alors : $r = (\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $s = (\sigma^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b) Montrer que (r,s) est une base de U.
4. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
   a) Si v est la suite de U telle que : $v_0 = x$ et $v_1 = y$, donner en fonction de x et y les composantes de v dans la base (r,s).
   b) En déduire une formule générale de v_n en fonction de n (sans utiliser la formule de récurrence).
5. a) Écrire une procédure informatique `F` ayant pour variable d'entrée deux réels `x`, `y` et un entier naturel `n` et qui renvoie le terme v_n de la suite $v \in U$ telle que $v_0 =$`x` et $v_1 =$`y`.
   La fonction `F` *utilisera la relation de récurrence $v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n$ dans une boucle ou de manière* récursive.
   b) Écrire une procédure informatique `G` ayant également pour variable d'entrée deux réels `x`, `y` et un entier naturel `n` et qui renvoie aussi le terme v_n de la suite $v \in U$ telle que $v_0 =$`x` et $v_1 =$`y`, mais sans faire de boucle (en utilisant la formule établie à la question 4.b).
   c) Expliquez quelle est, entre `F` et `G`, la fonction la plus efficace pour calculer v_n.

Devoir maison n$^{\text{o}}$ 16
Applications linéaires

À rendre le lundi 22 janvier 2024.

Les copies dont les résultats ne sont pas encadrés ou celles où il n'y a pas de phrase (dont ponctuation) ne seront pas corrigées.

Exercice 1 : application linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$

On note f l'application $(x,y,z) \mapsto (x+z, y-x, z+y, x+y+2z)$ définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. a) Déterminer une base du noyau de f.
   b) **EN DÉDUIRE** le rang de f.
3. a) Déterminer une base de l'image de f.
   b) Déterminer un système d'équations de $\operatorname{Im} f$.
4. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
5. $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont-ils en somme directe ?

Exercice 2 : projection d'un espace vectoriel

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On note u l'endomorphisme de E défini par :

$$u(e_1) = 3e_1 + e_2 + e_3, \quad u(e_2) = -2e_1 - e_3 \quad \text{et} \quad u(e_3) = -4e_1 - 2e_2 - e_3.$$

1. **Exemples.** Dans chacun des cas suivants, expliciter $u(e_1)$, $u(e_2)$, $u(e_3)$, puis $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}\big(u(e_1+2e_2+3e_3)\big)$.
   a) $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   b) $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
   c) $E = \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer une base de $\ker u$. Donner la dimension de $\ker u$.
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} u$.
4. Vérifier que $\operatorname{Im} u$ et $\ker u$ sont supplémentaires dans E.
5. Montrer que u est une projection vectorielle.

Exercice 3 : symétrie de $\mathbb{R}^3$

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}$, on pose :

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ x+y+2z = 0\right\}$$

et : $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ x+2y+z = 0 \quad \text{et} \quad 2x+y-z = 0\right\}$.

1. Donner une base de F et une base de G, puis montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer la décomposition de (x,y,z) adaptée à la somme directe $F \oplus G$.
3. En déduire une expression analytique de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Exercices facultatifs

Exercice A : l'application transposée

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle *transposée de M*, et on note $\sigma(M)$, la matrice : $\sigma(M) = (m_{j,i})_{\substack{1\leq j\leq p\\ 1\leq i\leq n}} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Par exemple :

$$\sigma\left(\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}.$$

On pose : $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) /\ \sigma(M) = M\}$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) /\ \sigma(M) = -M\}$.

1. a) Montrer que l'application transposée $M \mapsto \sigma(M)$ est une symétrie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

   b) En déduire que $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer la décomposition de M adaptée à la somme directe ci-dessus.
   On pourra écrire : $M = S + A$ avec $(S, A) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ et calculer $\sigma(M)$ pour exprimer S et A en fonction de M et $\sigma(M)$.

Exercice B : endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

On note Δ l'application $P \mapsto P(X+1) - P(X)$ définie sur $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Calculer, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, le degré de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P. En déduire $\ker \Delta$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $\delta_n = \Delta_{|\mathbb{R}_n[X]}$. Par restriction, δ_n est aussi une application linéaire.

3. a) Déterminer $\ker \delta_n$.

   b) Déterminer le rang de δ_n, puis montrer que : $\operatorname{Im} \delta_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
4. Montrer que Δ est surjective. *On pourra s'inspirer de la question 3.*
5. Redémontrer que $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie.

Exercice C : deux résultats classiques sur $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note f l'application $P \mapsto \big(P(0), P'(0), \ldots, P^{(n)}(0)\big)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

1. a) Justifier que f est linéaire.

   b) Montrer que f est injective.

   c) En **DÉDUIRE** que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

Soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

2. Trouver le polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ pour lequel : $\varphi(P) = (a_0, \ldots, a_n)$.

On suppose à présent $a_0, \ldots, a_n$ **DEUX À DEUX DISTINCTS**, et on note φ l'application $f \mapsto \big(f(a_0), \ldots, f(a_n)\big)$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

3. Montrer que φ est linéaire, puis que $\psi = \varphi_{|\mathbb{R}_n[X]}$ réalise un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

On pose : $H = \Big\{h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} /\ h(a_0) = \cdots = h(a_n) = 0\Big\}$.

4. Montrer que H et $\mathbb{R}_n[X]$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Devoir maison n$^{\text{o}}$ 17
Intégration sur un segment

À rendre le lundi 29 janvier 2024.

Les copies dont les résultats ne sont pas encadrés ou celles où il n'y a pas de phrase (dont ponctuation) ne seront pas corrigées.

Exercice 1 : calcul d'une intégrale (bac 1993)

Dans cet exercice, on se propose de calculer l'intégrale : $J = \int_0^1 \frac{x\,\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^3}\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier que l'intégrale J est convergente.
2. Calculer directement les deux intégrales : $A = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$ et $B = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x$.
3. Dans cette question, on calcule l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x$.
   a) Effectuer le changement de variable : $u = \mathrm{e}^x$ dans l'intégrale I.
   b) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X(1+X)^2}$.
   c) En déduire la valeur de I.
4. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer J en fonction de I. En déduire la valeur de J.

Exercice 2 : intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n\,\mathrm{d}t$.

1. a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n converge.
   b) Calculer I_0, I_1 et I_2.
   c) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.
   On pourra remarquer que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $0 \leq \sin(t) \leq 1$.
   d) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
2. En effectuant un changement de variable, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n\,\mathrm{d}t$.
3. a) En remarquant que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $\sin(t)^{n+2} = \sin(t)^{n+1} \times \sin(t)$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$.
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
   c) En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.
4. a) Montrer que la suite $\big((n+1)I_{n+1}I_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et calculer sa valeur.
   b) Montrer que : $I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$, et en déduire un équivalent de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. En calculant $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer la *formule de Wallis* : $\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$.

Exercices facultatifs

Exercice A : une fonction définie par une intégrale (oral ATS)

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose : $$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \ln 2 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

1. Déterminer le signe de f. *On pourra distinguer les cas $x > 1$ et $x < 1$.*
2. a) Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ l'intégrale : $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}$.

   b) En déduire que pour tout $x \in]0,1[$: $x^2\ln(2) \leq f(x) \leq x\ln(2)$, et que pour tout $x \in]1,+\infty[$:
   $$x\ln(2) \leq f(x) \leq x^2\ln(2).$$

   c) Montrer alors que f est continue en 0 et en 1, et calculer : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3. a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ et y calculer f'.

   b) En déduire les variations, ainsi que l'allure du graphe de f.

Exercice B : un espace vectoriel de dimension infinie

Pour tout $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, on appelle $T(f)$ la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ définie sur $[0,1]$.

1. Montrer que l'application $T : f \mapsto T(f)$ est un endomorphisme de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.
2. Montrer que T est injective.
3. Montrer que T n'est pas surjective.
4. En déduire que $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ n'est pas de dimension finie.

Exercice C : une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note φ l'application $P \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = \big(1, X-1, X(X-1), \dots, X^{n-1}(X-1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. a) Montrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

   b) Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$. En déduire $\dim(\ker\varphi)$.

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on appelle *primitive de P* tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ pour lequel : $Q' = P$.

3. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que P possède une unique primitive de terme constant nul.

On appelle alors ψ l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe l'unique primitive de terme constant nul.

4. a) Justifier que ψ est linéaire.

   b) Montrer que : $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(X, X^2, \dots, X^{n+1})$.

   c) Montrer que : $P \in \ker(\varphi) \iff \psi(P) \in \mathrm{Vect}\big(X(X-1), \dots, X^n(X-1)\big)$.

   d) Donner alors une base de $\ker(\varphi)$.

Devoir maison n° 18
Développements limités

À rendre le lundi 05 février 2024.

Les copies dont les résultats ne sont pas encadrés ou celles où il n'y a pas de phrase (dont ponctuation) ne seront pas corrigées.
Vous traiterez **AU CHOIX** un des deux exercices.

Exercice 1 : étude d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Pour tout $x \in [-1, +\infty[$, on pose : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]-1,+\infty[\setminus \{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x = -1. \end{cases}$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie 1 : étude de f

1. La fonction f est-elle continue en -1 ? Est-elle dérivable en -1 ?
2. a) Calculer le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.
   b) En déduire que f est dérivable en 0, et préciser $f'(0)$.
   c) Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en l'origine, et préciser leur position relative locale.
3. a) Justifier que f est dérivable sur $]-1,+\infty[\setminus \{0\}$ et montrer que :
   $$\forall x \in]-1,+\infty[\setminus \{0\}, \quad f'(x) = \frac{(1+x)\ln(1+x) - x}{(1+x)\ln(1+x)^2}.$$
   b) Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $x \mapsto (1+x)\ln(1+x) - x$, et en déduire $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$.
   c) En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.
4. a) Montrer que pour tout réel $x > -1$: $\ln(1+x) \geq \dfrac{x}{1+x}$.
   b) En déduire que f est croissante sur $]-1,+\infty[$.
5. a) Déterminer le signe de $x \times \dfrac{1 - \ln(1+x)}{\ln(1+x)}$ suivant les valeurs de $x \in]-1,+\infty[\setminus \{0\}$.
   b) En déduire la position de la courbe f par rapport à la droite d'équation : $y = x$.
6. Dans $\mathscr{R}$, tracer la tangente à f en 0, la droite d'équation : $y = x$, puis $\mathscr{C}$.

Partie 2 : étude d'une suite définie par récurrence

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = \mathrm{e}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

7. Écrire un algorithme en Scilab ou en pseudo-code qui prend en entrée un entier naturel N et qui renvoie la valeur de u_N.
8. Tracer en rouge sur le graphe de la question 6 les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq \mathrm{e} - 1$. *On pourra utiliser la question 4b.*
10. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite. *On pourra utiliser la question 5b.*

Exercice 2 : étude d'une fonction définie par une intégrale

Partie A : une fonction auxiliaire

On note φ la fonction définie par : $\quad \forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \varphi(t) = \dfrac{\operatorname{Arctan}(t)}{t}$.

1. Justifier que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, et y calculer sa dérivée.
2. a) Déterminer le développement limité de φ à l'ordre 2 au voisinage de l'origine.
   b) Montrer que φ se prolonge par continuité en 0, et préciser la valeur de $\varphi(0)$.

   On note encore φ la fonction ainsi prolongée, de sorte que φ est maintenant définie sur $\mathbb{R}$.

   c) Montrer que φ est dérivable en 0, et préciser $\varphi'(0)$.
   d) Donner l'équation de la tangente au graphe de φ en l'origine, et préciser la position du graphe de φ par rapport à sa tangente au voisinage de l'origine.
   e) Montrer enfin que φ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ en 0.
3. a) Étudier les variations de la fonction $x \overset{p}{\mapsto} x - (1+x^2)\operatorname{Arctan}(x)$ sur $\mathbb{R}$, et préciser son signe.
   b) Dresser finalement le tableau de variation de φ, en précisant les limites en $+\infty$ et $-\infty$.

Partie B : étude d'une fonction définie par une intégrale

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $\quad F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

4. Justifier que F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et donner F'.
5. a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\quad F(x) = \operatorname{Arctan}(x)\ln(x) + \displaystyle\int_x^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.
   b) En déduire que F se prolonge par continuité en 0, et préciser la valeur de $F(0)$.
6. a) Étudier les limites $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{Arctan}(x)\ln(x)}{x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.
   b) Montrer finalement que F n'est pas dérivable en 0.

Partie C : valeur approchée de $F(0)$

Pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \,]0,1]$, on pose : $\quad I_k(x) = \displaystyle\int_1^x t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

7. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \,]0,1]$. Justifier que $I_k(x)$ est bien définie, et la calculer.
8. a) Montrer que pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $\quad \dfrac{1}{1+t^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.
   b) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \,]0,1]$:
   $$F(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x) + (-1)^{n+1}\int_1^x \frac{t^{2n+2}\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$
   c) Montrer que pour tous $x \in \,]0,1]$ et $k \in \mathbb{N}$: $\quad 0 \leq \displaystyle\int_1^x \frac{t^k \ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leq I_k(x)$.
   d) En déduire que : $\quad \left| F(0) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \leq \dfrac{1}{(2n+3)^2}$.
9. Écrire une fonction en Scilab `approx`, qui ne prend aucun argument en entrée, et qui calcule une valeur approchée de $F(0)$ à 10^{-10} près.

Devoir maison n$^{\text{o}}$ 19
Fonctions vectorielles et courbes paramétrées

À rendre le lundi 12 février 2024.

Les copies dont les résultats ne sont pas encadrés ou celles où il n'y a pas de phrase (dont ponctuation) ne seront pas corrigées.

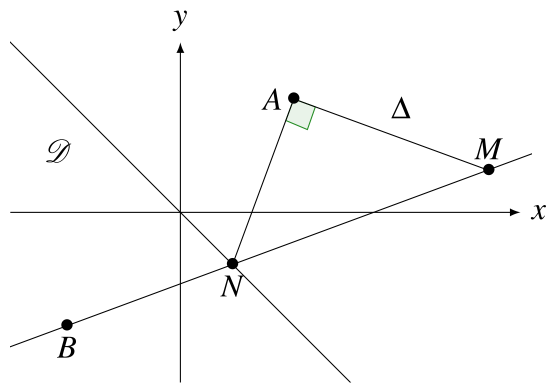
Exercice 1 : ATS2016

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(1,1)$, $B(-1,-1)$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation : $y=-x$.

Pour un point N de $\mathscr{D}$ de coordonnées $(t,-t)$, on considère la droite (BN), la droite (AN), et la droite Δ passant par A et perpendiculaire à la droite (AN).

Le point M est l'intersection — si elle existe — de la droite (BN) et de la droite Δ.

1. En fonction de t, donner une équation cartésienne de la droite (BN).
2. En fonction de t, donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{AN}$.
3. En fonction de t, donner une équation cartésienne de la droite Δ passant par A et perpendiculaire à la droite (AN).
4. Pour quelles valeurs de t les droites (BN) et Δ sont-elles parallèles ? On trouvera deux valeurs, notées dans la suite t_1 et t_2.



5. Calculer en fonction de t les coordonnées du point M en résolvant le système formé par les équations des droites (BN) et Δ pour $t\in\mathbb{R}\setminus\{t_1,t_2\}$.

On appelle désormais $\mathscr{G}$ la courbe décrite par M quand N parcourt la droite $\mathscr{D}$.

6. On note $u\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $v\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ les fonctions telles que :
$$u(t)=\frac{t+1}{-t+1}=\frac{2}{-t+1}-1 \quad\text{et}\quad v(t)=\frac{-t+1}{t+1}=\frac{2}{t+1}-1.$$
   a) Préciser les domaines de définition de u et v.
   b) Calculer les dérivées de u et v et préciser les sens de variation de u et v sur chaque intervalle ou elles sont définies.
   c) Donner un tableau des variations conjointes de u et v en précisant leurs limites aux extrémités de chaque intervalle des domaines de définition.
   On ne demande pas de représentation graphique de u et v.
   d) En déduire une représentation graphique de $\mathscr{G}$.
7. a) Le point A appartient-il à $\mathscr{G}$? Si c'est le cas, quelle est la valeur de t qui lui est associée ?
   b) Le point B appartient-il à $\mathscr{G}$? Si c'est le cas, quelle est la valeur de t qui lui est associée ?
8. a) Calculer $u(t)v(t)$ pour tout $t\in\mathbb{R}\setminus\{t_1,t_2\}$. Que remarque-t-on ?
   b) On appelle $\mathscr{H}$ la courbe d'équation cartésienne : $y=\dfrac{1}{x}$.
   Peut-on déduire de ce qui précède que $\mathscr{G}$ est la courbe $\mathscr{H}$ dont on a retiré un ou plusieurs points ? Quel(s) point(s) retirer à $\mathscr{H}$ pour obtenir $\mathscr{G}$?

Exercice 2 : ATS2021

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. On définit l'application $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ par :

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad f(z)=2z-z^2.$$

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A : construction géométrique

Dans cette partie, on fixe un nombre complexe $z\in\mathbb{U}\setminus\{1\}$. On introduit le point M d'affixe z, le point M_1 d'affixe $z_1=z^2$, le point M_2 d'affixe $z_2=2z$ et le point N d'affixe $f(z)$.

1. Montrer que le quadrilatère OM_1M_2N est un parallélogramme.
2. Donner le module de z_1, et exprimer l'argument de z_1 en fonction de celui de z.
3. Déduire des questions précédentes une construction géométrique simple du point N.

Partie B : tracé d'une courbe paramétrée

Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on note $M(t)$ le point d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ et $N(t)$ le point d'affixe $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$. On note $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées cartésiennes du point $N(t)$.

4. Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{cases} x(t) &=& 2\cos(t)-\cos(2t)\\ y(t) &=& 2\sin(t)-\sin(2t). \end{cases}$$

Le reste de cette partie se consacre à l'étude de la courbe paramétrée donnée par les fonctions x et y.

5. a) Montrer que les fonctions x et y sont 2π-périodiques.
   b) Pour tout réel $t\in\mathbb{R}$, montrer que le point $N(-t)$ se déduit du point $N(t)$ par une symétrie que l'on précisera.
   c) Déduire des questions précédentes un intervalle I de longueur minimal et de la forme $[0,\alpha]$ avec $\alpha>0$ pour l'étude de la courbe paramétrée.
6. a) Montrer que les fonctions x et y sont dérivables et déterminer les expressions de $x'(t)$ et $y'(t)$ pour tout $t\in[0,\pi]$, puis étudier leur signe.
   On rappelle les formules trigonométriques suivantes, pour tous $p,q\in\mathbb{R}$:

$$\sin(p)-\sin(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos(p)-\cos(q)=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

   b) Dresser le tableau de variation conjoint des fonctions x et y sur l'intervalle $[0,\pi]$.
   On y fera apparaître les valeurs de $x(t)$, $x'(t)$, $y(t)$ et $y'(t)$ pour $t\in\{0,\pi/3,2\pi/3,\pi\}$.
7. Montrer que pour tout réel $t\in\,]0,\pi]$, le vecteur $\overrightarrow{M(t)N(t)}$ est orthogonal à la tangente à la courbe paramétrée en $N(t)$.
8. Tracer la courbe paramétrée. *On fera apparaître en particulier les points $N(t)$ pour $t\in\{\pi/3,\pi/2,2\pi/3,\pi\}$ ainsi que les tangentes en ces points.*
9. Calculer la longueur de la courbe paramétrée, donnée par la formule :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Devoir maison n° 20
Applications linéaires (seconde partie)

À rendre le lundi 19 février 2024.

Les copies dont les résultats ne sont pas encadrés ou celles où il n'y a pas de phrase (dont ponctuation) ne seront pas corrigées.

Exercice 1 : changements de bases

Soient E et F deux espaces vectoriels munis respectivement de bases $\mathscr{B}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ et $\mathscr{C}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$. Soient $u\in\mathscr{L}(E,F)$ et $v\in\mathscr{L}(F,E)$ deux applications linéaires telles que :

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)=\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\\2&3\end{pmatrix}=M \quad\text{et}\quad \mathrm{mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(v)=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&1&-3\end{pmatrix}=N.$$

1. **Étude de quelques exemples.**
   a) Dans cette question, on suppose : $E=\mathbb{R}^2$ et $F=\mathbb{R}^3$, munis de leurs bases canoniques respectives. Donner les expressions analytiques de u et v, puis de $u\circ v$ et $v\circ u$.
   b) Dans cette question, on suppose : $E=\mathbb{R}_1[X]$ et $F=\mathbb{R}_2[X]$ munis de leurs bases canoniques respectives. Calculer $u(X+2)$ et $(v\circ u)(X+2)$.
   c) Dans cette question, on suppose : $E=\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique, et : $F=\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ muni de la base $(E_{11},E_{12}+E_{21},E_{22})$. Calculer $u(1,2)$ et $(v\circ u)(1,2)$.
2. Les applications u, v, $u\circ v$ et $v\circ u$ sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

On pose : $\varepsilon_1'=\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2'=\varepsilon_1-\varepsilon_2$, puis : $\eta_1'=\eta_1$, $\eta_2'=\eta_1+\eta_2$ et $\eta_3'=\eta_1+\eta_2+\eta_3$. On note finalement $\mathscr{B}'$ la famille $(\varepsilon_1',\varepsilon_2')$ et $\mathscr{C}'$ la famille $(\eta_1',\eta_2',\eta_3')$.

3. Montrer que $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{C}'$ sont des bases de E et F respectivement.
4. Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}}(u)$, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)$ et $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}',\mathscr{B}'}(v)$.

Exercice 2 : projection d'un espace vectoriel

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, et $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ une base de E. On note u l'endomorphisme de E défini par :

$$u(e_1)=3e_1+e_2+e_3,\quad u(e_2)=-2e_1-e_3\quad\text{et}\quad u(e_3)=-4e_1-2e_2-e_3.$$

Écrire la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$. En déduire que u est une projection. Déterminer la base et la direction de la projection. Vérifier que la base et la direction sont supplémentaires dans E.

Exercice 3 : symétrie de $\mathbb{R}^3$

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$, on pose :

$$F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ x+y+2z=0\right\}\quad\text{et}\quad G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ x+2y+z=0\quad\text{et}\quad 2x+y-z=0\right\}.$$

On *admet* que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, que $\big((1,-1,0),(2,0,-1)\big)$ est une base de F, que $\big((1,-1,1)\big)$ est une base de G, de sorte que $\mathscr{C}=\big((1,-1,0),(2,0,-1),(1,-1,1)\big)$ est une base adaptée à la somme directe $F\oplus G$. On note s la symétrie de base F et de direction G, et enfin on pose : $Q=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$.

Donner $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(s)$ et Q. Calculer Q^{-1}. En déduire $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(s)$, puis l'expression analytique de s.

Exercices facultatifs

Exercice A : trigonalisation (inspiration ATS2010)

On considère les deux matrices : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A et T sont semblables (sur $\mathbb{R}$).
2. Calculer les puissances de T. En déduire celles de A.

Exercice B

On note φ l'application $P \mapsto \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right]$ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

On pose : $\mathscr{F} = (1, -2X+1, 6X^2-6X+1)$.

3. Montrer que $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer la matrice N de φ dans la base $\mathscr{F}$.
5. Calculer les puissances de N.
6. En déduire les puissances de M.

On note $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\varphi^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\varphi^{n+1} = \varphi \circ \varphi^n$.

7. Déterminer $\varphi^n(aX^2+bX+c)$ pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi^n$.

Exercice C

On note $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $\mathbf{D}$ l'application dérivée définie sur E par : $\forall f \in E, \quad \mathbf{D}(f) = f'$.

1. Justifier que $\mathbf{D}$ est un endomorphisme de E, et déterminer son noyau.

Soient les fonctions $t \overset{f_1}{\mapsto} \mathrm{e}^t$, $t \overset{f_2}{\mapsto} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$ et $t \overset{f_3}{\mapsto} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$ définies sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$\mathscr{B} = \big(f_1, f_2, f_3\big) \quad \text{et} \quad G = \{\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 /\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

2. Justifier que G est un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de G. Donner la dimension de G.
3. Montrer que G est stable par $\mathbf{D}$, c'est-à-dire que pour tout $f \in G$: $\mathbf{D}(f) \in G$.

On note $\widehat{\mathbf{D}}$ l'endomorphisme induit par $\mathbf{D}$ sur G, *i.e.* l'endomorphisme $\widehat{\mathbf{D}}$: $\begin{cases} G & \to G \\ f & \mapsto f' \end{cases}$.

4. a) Déterminer la matrice M de $\widehat{\mathbf{D}}$ dans la base $\mathscr{B}$.
   b) Calculer M^3. En déduire que M est inversible et donner son inverse.
   c) En déduire que $\widehat{\mathbf{D}}$ est inversible et exprimer $\widehat{\mathbf{D}}^{-1}$ en fonction de $\widehat{\mathbf{D}}$.

Devoir maison n° 21
Déterminants

À rendre le lundi 11 mars 2024.

Les copies dont les résultats ne sont pas encadrés ou celles où il n'y a pas de phrase (dont ponctuation) ne seront pas corrigées.

Exercice obligatoire : inspiration ATS

Dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on pose : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et pour tous $a,b \in \mathbb{R}$: $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & b & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$. On considère enfin : $\mathscr{E} = \left\{ M_{a,b} / \ a,b \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, puis que la famille $\mathscr{F} = (\mathbf{B}, \mathbf{C})$ en est une base. En déduire $\dim(\mathscr{E})$. Vérifier que $\mathbf{A} \in \mathscr{E}$, et donner les coordonnées de $\mathbf{A}$ dans $\mathscr{F}$.

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathscr{U} = (u_1, u_2, u_3)$, et un endomorphisme f de E ayant pour matrice $\mathbf{A}$ dans la base $\mathscr{U}$.

2. a) Calculer $f(u_1 + 2u_2 + 3u_3)$.
   b) Déterminer une base de l'image et du noyau de f.
3. a) Déterminer le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$.
   b) Déterminer les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 de $\mathbf{A}$. *On choisira :* $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
   c) Déterminer des vecteurs propres v_1, v_2 et v_3 de $\mathbf{A}$ associés respectivement aux valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3 et tels que leur première composante soit égale à 1.
   d) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de E.
4. a) Donner une matrice diagonale $\mathbf{D}$ et une matrice inversible $\mathbf{P}$ telles que : $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$.
   b) Calculer l'inverse $\mathbf{P}^{-1}$ de $\mathbf{P}$.
5. Calculer $\mathbf{A}^2$ et $\mathbf{A}^3$.
6. Montrer par récurrence que pour tout entier n strictement positif on a :
$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_n & a_{n+1} & a_n \end{pmatrix}$$
   où les a_n sont les termes consécutifs d'une même suite. Déterminer une relation de récurrence pour la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Donner a_1, a_2 et a_3.
7. On pose : $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   a) Montrer que l'on a pour tout entier naturel n non nul : $\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$.
   b) Déterminer une matrice inversible $\mathbf{Q}$ et une matrice diagonale Δ telles que : $\mathbf{B} = \mathbf{Q}\Delta\mathbf{Q}^{-1}$.
   c) Calculer l'inverse $\mathbf{Q}^{-1}$ de $\mathbf{Q}$.
   d) Pour tout entier strictement positif n, calculer $\mathbf{B}^n$ en fonction de n.
8. a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{n-1} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.
   b) Donner une expression de a_n pour tout entier naturel n non nul.

Exercice facultatif : tour du Vandermonde

Partie A

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$. On appelle *matrice de Vandermonde* la matrice :

$$(x_j^{i-1})_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que si deux des scalaires $x_1, \ldots, x_n$ sont égaux, alors leur matrice de Vandermonde n'est pas inversible.
2. Réciproquement, supposons que les nombres $x_1, \ldots, x_n$ sont deux à deux distincts, et notons φ l'application $P \mapsto \big(P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)\big)$ de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{K}^n$.
   a) Justifier que φ est linéaire.
   b) Montrer que φ est injective, et en déduire que φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{K}^n$.
   c) Montrer finalement que la matrice de Vandermonde de $x_1, \ldots, x_n$ est inversible.

Partie B

Soient un entier naturel $n \geq 2$ et des complexes $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$, on appelle *déterminant de Vandermonde de* $x_1, \ldots, x_n$, et on note $V_n(x_1, \ldots, x_n)$, le déterminant :

$$V_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Le but de cette partie est de montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}, \quad V_n(x_1, \ldots, x_n) = \displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

3. Montrer que la formule est vraie pour $n = 2$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{K}$. Supposons la formule vraie au rang n.

4. Montrer que si au moins deux des nombres $x_1, \ldots, x_{n+1}$ sont égaux, alors la formule est vraie au rang $n+1$.

On suppose donc que $x_1, \ldots, x_{n+1}$ sont deux à deux distincts, et on note P la fonction $t \mapsto V_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, t)$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

5. a) Montrer que P est une fonction polynomiale de degré n. Préciser le coefficient dominant.
   b) Justifier que $x_1, \ldots, x_n$ sont racines de P.
   c) En déduire que la formule est vraie au rang $n+1$, et conclure.
6. **Application 1.** Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le déterminant de la matrice $(i^j)_{i,j \in [\![1,n]\!]}$ en faisant apparaître le déterminant de Vandermonde $V_n(1, 2, \ldots, n)$.
7. **Application 2.** Soient $n \in \mathbb{N}$, et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts et tous non nuls. Montrer que l'une au moins des sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2$,…, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^n$ est non nulle.

Devoir maison n^{o} 22
Réduction d'endomorphismes

À rendre le lundi 18 mars 2024.

Les copies dont les résultats ne sont pas encadrés ou celles où il n'y a pas de phrase (dont ponctuation) ne seront pas corrigées.

Exercice 1 : pimp my ATS2019

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de sa base orthonormée canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On note Id l'application identité de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$. On se donne l'application linéaire $s\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vérifiant :

$$s(e_1) = e_3, \quad s(e_2) = e_4, \quad s(e_3) = e_1, \quad s(e_4) = e_2.$$

et l'application linéaire p définie par : $p = \dfrac{1}{2}(\mathrm{Id} - s)$. L'objectif de cet exercice est de diagonaliser les applications linéaires s et p.

1. Donner : $S = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(s)$, et justifier qu'elle est diagonalisable (aucun calcul n'est demandé).
2. Calculer S^2. Que peut-on en déduire sur s ? Sans calcul, quelles sont ses valeurs propres ?

On pose : $u_1 = e_1 + e_3$, $u_2 = e_2 + e_4$, $u_3 = e_1 - e_3$ et $u_4 = e_2 - e_4$.

3. Justifier que la famille $\mathscr{F} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
4. Déterminer : $T = \mathrm{mat}_{\mathscr{F}}(s)$, ainsi qu'une relation entre S et T.
5. Déterminer : $P = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(p)$, puis : $R = \mathrm{mat}_{\mathscr{F}}(p)$. Que peut-on en déduire sur p ?

On pose : $f = 3s + 4p$.

6. Donner la matrice F de f dans la base $\mathscr{B}$.
7. Avec le moins de calcul possible, trouver une matrice $D \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice inversible $Q \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ telles que : $F = QDQ^{-1}$.

Exercice 2 : ATS2012

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0, v_0, w_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} &= -3u_n + v_n + 3w_n \\ v_{n+1} &= -4u_n + v_n + 4w_n \\ w_{n+1} &= -2u_n + v_n + 2w_n. \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice carrée A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_{n+1} = AX_n$.
2. Donner pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression de X_n en fonction de A, n et X_0.
3. Montrer que $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice A. Donner la valeur propre λ_1 qui lui est associée.

4. a) Déterminer le polynôme caractéristique P_A de la matrice A.
   b) Déterminer les deux autres valeurs propres λ_2 et λ_3 de A avec : $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
   c) Peut-on, à ce stade de l'exercice, affirmer que A est diagonalisable ?
   d) Déterminer des vecteurs propres E_2 et E_3 respectivement associés aux valeurs propres λ_2 et λ_3. *On choisira des vecteurs dont la première composante est* 1.
5. On pose : $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice inversible P telle que : $A = PDP^{-1}$.
   On ne demande pas de calculer P^{-1}.
6. a) Exprimer pour tout entier naturel n la matrice A^n à l'aide de P, D et P^{-1} et n.
   b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $A^{2k-1} = A$ et $A^{2k} = A^2$.
   c) Calculer A^2.
7. On suppose que : $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   a) Déduire de ce qui précède l'expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b) Montrer que dans ce cas, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes à partir d'un certain rang à préciser. Donner les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
8. On suppose ici que : $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Exprimer en fonction de la parité de n l'expression des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Préciser lesquelles n'ont pas de limite.
9. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u_0, v_0, w_0 pour que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Quelles sont alors les limites de ces suites ?
10. **Rab — ATS2015. Cette question peut remplacer les questions 6 à 9 ci-dessus.**
    On veut résoudre le système différentiel :

$$(\bigstar) \qquad \begin{cases} x'(t) = -3x(t) + y(t) + 3z(t) \\ y'(t) = -4x(t) + y(t) + 4z(t) \\ z'(t) = -2x(t) + y(t) + 2z(t) \end{cases}$$

    avec les conditions initiales : $x(0) = 1$, $y(0) = 2$ et $z(0) = 1$, où x, y et z sont trois fonctions inconnues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
    Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose : $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $U(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$ de sorte que le système $(\bigstar)$ est alors équivalent au système : $X'(t) = AX(t)$.
    a) Vérifier que : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, puis donner les valeurs de $u(0)$, $v(0)$ et $w(0)$.
    b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $U'(t) = DU(t)$.
    c) Résoudre le système : $U'(t) = DU(t)$.
    d) En déduire les solutions de $(\bigstar)$.

Devoir maison n$^{\text{o}}$ 23
Espaces euclidiens

À rendre le lundi 25 mars 2024.

Les copies dont les résultats ne sont pas encadrés ou celles où il n'y a pas de phrase (dont ponctuation) ne seront pas corrigées.

Exercice obligatoire : puissances et étude d'une isométrie

Dans tout le problème, $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne orientée usuelle et rapporté à sa base canonique (orthonormée directe) notée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On note I_3 la matrice identité d'ordre 3.

Partie A : puissances d'une matrice

On pose : $S = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

1. On pose : $\mathbb{R}[S] = \{P(S)\}_{P \in \mathbb{R}[X]}$.
   a) Montrer que $\mathbb{R}[S]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   b) Exprimer S^2 en fonction de S et de I_3.
   c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (a_n, b_n) de réels pour lequel :
   $$S^n = a_n I_3 + b_n S.$$
   d) Montrer que (I_3, S) est une base de $\mathbb{R}[S]$. Donner la dimension de $\mathbb{R}[S]$.

On note s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice S dans la base canonique.

2. Montrer que s est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$. Déduire de 1b l'expression s^{-1} en fonction de s.
3. On pose : $e'_1 = (1,1,1)$, $e'_2 = (1,-1,0)$, $e'_3 = (1,1,-2)$, et : $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$.
   a) Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.
   b) Déterminer la matrice T de s dans la base $\mathscr{B}'$, ainsi qu'une relation entre S et T.
   c) Calculer les puissances de T. En déduire celles de S. *On explicitera tous les coefficients.*

Partie B : composée de deux endomorphismes

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice : $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

On pose : $u = f \circ s^{-1}$, et on note U la matrice de u dans la base canonique.

4. a) Expliciter U. *Vous pourrez utiliser la question 2.*
   b) Montrer que : $U \in O_3(\mathbb{R})$, puis que U est une rotation vectorielle d'axe $\text{Vect}(e'_1)$.
5. On pose : $e''_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} e'_1$, $e''_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e'_2$ et $e''_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} e'_3$.
   a) Vérifier que la famille (e''_1, e''_2, e''_3) est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.
   b) Écrire la matrice U' de u dans cette base, et en déduire une mesure de l'angle de la rotation.

Exercice facultatif : projection orthogonale

Le but de ce problème est de définir et caractériser les projections orthogonales.

Soient E un espace vectoriel (pas nécessairement de dimension finie), qu'on munit d'un produit scalaire[1] $\langle \cdot, \cdot \rangle$, F un sous-espaces vectoriel de E de dimension finie $n \neq 0$, et $(f_1, \dots, f_n)$ une base **ORTHONORMÉE** de F.

On appelle *orthogonal de* F, et on note $F^\perp$, l'ensemble : $F^\perp = \{x \in E / \ \forall y \in F, \quad \langle x, y \rangle = 0\}$.

1. **Quelques propriétés.**
   a) Montrer que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
   b) Montrer que F et $F^\perp$ sont en somme directe.
   c) Montrer que pour tout $x \in E$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k \rangle f_k \in F$ et $x - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k \rangle f_k \in F^\perp$.
   d) En déduire que F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E.
2. **Théorème de Pythagore.** Soient $x, y \in E$. Montrer que : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff \langle x, y \rangle = 0$.

On appelle *projection orthogonale sur* F, et on note p_F, la projection sur F de direction $F^\perp$.

3. Montrer que pour tout $x \in E$: $p_F(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k \rangle f_k$.

Pour tout $x \in E$, on appelle *distance de* x *à* F, et on note $d(x, F)$, le réel : $d(x, F) = \inf\limits_{y \in F} \|x - y\|$.

4. a) Montrer que pour tous $x \in E$ et $f \in F$: $\|x - f\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - f\|^2$.
   b) En déduire que pour tout $x \in E$: $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.
   c) Montrer enfin que pour tout $x \in E$: $d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$.
5. **Application 1 : dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^4$.**
   On note F l'ensemble d'équation : $\begin{cases} x - z + t = 0 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$
   a) Montrer que la famille $\big((1,1,0,-1), (0,1,1,1)\big)$ est une base orthogonale de F.
   b) En déduire la distance du vecteur $(1,1,1,1)$ à F.
6. **Application 2 : dans un espace de dimension infinie.**
   On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathscr{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ du produit scalaire $(f, g) \mapsto \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) g(t) \, \mathrm{d}t$.
   On note F le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\sin, \cos)$ de E, et Id la fonction identité $t \mapsto t$ sur $[0, 2\pi]$.
   a) Vérifier que $(f, g) \mapsto \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) g(t) \, \mathrm{d}t$ est bien un produit scalaire sur E.
   b) Montrer que la famille $(\sin, \cos)$ en est une base orthonormale de F.
   c) Calculer $\langle \mathrm{Id}, \sin \rangle = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} t \sin(t) \, \mathrm{d}t$ et $\langle \mathrm{Id}, \cos \rangle = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} t \cos(t) \, \mathrm{d}t$.
   d) En déduire que le projeté orthogonal de l'identité Id sur F est la fonction $t \mapsto -2\sin(t)$.
   e) En déduire la distance de Id à F : $d(\mathrm{Id}, F) = \inf\limits_{a, b \in \mathbb{R}} \sqrt{\displaystyle\int_0^{2\pi} |t - a\cos(t) - b\sin(t)|^2 \, \mathrm{d}t}$.

1. On dit que E est un espace *préhilbertien*.

Devoir maison n° 24
Intégration d'une fonction continue sur un intervalle

À rendre le mardi 2 avril 2024.

Les copies dont les résultats ne sont pas encadrés ou celles où il n'y a pas de phrase (dont ponctuation) ne seront pas corrigées.

Exercice 1 : une intégrale semi-convergente

On pose : $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.
2. a) Montrer que : $J = \displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
   b) En déduire que l'intégrale J est convergente.
3. a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $|\sin(t)| \geq \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$.
   b) En déduire que l'intégrale J n'est pas absolument convergente.

Exercice 2 : fonction définie par une intégrale

Les questions 3) et 4) sont indépendantes des questions 1) et 2).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = \displaystyle\int_0^{x/2} \frac{\mathrm{d}v}{\cos(v)}$.

1. a) Justifier que f est définie et dérivable sur $]-\pi,\pi[$. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\pi,\pi[$.
   b) Montrer que f est impaire et strictement croissante sur $]-\pi,\pi[$.
   c) Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} f(x) = +\infty$.
   d) Montrer finalement que f est une bijection de $]-\pi,\pi[$ vers $\mathbb{R}$.

On pose : $g = f^{-1}$, et donc dans leurs domaines de définition on a : $y = f(x) \iff x = g(y)$.

2. a) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$: $g'(y) = 2\cos\dfrac{g(y)}{2}$. Calculer g''.
   b) Montrer que la fonction g est solution du problème de Cauchy sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{cases} X''(t) + \sin\big(X(t)\big) = 0, \\ X(0) = 0, \quad X'(0) = a > 0, \end{cases}$$

   pour une valeur de a à préciser.

3. Pour tout $t \in]-1,1[$, calculer : $h(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{2\,\mathrm{d}u}{1-u^2}$.
4. Soit $x \in]-\pi,\pi[$. Dans l'intégrale définissant $f(x)$, on pose : $u = \tan\left(\dfrac{v}{2}\right)$.
   a) Exprimer v en fonction de u, puis $\mathrm{d}v$ en fonction de u et $\mathrm{d}u$.
   b) Montrer que : $\cos(v) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$. *Indication : on pourra calculer d'abord* $\cos^2\left(\dfrac{v}{2}\right)$.
   c) Faire le calcul de l'intégrale définissant $f(x)$ et en déduire une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice facultatif : autour de la fonction Gamma

Partie A : domaine de définition

On appelle *fonction Gamma*, et on note Γ, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$.

1. a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists A > 0 / \quad \forall t > A, \quad t^{x-1} e^{-t} \leq \dfrac{1}{t^2}$.

   b) Montrer que Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

   b) En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Montrer que : $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.

Partie B : étude d'une fonction définie par une intégrale

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\, du$.

4. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner f'. Dresser les tableaux de variation et de signe de f.
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = x\displaystyle\int_0^1 e^{-(tx)^2}\, dt$.

Partie C : calcul de $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $K(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\, dt$ et $k(x) = -2x\displaystyle\int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2}\, dt$.

6. a) Justifier que K est définie sur $\mathbb{R}$.

   b) **Sans dériver**, déterminer les variations de K.

7. a) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_-$: $|e^x - e^y| \leq |x-y|$.

   b) En déduire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $|K(x) - K(y)| \leq \left|x^2 - y^2\right|$.

   c) Montrer enfin que K est continue sur $\mathbb{R}$.

8. a) Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}$: $e^h = 1 + h + \displaystyle\int_0^h (h-t)\, e^t\, dt$.

   b) En déduire que pour tout $h \in \mathbb{R}$: $|h| < 1 \implies \left|e^h - 1 - h\right| \leq \dfrac{e\, h^2}{2}$.

   c) Montrer enfin que K est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que : $K' = k$.

9. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $k(x) = -2f'(x)f(x)$, où f a été définie dans la partie B.
10. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $K(x) = \dfrac{\pi}{4} - f(x)^2$.
11. En majorant *intelligemment* l'intégrande, montrer que : $K(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.
12. En déduire la valeur de $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Devoir maison n° 25
Séries numériques

À rendre le lundi 8 avril 2024.

Les copies dont les résultats ne sont pas encadrés ou celles où il n'y a pas de phrase (dont ponctuation) ne seront pas corrigées.

Exercice obligatoire : approximations de π

Dans ce problème, on calcule le développement en série entière *de la fonction* Arctan*, puis on calcule une approximation de π à l'aide de séries numériques.*

1. Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des réels x pour lesquels la série $\sum \dfrac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k}$ est convergente.
2. **Développement en série entière de** Arctan**.** Soit $a \in [0,1]$.
   a) Justifier que pour tous $x \in [-1,1]$ et $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n+2}}{1+x^2}$.

   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$\text{Arctan}(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}a^{2k+1} + (-1)^{n+1}\int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

   c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left|\displaystyle\int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leq \dfrac{a^{2n+3}}{2n+3}$.

   d) En déduire que : $\text{Arctan}(a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}a^{2k+1}$.

   e) La relation précédente est-elle encore vraie si $a \in [-1,0]$.
3. **Un procédé élémentaire d'approximation de π.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = 4\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|S_n - \pi| \leq \dfrac{4}{2n+3}$. *On pourra utiliser la question 2c.*

   Soit $\varepsilon > 0$.

   b) Déterminer le plus petit entier naturel N_ε pour lequel : $\dfrac{4}{2N_\varepsilon+3} \leq \varepsilon$. Calculer $N_{10^{-6}}$.

   c) Écrire un algorithme, en Scilab ou en méta-langage, qui prend en entré un nombre réel ε, et qui renvoie une approximation de π à ε près.
4. **Un autre procédé d'approximation de π.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $T_n = 2\sqrt{3}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k}$.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|T_n - \pi| \leq \dfrac{2\sqrt{3}}{(2n+3)3^{n+1}}$. *On pourra utiliser la question 2c.*

   b) À l'aide de votre calculatrice ou d'un ordinateur, déterminer le plus petit entier naturel N' pour lequel : $\dfrac{2\sqrt{3}}{(2N'+3)3^{N'+1}} \leq 10^{-6}$. Comparer avec $N_{10^{-6}}$.

Exercices facultatifs

Exercice A : formule de Taylor avec reste intégrale

Soient $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$ et $a,b \in I$. Le but de cet exercice est de généraliser l'exercice précédent en démontrant la *formule de Taylor-Lagrange avec reste intégrale* :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n \,\mathrm{d}t.$$

1. Quel nom porte la formule lorsque $n = 0$?
2. a) Montrer que pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$:

$$\int_a^b f^{(k)}(t)\frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}\,\mathrm{d}t - \int_a^b f^{(k+1)}(t)\frac{(b-t)^k}{k!}\,\mathrm{d}t = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k.$$

   b) En sommant, montrer la formule.
3. On suppose maintenant que : $a < b$.
   a) Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\left|\int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}M.$
   b) **Application.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ et $\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$,
   et que pour tout $x \in [0,1]$: $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k.$

Exercice B : formule de Stirling

Le but de cet exercice est de montrer l'*équivalent de Stirling* : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$. Pour ce faire, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \ln\left(\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!\,\mathrm{e}^n}\right)$.

1. a) Simplifier $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   b) Calculer un développement asymptotique de $u_{n+1} - u_n$ à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   c) Montrer que la série $\sum u_{n+1} - u_n$ est convergente.
   d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Notons ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. Montrer que : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\ell}\sqrt{n}.$

On a montré au DM18 la *formule de Wallis* : $\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}.$

3. À l'aide de la formule de Wallis, montrer que : $\mathrm{e}^{\ell} = \sqrt{2\pi}$, et conclure.

Devoir maison n° 26
Séries de Fourier

À rendre le lundi 15 avril 2024.

Les copies dont les résultats ne sont pas encadrés ou celles où il n'y a pas de phrase (dont ponctuation) ne seront pas corrigées.
Vous traiterez **AU CHOIX** un des deux exercices.

Exercice 1 : ATS2016

0. Justifier que les séries $\sum \dfrac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1}$ et $\sum \dfrac{1}{(4p^2-1)^2}$ convergent.

On considère la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, définie sur $]-\pi,\pi]$ par :

$$g(t) = \begin{cases} \cos t & \text{si } t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right], \\ 0 & \text{si } t \in \left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction g entre -3π et 3π.
2. Quelle est la parité de la fonction g ? *Justifiez votre réponse.*
3. La série de Fourier de g est notée :

$$Sg(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\big).$$

   a) Donner les coefficients b_n pour tout entier n strictement positif.

   b) Calculer a_0 et a_1.

   c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$:

$$a_n = \frac{1}{\pi(n+1)} \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + \frac{1}{\pi(n-1)} \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right).$$

   d) En déduire que si n est impair et $n \neq 1$, alors : $a_n = 0$.

   e) En déduire que si $n = 2p$ est un entier pair non nul, alors : $a_{2p} = \dfrac{2(-1)^{p+1}}{\pi(4p^2-1)}$.

4. On s'intéresse maintenant à la convergence de la série de Fourier de g.

   a) A-t-on pour tout $t \in \mathbb{R}$: $g(t) = Sg(t)$? *Justifier précisément votre réponse.*

   b) Montrer que :

$$\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \cos(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1} \cos(2pt).$$

   c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1}$.

5. a) Appliquer l'identité de Parseval à la fonction g.

   b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4p^2-1}\right)^2$.

Exercice 2 : ATS2005

Partie I

Dans cette partie, on fixe $h \in]0, \pi]$. On considère la fonction f, paire et 2π-périodique vérifiant :

$$\forall t \in [0, \pi], \quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2h} & \text{si } t \in [0, h] \\ 0 & \text{si } t \in]h, \pi]. \end{cases}$$

On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\quad S_f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \quad$ la série de Fourier de f.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f et donner sa série de Fourier S_f.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série $S_f(t)$ converge. Que vaut la somme de la série ?
3. Calculer $S_f(0)$. En déduire la valeur de : $\quad A = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(nh)}{n}$.
4. Que vaut $S_f(h)$? En déduire la valeur de : $\quad B = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(2nh)}{n}$.
5. Énoncer la formule de Parseval. En déduire la valeur de : $\quad C = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(nh)^2}{n^2}$.
6. Dans cette question, on prend : $\quad h = \dfrac{\pi}{2}$.
   a) Déduire de A la valeur de : $\quad D = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$.
   b) Déduire de C la valeur de : $\quad E = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2}$, $\quad$ puis la valeur de : $\quad F = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

Partie II

Dans cette partie, on fixe $h \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On considère la fonction g, paire et 2π-périodique vérifiant :

$$\forall t \in [0, \pi], \quad g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2h}\left(1 - \dfrac{t}{2h}\right) & \text{si } t \in [0, 2h] \\ 0 & \text{si } t \in]2h, \pi]. \end{cases}$$

On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\quad S_g(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt) \quad$ la série de Fourier de g.

8. a) Calculer les coefficients de Fourier de g.
   b) Montrer que la série de Fourier de g converge.
   c) Donner sa série de Fourier S_g. $\qquad$ *On exprimera* $1 - \cos(2\theta)$ *à l'aide de* $\sin(\theta)^2$.
9. Trouver, grâce à la formule de Parseval, la valeur de : $\quad G = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(nh)^4}{n^4}$.
10. En prenant : $\quad h = \dfrac{\pi}{2}$, $\quad$ dans la question précédente, calculer la valeur : $\quad H = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^4}$,

    puis celle de : $\quad K = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^4}$.

Devoir maison n° 27
Fonctions de plusieurs variables

À rendre le lundi 15 avril 2024.

Les copies dont les résultats ne sont pas encadrés ou celles où il n'y a pas de phrase (dont ponctuation) ne seront pas corrigées.
Vous traiterez **AU CHOIX** un des deux exercices.

Exercice 1 : FPV sur un ouvert (ATS2018)

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 - 6x - 6y$.

Dans un espace affine euclidien muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la surface S admettant pour équation cartésienne :

$$z = f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 - 6x - 6y.$$

1. Comparer $f(x,y)$ avec $f(y,x)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En déduire un plan de symétrie de la surface S.
2. a) Montrer que la fonction f admet quatre points critiques, dont on précisera les coordonnées.
   b) À l'aide d'un théorème bien choisi, que vous énoncerez et dont vous vérifierez les hypothèses dans ce cas, montrer que : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
3. Dans cette question, on détermine de quels types sont les points critiques.
   a) Calculer pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
   $$r(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), \quad s(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \quad \text{et} \quad t(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$
   b) Évaluer r, s, t et $rt - s^2$ en $(1,1)$, $(-1,-1)$, $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.
   En déduire la nature des points critiques (maximum, minimum ou col) de f.
   Pour cela, recopier et compléter le tableau récapitulatif suivant.

	$(1,1)$	$(-1,-1)$	$(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
r				
s				
t				
$rt - s^2$				
Nature				

4. Dans cette question, on cherche à déterminer les points (x,y) du plan tels que : $f(x,y) = 0$.
   a) Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
   $$f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 - 6x - 6y = (x+y)(x^2 + y^2 + axy + bx + cy - 6).$$
   b) En déduire que l'ensemble de points vérifiant l'équation : $f(x,y) = 0$ est formé d'une droite et d'un cercle. *On donnera une équation de la droite et une équation du cercle, son centre, son rayon, puis les coordonnées de l'intersection de la droite et du cercle.*
   c) Faire sur votre copie une figure donnant dans un repère la droite et le cercle précédents ainsi que les points critiques de f.
   Une figure à main levée aussi claire que possible sera acceptée.

Exercice 2 : FPV sur un fermé borné (ATS2019)

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère le carré $\mathscr{D}$ défini par :

$$\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ |x+y| \leq 2 \quad \text{et} \quad |x-y| \leq 2\right\}.$$

On s'intéresse à la fonction de deux variables $f \colon \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}, \quad f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1) - x.$$

1. On s'intéresse tout d'abord à la nature de l'ensemble $\mathscr{D}$.
   a) Tracer dans le plan $\mathbb{R}^2$ les quatre droites d'équation :
   $$x+y=2, \quad x+y=-2, \quad x-y=2 \quad \text{et} \quad x-y=-2.$$
   Sur la même figure indiquer l'ensemble $\mathscr{D}$.
   b) Montrer que si (x,y) appartient à $\mathscr{D}$, alors $(x,-y)$ appartient encore à $\mathscr{D}$.
   Quelle symétrie possède $\mathscr{D}$?
   c) Montrer que l'ensemble $\mathscr{D}$ possède une symétrie centrale que l'on déterminera.
   d) Répondre sans donner de démonstration aux questions suivantes : l'ensemble $\mathscr{D}$ est-il un ouvert dans $\mathbb{R}^2$? Est-il fermé dans $\mathbb{R}^2$?
2. Montrer que la fonction f est bornée et atteint ses bornes sur l'ensemble $\mathscr{D}$.
3. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'ensemble $\mathscr{O}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par :
   $$\mathscr{O} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ |x+y| < 2 \quad \text{et} \quad |x-y| < 2\right\}.$$
   a) Déterminer le gradient $\overrightarrow{\text{grad}} f(x,y)$ de f en tout point (x,y) de $\mathscr{O}$.
   b) Montrer que $(1,0)$ est l'unique point critique de la fonction f dans $\mathscr{O}$.
   c) Sans calculer les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, montrer qu'elles sont néanmoins égales sur $\mathscr{O}$. *Vous utiliserez un théorème bien choisi, que vous énoncerez et dont vous vérifierez les hypothèses.*
   d) Pour $(x,y) \in \mathscr{O}$, donner une expression des dérivées partielles secondes notées :
   $$r(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), \quad s(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \quad \text{et} \quad t(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$
   e) Donner les valeurs de r, s et t au point $(1,0)$. L'évaluation de la fonction $rt - s^2$ au point $(1,0)$ permet-elle de conclure sur la nature du point critique $(1,0)$?
   f) Rappeler le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $u \mapsto \ln(1+u)$.
   g) Donner le développement limité à l'ordre 3 de $t \mapsto f(1+t,0) - f(1,0)$ au voisinage de 0. Le point critique $(1,0)$ est-il un extremum local de f ?
4. **Question bonus.** Déterminer le minimum et le maximum de f sur $\mathscr{D}$.

Devoir maison n° 28
Séries entières

À rendre le lundi 6 mai 2024.

Les copies dont les résultats ne sont pas encadrés ou celles où il n'y a pas de phrase (dont ponctuation) ne seront pas corrigées.
Vous traiterez **AU CHOIX** un des deux exercices.

Exercice 1 : équation différentielle (ATS2020)

On considère l'équation différentielle (H) : $\quad y''(x)+xy'(x)+y(x)=0 \quad$ d'inconnue $y\in\mathscr{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
On cherche les séries entières $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ solutions de (H) pour lesquelles : $\quad a_1=0$.

1. Montrer que la suite des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+2}=-\frac{a_n}{n+2}.$$
2. Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\quad a_{2n}=\dfrac{(-1)^n}{2^n n!}a_0 \quad$ et $\quad a_{2n+1}=0$.
3. Donner une expression simple de la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en fonction de x et a_0.

Exercice 2 : la fonction d'erreur de Gauss (ATS2015)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\mathrm{e}^{x^2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

0. **Question préliminaire (RAB).** Montrer que f est bien définie, et donner son tableau de signe.
1. Calculer $f(0)$.
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, calculer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$. En déduire la parité de f.
3. Donner la dérivée de la fonction $x\overset{h}{\mapsto}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ définie sur $\mathbb{R}$.
4. a) Calculer la dérivée de la fonction f.
   b) Calculer $f'(0)$.
   c) Calculer $f'(x)-2xf(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
   d) Donner une équation différentielle vérifiée par f.
5. a) Donner le signe de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.

   On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

   b) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
   c) Donner le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

On considère la série entière $\sum\limits_{p\geq 0}\dfrac{2^{2p}p!}{(2p+1)!}x^{2p+1}$. On note g sa somme sur l'intervalle de convergence.

6. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
7. Donner le développement en série entière de la dérivée de g.
8. Montrer que la fonction g vérifie la même équation différentielle que f.
9. En déduire que : $\quad f=g$.

Exercice facultatif : série entière et intégration (ATS2010)

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $\quad I_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} (\sin\theta)^{2k}\,\mathrm{d}\theta \quad$ et $\quad J_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} (\sin\theta)^{2k}(\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$.

1. a) Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   b) Calculer I_0 et I_1.
   c) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\quad I_{k-1} - I_k = J_{k-1}$.
   b) Avec une intégration par parties, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\quad J_{k-1} = \dfrac{1}{2k-1} I_k$.
   c) En déduire la relation de récurrence (R) : $\quad I_k = \dfrac{2k-1}{2k}\, I_{k-1}$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\quad I_k = \dfrac{(2k)!}{4^k (k!)^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\quad u_n = \ln(I_n)$.

4. Démontrer, à partir de la relation de récurrence (R), que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{2k}\right).$$
5. a) On note h la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - x$ sur $]-1, 0]$. Étudier la fonction h. Donner son signe.
   b) Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$: $\quad \ln\left(1 - \dfrac{1}{2k}\right) < \dfrac{-1}{2k} < 0$.
   c) Donner $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, puis $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Pour tous $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ et $\theta \in [0, \pi]$, on pose :
$$S_n(x,\theta) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\,(x\sin\theta)^{2k} \quad \text{et} \quad g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad g_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} S_n(x,\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

On note g la fonction somme de la série entière $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$ sur son domaine de convergence.

7. Donner le rayon de convergence de cette série entière.

On note φ la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\big(x\sin(\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta$ sur $\mathbb{R}$.

8. a) Donner le développement en série entière de la fonction cosinus, ainsi que son rayon de convergence.
   b) En utilisant ce développement dans φ, en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$|\varphi(x) - g_n(x)| \leq R_n(x) I_n,$$
   avec : $\quad R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.
9. a) Donner le développement en série entière de la fonction cosinus hyperbolique (cosh) et donner son rayon de convergence.
   b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad R_n(x) \leq \cosh(x), \quad$ puis que :
$$|\varphi(x) - g_n(x)| \leq \cosh(x) I_n.$$
10. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad g(x) = \varphi(x)$.