CONCOURS ATS
-SESSION 2024-

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

CALCULATRICE INTERDITE

CODE ÉPREUVE : 956

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3H

Exercice 1

On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 3×3 à coefficients réels, et $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes de taille 3×1 à coefficients réels. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

On pose également

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Calculer MX_2.
   (b) En déduire que 1 est valeur propre de M.
2. (a) Déterminer le polynôme caractéristique de M.
   (b) En déduire que M admet deux valeurs propres λ_1 et λ_2, que l'on choisira telles que $\lambda_1 < \lambda_2$. Quels sont les ordres de multiplicité de λ_1 et λ_2 ?
   (c) Justifier que M est trigonalisable.
3. Déterminer une matrice colonne $X_1 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que la famille (X_1) (c'est-à-dire la famille réduire à l'unique élément X_1) soit une base de l'espace propre associée à λ_1. On choisira X_1 de telle sorte que sa première coordonnée soit égale à 1.
4. (a) Calculer la matrice $M - \lambda_2 I$.
   (b) Montrer que $M - \lambda_2 I$ est de rang 2.
   (c) En déduire la dimension de l'espace propre associé à λ_2.
   (d) La matrice M est-elle diagonalisable ?
5. Résoudre l'inconnue suivante d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$(M - I)X = X_2.$$

Dans la suite, on appellera $X_3 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ l'unique matrice colonne vérifiant l'équation précédente et dont la première coordonnée est égale à 1. On appelle $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice dont les trois colonnes sont respectivement X_1, X_2 et X_3.

6. Calculer l'inverse de la matrice P, s'il existe.
7. Montrer que la matrice M s'écrit

$$M = PTP^{-1}, \qquad \text{avec } T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, on a

$$T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On définit les suites de matrices $(A_n)_{n \geqslant 0}$ et $(B_n)_{n \geqslant 0}$ par

$$A_n = \left(-\frac{M}{2}\right)^n \qquad \text{et} \qquad B_n = \left(-\frac{T}{2}\right)^n$$

pour tout entier $n \geqslant 0$.

9. (a) Montrer que la suite $(B_n)_{n\geqslant 0}$ admet une limite B que l'on déterminera.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, la matrice B_n est inversible et en déduire son rang.
   (c) A-t-on $\operatorname{rg} B = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{rg} B_n$?
   (d) Les matrices B_n sont-elles diagonalisables ? La matrice B est-elle diagonalisable ?
10. Montrer que $A_n = PB_nP^{-1}$ pour tout entier $n \geqslant 0$. En déduire la limite (si elle existe) de la suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 2

Les parties A et B de cet exercice sont entièrement indépendantes.

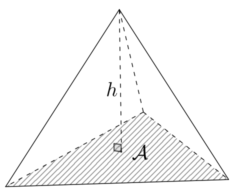
Partie A – Géométrie dans le plan

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $\mathrm{A}(0,0)$, $\mathrm{B}(1,2)$, $\mathrm{C}(4,2)$ et $\mathrm{D}(3,0)$. La droite Δ passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right)$ coupe la droite (BC) en E et la droite (DC) en F.

1. Représenter ces points sur un repère. On donne $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.62\ldots$.
2. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
3. Donner une équation cartésienne des droites (BC) et (DC).
4. Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ.
5. Montrer que tout point de Δ est à égale distance des droites (AB) et (AD). Quel rôle cette droite joue-t-elle pour l'angle $\widehat{\mathrm{DAB}}$?
6. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points E et F. On pourra noter $varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
7. On définit le cercle $\mathscr{C}$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 5x - 3y + 6 = 0$. Déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathscr{C}$. Montrer que le cercle $\mathscr{C}$ est le cercle circonscrit au triangle BCD. C'est-à-dire le cercle qui passe par les points B, C et D.
8. Déterminer les coordonnées du point K, centre du cercle circonscrit au triangle EFC, puis montrer que le point K appartient au cercle $\mathscr{C}$.

Partie B – Géométrie dans l'espace

On rappelle qu'un tétraèdre est un polyèdre de la famille des pyramides composé de quatre faces triangulaires. Un tétraèdre est défini par quatre points non coplanaires formant ses sommets. Le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\frac{\mathcal{A}h}{3}$ où $\mathcal{A}$ est l'aire d'une des faces du tétraèdre et h la distance entre cette même face et le sommet opposé à cette face.



On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points $\mathrm{T}(0,0,0)$, $\mathrm{U}(1,-1,-2)$ et $\mathrm{V}(1,2,1)$

1. Calculer $\overrightarrow{\mathrm{TU}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{UV}}$. Les points T, U et V sont-ils alignés ?
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (TUV).
3. On considère l'ensemble noté $\mathcal{L}$ des points $\mathrm{M}(x,y,z)$ de l'espace vérifiant $\overrightarrow{\mathrm{TM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{UV}} = 0$. Identifier l'ensemble $\mathcal{L}$ et donner en une équation cartésienne.
4. On note désormais $\mathrm{W}(-1,-2,2)$.
   (a) Justifier que les points T, U, V et W ne sont pas coplanaires.
   (b) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point W sur le plan (TUV).
   (c) Calculer la distance du point W au plan (TUV) puis le volume du tétraèdre TUVW.
5. Pour tout réel k on considère la sphère $\mathcal{S}_k$, d'équation cartésienne
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2(k-1)z + \frac{2k^2}{3} - 2k + 2 = 0$$
   (a) Déterminer en fonction du réel k, les coordonnées du centre Ω_k et le rayon R_k de la sphère $\mathcal{S}_k$.
   (b) Montrer que toutes les sphères $\mathcal{S}_k$ sont tangentes au plan (TUV).
   (c) Donner la nature de l'intersection de $\mathcal{S}_4$ avec le plan (TUW) et préciser les éléments caractéristiques de cette intersection.
   (d) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles la sphère $\mathcal{S}_k$ est également tangente au plan (TUW).
   (e) Plus généralement discuter selon les valeurs du réel k de la nature de l'intersection de la sphère $\mathcal{S}_k$ et du plan (TUW).

Exercice 3

On se donne un tableau à une dimension, de longueur n dont les entrées sont indexées de 1 à n et contiennent des entiers naturels. On a ci-dessous un exemple d'un tel tableau, appelé `monTableau`, avec $n = 16$.

indice i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
`monTableau`$[i]$	8	1	3	7	2	3	6	8	19	4	2	0	1	2	1	10

1. Soit la fonction `f` écrite en pseudo-code prenant en entrée un tableau `tab`.

```
fonction f(tab)
    m = tab[1]
    a = 1
    n = longueur de tab
    Pour i allant de 1 à n
        Si tab[i] < m
            m = tab[i]
            a = i
        Fin si
    Fin pour
    Retourner a
Fin fonction
```

Quelle valeur est renvoyée par `f(monTableau)` ? Justifier.

Si `t` est un tableau d'entiers de longueur $n \geqslant 3$, on dit qu'un entier i est la ***position d'un minimum local*** de `t` si

$$2 \leqslant i \leqslant n-1, \qquad \mathtt{t}(i-1) \geqslant \mathtt{t}(i) \quad \text{et} \quad \mathtt{t}(i) \leqslant \mathtt{t}(i+1).$$

Par exemple, les positions des minima locaux de `tab` sont $2, 5, 12$ et 15.

2. Écrire en pseudo-code, en *Python* ou en *Scilab* une fonction `g` prenant en entrée un tableau d'entiers `t` et renvoyant la liste des positions de ses minima locaux. *On supposera que le tableau* `t` *donné en entrée contient au moins trois éléments.*
3. Donner un tableau t de taille 10 tel que `g(t)` renvoie la liste $2, 3, 5, 6, 9$.

Exercice 4

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'intégrale

$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{x/2}\,\mathrm{d}x.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 2.

1. Calculer I_n pour $n = 1$.
   On rappelle que pour deux nombres réels strictement positifs a et b, la puissance a^b est définie à l'aide de l'expression $a^b = \mathrm{e}^{b \ln a}$.
2. En déduire une égalité reliant $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ et $\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)$.
3. Soit $x \in [0\,,n[$ fixé. Donner le développement limité à l'ordre 2 quand n tend vers l'infini de $\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)$.
4. A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout $t \in [0\,,1[$, on a $\ln(1-t) \leqslant -t$.
   En déduire que $I_n \leqslant 2$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
5. De la même manière que précédemment, montrer que pour tout $t \in [0\,,1/2]$,
   on a $-t - t^2 \leqslant \ln(1-t)$.
6. Grâce à cette inégalité, montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel $a \in [0\,,n/2]$,
$$\int_0^a \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{x/2}\,\mathrm{d}x \geqslant 2\mathrm{e}^{-a^2/n}\left(1 - \mathrm{e}^{-a/2}\right).$$
7. En déduire que
$$I_n \geqslant 2\mathrm{e}^{-a^2/n}\left(1 - \mathrm{e}^{-a/2}\right),$$
   puis déterminer une expression de a en fonction de n vérifiant que
   — $a \leqslant n/2$,
   — a^2/n tend vers 0 quand n tend vers l'infini,
   — a tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.
8. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 2.

CONCOURS ATS
-SESSION 2023-

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

CALCULATRICE INTERDITE

CODE ÉPREUVE : 956

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3H

Exercice 1

Les parties A et B de cet exercice sont entièrement indépendantes.

Partie A – Étude d'une matrice

On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. (a) La matrice A est-elle symétrique ?
   (b) La matrice A est-elle inversible ? En déduire une valeur propre de A.
2. (a) Déterminer le polynôme caractéristique de A.
   (b) Montrer que la matrice A admet trois valeurs propres, que l'on notera λ_1, λ_2 et λ_3 et que l'on choisira telles que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Quels sont les ordres de multiplicité de λ_1, λ_2 et λ_3 ?
   (c) En déduire que la matrice A est diagonalisable.
3. (a) Donner une base de l'espace propre de A associé à la valeur propre λ_1.
   (b) Donner une base de l'espace propre de A associé à la valeur propre λ_2.
   (c) Donner une base de l'espace propre de A associé à la valeur propre λ_3.
4. Donner une matrice diagonale D, dont les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible Q, dont les coefficients situés sur la première ligne sont tous des 1, telles que $A = QDQ^{-1}$. *On ne demande pas de calculer* Q^{-1}.
5. Notons v l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base $(X^2, X, 1)$ est A. Donner, pour un triplet (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ et le polynôme $P = aX^2 + bX + c$ de $\mathbb{R}_2[X]$, la valeur du polynôme $v(P)$ en fonction de a, b, c.
6. Montrer que la famille $\mathscr{C} = (X^2 - 2X + 1, X^2 - 1, X^2 + 2X + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
7. Donner la matrice de v dans la base $\mathscr{C}$.

Partie B – Étude d'un endomorphisme

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

1. Rappeler, sans démonstration, la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. (a) On définit l'application f_n sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par
   $$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad f_n(P) = (n-1)XP - (X^2 - 1)P'.$$
   Montrer que f_n est linéaire.
   (b) Calculer $f_n(1)$, $f_n(X^{n-1})$ et pour tout $k \in \{1, \dots, n-2\}$, $f_n(X^k)$.
   (c) En déduire que f_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
3. Dans cette question ***seulement***, on considère le cas $n = 3$. Donner la matrice représentative de f_3 dans la base $(X^2, X, 1)$.
4. On définit les polynômes $P_0, \dots, P_{n-1}$ par
   $$P_k = (X-1)^k (X+1)^{n-1-k} \text{ pour } k \in \{0, \dots, n-1\}.$$
   Justifier que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, le polynôme P_k est vecteur propre de f_n et donner la valeur propre associée.
5. En déduire que f_n est diagonalisable.

Exercice 2

Les parties A et B de cet exercice sont essentiellement indépendantes. Seule la dernière question de la partie B peut éventuellement s'appuyer sur des résultats de la partie A.

Partie A – Deux équations différentielles

Soit $\alpha \geqslant 0$ un paramètre réel positif. On considère les deux équations différentielles suivantes
$$y'' + \alpha y = 0 \qquad (\mathrm{E}_\alpha)$$
$$4ty''(t) + 6y'(t) + \alpha y(t) = 0 \qquad (\mathrm{F}_\alpha)$$

Pour chacune de ces équations différentielles, l'inconnue y est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ à valeurs réelles.

1. (a) Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle (E_0).
   (b) Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle (E_α) lorsque $\alpha > 0$.
2. Soient u, v deux fonctions définies sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$, et vérifiant
   $$\forall t \in]0, +\infty[, \qquad u(t) = tv(t^2).$$
   (a) Donner, en tout point $t > 0$, une expression de $u'(t)$ en fonction de t, $v(t^2)$ et $v'(t^2)$.
   (b) Montrer que pour tout réel $t > 0$, on a $u''(t) = 4t^3 v''(t^2) + 6tv'(t^2)$.
   (c) En déduire que u est solution de (E_α) si et seulement si v est solution de (F_α).
3. (a) Déduire de la question précédente que les solutions de l'équation différentielle (F_0) sont les fonctions de la forme
   $$t \mapsto \frac{C_1}{\sqrt{t}} + C_2,$$
   où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles.
   (b) Donner de même la forme générale des solutions de (F_α) lorsque $\alpha > 0$.

Partie B – Une équation aux dérivées partielles

Dans cette partie, on note $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. On considère une fonction $v\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, puis on définit la fonction $f\colon U \to \mathbb{R}$ par
$$\forall (x, y, z) \in U, \qquad f(x, y, z) = v(x^2 + y^2 + z^2).$$

1. Répondre sans donner de démonstration aux questions suivantes : l'ensemble U est-il ouvert dans $\mathbb{R}^3$? Est-il fermé dans $\mathbb{R}^3$?
2. (a) Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$.
   (b) Donner, en tout point $(x, y, z) \in U$, une expression de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$ en fonction de x, y, z et de la fonction v'.
   (c) Montrer que
   $$\forall (x, y, z) \in U, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = 4x^2 v''(x^2 + y^2 + z^2) + 2v'(x^2 + y^2 + z^2).$$
   Donner de même une expression de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z)$.

(d) En déduire, pour tout $(x,y,z) \in U$, une expression de $\Delta f(x,y,z)$, où

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

désigne le laplacien de f.

3. Soit $\alpha \geqslant 0$. Montrer que f vérifie $\Delta f + \alpha f = 0$ sur U si et seulement si v est solution de l'équation (F_α) sur $]0\,,+\infty[$, que l'on rappelle ici

$$4ty''(t) + 6y'(t) + \alpha y(t) = 0 \qquad (\mathrm{F}_\alpha)$$

4. Donner un exemple de fonction $g\colon U \to \mathbb{R}$ qui soit de classe $\mathscr{C}^2$, qui vérifie $\Delta g = 0$ sur U, et qui ne soit pas une fonction affine. *Indication : on pourra utiliser la question 3(a) de la partie A.*

Exercice 3

On considère la fonction 2π-périodique $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux définie sur $[-\pi\,,\pi[$ par $f(-\pi) = 0$ et

$$\forall t \in\,]-\pi\,,\pi[, \qquad f(t) = t\cos t.$$

1. Étudier la parité de la fonction f.
2. On note

$$Sf(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$$

la série de Fourier de la fonction f.

(a) Calculer les coefficients a_n, pour $n \geqslant 0$.

(b) Calculer le coefficient b_1. *On rappelle que* $\sin(2t) = 2\sin t \cos t$ *pour tout réel* t.

(c) Calculer les coefficients b_n pour tout entier $n \geqslant 2$. *On rappelle que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \qquad \cos(x)\sin(y) = \frac{\sin(x+y) + \sin(y-x)}{2}.$$

3. (a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(t) = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}(f(t+h) + f(t-h))$.

(b) Montrer que la série de Fourier Sf converge vers f. Énoncer le théorème utilisé.

4. (a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a

$$b_n^2 = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}.$$

(b) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}\right)$ est convergente de somme

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{2}.$$

(c) En déduire que $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n^2 = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{4}$.

5. (a) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi f(t)^2\,\mathrm{d}t$. *On rappelle que* $\cos(t)^2 = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$ *pour tout réel* t.

(b) En appliquant le théorème de Parseval à la fonction f, trouver la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 4

1. Écrire une fonction `calculSomme`, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un entier naturel n non nul, et renvoie la valeur $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$.
2. On admet que

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{6}\right| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Écrire une fonction `approx`, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un réel `eps` strictement positif, et renvoie une approximation de $\pi^2/6$ à `eps` près.

Exercice 5

Dans cet exercice, on note ω le nombre complexe $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$. On pourra remarquer que $\omega^3 = 1$. On définit la fonction $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ par

$$\forall (z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{C}^3, \qquad f(z_1,z_2,z_3) = z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3.$$

Partie A – Analyse complexe

1. (a) Développer le produit $(1-\omega)(1+\omega+\omega^2)$ et en déduire que $f(1,1,1) = 0$.

(b) Calculer $f(1,\omega,\omega^2)$ et $f(1,\omega^2,\omega)$.

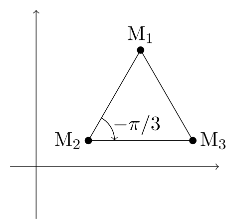
2. (a) Donner le module et un argument du nombre complexe $-\omega$.

(b) Donner le module du nombre complexe $1-\omega$.

3. Dans cette question, on considère les ensembles de départ et d'arrivée $\mathbb{C}^3$ et $\mathbb{C}$ de la fonction f comme des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$. La fonction f est-elle linéaire ?

Partie B – Triangles équilatéraux

On munit le plan usuel d'un repère orthonormé direct et on identifie les points du plan à leur affixe complexe. Étant donnés trois points M_1, M_2 et M_3 deux à deux distincts, on dit que le triangle $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3$ est ***équilatéral direct*** lorsque $\mathrm{M}_2\mathrm{M}_1 = \mathrm{M}_2\mathrm{M}_3$ et la mesure de l'angle orienté $\widehat{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3}$ vaut $-\pi/3$. La figure suivante montre un exemple de triangle équilatéral direct.



Soient M_1, M_2 et M_3 trois points deux à deux distincts, dont on note z_1, z_2 et z_3 les affixes respectives.

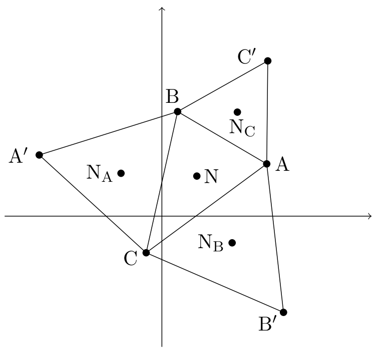
1. Montrer que $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3$ est équilatéral direct si et seulement si $\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = -\omega$.
2. En déduire que le triangle $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3$ est équilatéral direct si et seulement si $f(z_1,z_2,z_3) = 0$.

Partie C – Un résultat géométrique

On donne la définition suivante : étant donné un triangle quelconque $M_1M_2M_3$ du plan complexe, dont les sommets M_1, M_2 et M_3 ont pour affixes z_1, z_2 et z_3, on appelle ***centre de gravité*** de $M_1M_2M_3$ le point d'affixe

$$\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

Pour la suite du problème, on place dans la configuration suivante. On fixe trois points A, B et C deux à deux distincts du plan complexe. On construit les points A′, B′ et C′ tels que les triangles A′CB, B′AC et C′BA sont équilatéraux directs. On appelle $\mathrm{N}, \mathrm{N_A}, \mathrm{N_B}, \mathrm{N_C}$ les centres de gravité des triangles ABC, A′CB, B′AC et C′BA. On notera $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', z_{\mathrm{N}}, z_{\mathrm{N_A}}, z_{\mathrm{N_B}}$ et $z_{\mathrm{N_C}}$ les affixes respectives des points $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}', \mathrm{N}, \mathrm{N_A}, \mathrm{N_B}$ et $\mathrm{N_C}$.



1. Exprimer α', β' et γ' en fonction α, β, γ et ω.
2. On pose $\delta = \alpha + \omega\gamma + \omega^2\beta$.
   (a) Montrer que $z_{\mathrm{N_B}} - z_{\mathrm{N}} = -\dfrac{\omega\delta}{3}$.
   (b) Exprimer de même $z_{\mathrm{N_C}} - z_{\mathrm{N}}$ et $z_{\mathrm{N_A}} - z_{\mathrm{N}}$ en fonction de ω et δ.
3. En déduire que le triangle $\mathrm{N_A N_B N_C}$ est équilatéral direct.
4. Exprimer la longueur $\mathrm{N_A N_B}$ en fonction de $|\delta|$.

CONCOURS ATS
-SESSION 2022-

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

<u>CALCULATRICE INTERDITE</u>

CODE ÉPREUVE: 956

DURÉE DE L'ÉPREUVE: 3H

Exercice 1

On note $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 3×3 à coefficients réels. On considère les éléments suivants de E :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A Réduction

1. Donner le polynôme caractéristique de la matrice A.
2. Justifier que A possède une unique valeur propre et donner son ordre de multiplicité.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle trigonalisable?

On considère dans la suite de cette partie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique notée $\mathcal{B} = (e_l, e_2, e_3)$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{cases} f(e_1) = 2e_1 - e_2 + e_3 \\ f(e_2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3 \\ f(e_3) = e_1 - e_2 + 2e_3 \end{cases}$$

4. Déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$.
5. Calculer le rang de la matrice A. L'endomorphisme f est-il surjectif ?
6. L'endomorphisme f est-il injectif ? Est-il bijectif ?
7. On pose $e'_1 = (1, 0, -1)$ et $e'_2 = (1, -1, 1)$. Montrer que la famille (e'_1, e'_2) forme une base de l'espace vectoriel $F = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = u\}$.
8. (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Partie B Étude d'une suite de matrices

1. Montrer que $A^2 = 2A - I$.
2. Montrer que la matrice A est inversible et que $A^{-1} = 2I - A$.
3. Soient $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ des nombres réels vérifiant $\alpha I + \beta A = \alpha' I + \beta' A$. Montrer que $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$.

On définit la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E par la condition initiale $X_0 = A$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_{n+1} = \frac{X_n^2}{n+1} + 2I - A$$

4. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique couple (α_n, β_n) de réels tel que
$$X_n = \alpha_n I + \beta_n A,$$
et que ce couple vérifie la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} \alpha_{n+1} & = & \dfrac{\alpha_n^2 - \beta_n^2}{n+1} + 2 \\ \beta_{n+1} & = & \dfrac{2\beta_n(\alpha_n + \beta_n)}{n+1} - 1 \end{cases}$$
5. Déterminer $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3$, et β_3,
6. Au vu du résultat de la question précédente, conjecturer une expression de α_n et β_n pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, puis montrer cette conjecture. En déduire l'expression de X_n, en fonction de n.

Exercice 2

On considère la fonction $2\pi-$périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \texttt{si} \quad x \in [-\pi, 0] \\ x & \texttt{si} \quad x \in [0, \pi[\end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi[$.

   On note
   $$Sf(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$
   la série de Fourier de la fonction f.
2. (a) Calculer le coefficient a_0.
   (b) Calculer les coefficients a_n , pour tout entier naturel non nul n.
   (c) Calculer les coefficients b_n, pour tout entier naturel non nul n.
   (d) Montrer que la série de Fourier de f est convergente. Énoncer le théorème utilisé et préciser la fonction vers laquelle elle converge.
3. En évaluant la série de Fourier de f en un point particulier, montrer que $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
5. (a) Énoncer le théorème de Parseval.
   (b) Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$

Exercice 3

On rappelle que la fonction tangente, notée tan, réalise une bijection strictement croissante de $]-\pi/2, \pi/2[$ vers $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque, notée arctan, est donc une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $]-\pi/2, \pi/2[$. Elle est de plus impaire, dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante. La première question de la partie C nécessite le résultat de la question 2 de la partie B. Les questions 2 à 8 de la partie C peuvent être traitées de manière indépendante des parties A et B.

Partie A Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{x(1+x^2)} \tag{E}$$

d'inconnue une fonction réelle y définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On note (H) l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 0 \tag{H}$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène (H) sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer une fonction λ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que la fonction $x \mapsto \dfrac{\lambda(x)}{x}$ soit solution particulière de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie B Étude d'une fonction

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$$

1. (a) Donner le développement limité de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.

   (b) En déduire le développement limité de arctan au voisinage de 0 à l'ordre 3, puis celui de la fonction f au voisinage de 0 à l'ordre 2.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Préciser par quelle valeur elle peut être prolongée.

Dans la suite on continuera à noter f la fonction ainsi prolongée de sorte que f est désormais définie sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que la fonction f est dérivable en 0. Préciser $f'(0)$ et la position du graphe de la fonction f par rapport à sa tangente au voisinage de 0.
4. Étudier les variations de la fonction $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $p(x) = x - (1+x^2)\arctan(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donner le signe de $p(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. Démontrer que pour tout réel x de $\mathbb{R}^*$, on a $f'(x) = \dfrac{p(x)}{x^2(1+x^2)}$ puis prouver que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
6. Dresser le tableau de variation de la fonction f. On y fera apparaitre ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

Partie C Calcul approché d'une intégrale

Dans cette partie on étudie l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t} \mathrm{d}t$$

dont on cherche à donner une approximation. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on définit

$$r_n = \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2} \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)^2}$$

1. Pourquoi l'intégrale I est-elle bien définie ? *Indication : on pourra utiliser le résultat de la question 2 de la partie B.*
2. Établir pour tout réel $x \in [0, 1]$ la majoration

$$|r(x)| \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

3. Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel t de $[0, 1]$, on a

$$1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} = \frac{1-(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}.$$

   En déduire pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel x de $[0, 1]$ l'égalité suivante :

$$x s_n'(x) = \arctan(x) - r_n(x).$$

4. Écrire le nombre $s_n(1) - I$ à l'aide d'une intégrale puis montrer que

$$|s_n(1) - I| \leq \int_0^1 \left| \frac{r_n(t)}{t} \right| \mathrm{d}t \leq \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

   En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n(1)$.
5. Déterminer un entier naturel $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $s_N(1)$ soit une valeur approchée de I à 10^{-4} près.

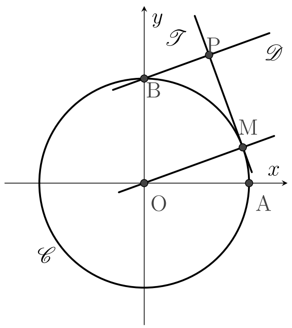
6. Écrire une fonction nommée `s`, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un entier naturel non nul n et renvoie le nombre $s_n(1)$.

7. Écrire une fonction nommée `trouve_N`, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un réel strictement positif ε et renvoie le plus petit entier N tel que $\dfrac{1}{(2N+1)^2} \leq \varepsilon$.

8. En utilisant les fonctions s et `trouve_N`, écrire en *Scilab* ou bien en pseudo-code les instructions calculant et affichant une valeur approchée de l'intégrale I à 10^{-10} près.

Exercice 4

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1. Les points A$(1,0)$ et B$(0,1)$ appartiennent au cercle $\mathscr{C}$. Soit θ un réel appartenant à $[0, 2\pi[$. On considère le point M$(\cos\theta, \sin\theta)$ de $\mathscr{C}$.



1. Donner une équation cartésienne de la tangente $\mathscr{T}$ en M au cercle $\mathscr{C}$.

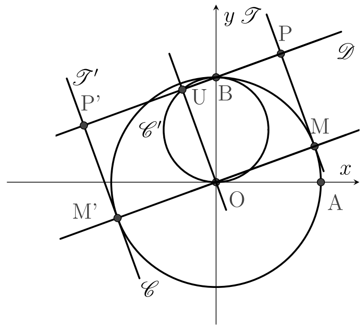
2. Donner une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant par B et parallèle à (OM).

3. Déterminer, en fonction du paramètre réel θ, tous les couples de réels (x, y) qui vérifient le système

$$\begin{cases} x\cos\theta + y\sin\theta &= 1 \\ -x\sin\theta + y\cos\theta &= \cos\theta \end{cases}$$

4. En déduire les coordonnées du point P, intersection de la droite $\mathscr{T}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

   On appelle la courbe $\mathscr{K}$ décrite par le point P lorsque θ parcourt $[0, 2\pi[$. Sur cette même figure, on ajoute le cercle $\mathscr{C}'$ de diamètre [OB], le point M', autre intersection de la droite (OM) et du cercle $\mathscr{C}$, et la tangente $\mathscr{T}'$ au cercle $\mathscr{C}$ en M'. La droite (BP) coupe la tangente $\mathscr{T}'$ en P' et le cercle $\mathscr{C}$ en U (voir la figure ci-dessous).



5. Montrer que les droites $\mathscr{T}$, (OU) et $\mathscr{T}'$ sont parallèles.

6. Montrer que UP=UP'=1.

7. Montrer le point P' appartient à la courbe $\mathscr{K}$. Si θ est le paramètre associé à P, quel est le paramètre correspondant pour P' ?

8. Déduire de ce qui précède une nouvelle construction des points de la courbe $\mathscr{K}$ n'utilisant que le cercle $\mathscr{C}'$ et le point B.

CONCOURS ATS
-SESSION 2021-

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

<u>CALCULATRICE INTERDITE</u>

CODE ÉPREUVE : 956

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3H

Exercice 1

On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille 3×3 à coefficients réels, et $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes de taille 3×1 à coefficients réels. Pour tous réels a et b, on définit la matrice

$$P(a,b)=\begin{pmatrix} a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{pmatrix}.$$

On définit par ailleurs l'ensemble de matrices suivant :

$$F=\left\{P(a,b) : (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

On pose enfin

$$I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A – Étude de l'ensemble F et de la matrice N

1. Démontrer que les matrices I_3 et N appartiennent à l'ensemble F.
2. Montrer que l'ensemble F forme un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que (I_3,N) est une base de F.
3. Donner deux réels a et b tels que $N^2=aI_3+bN$. Quelles sont les coordonnées de N^2 dans la base (I_3,N) ?
4. (a) Montrer que N est inversible, que son inverse N^{-1} appartient à l'ensemble F et donner les coordonnées de N^{-1} dans la base (I_3,N) de F. *Indication : on pourra utiliser la question précédente.*

   (b) Le réel 0 est-il valeur propre de N ?
5. Justifier que N est diagonalisable. *Cette question n'exige aucun calcul.*
6. (a) Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice N.

   (b) Montrer que N admet deux valeurs propres, que l'on notera λ_1 et λ_2 et que l'on choisira telles que $\lambda_1<\lambda_2$. Quels sont les ordres de multiplicité de λ_1 et λ_2 ?

   (c) En déduire une matrice $D\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telle qu'il existe une matrice $P\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible vérifiant $N=PDP^{-1}$. *On ne cherchera à calculer ni la matrice P, ni son inverse P^{-1}.*
7. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe deux réels a_n et b_n tels que $N^n=P(a_n,b_n)$ et que ces réels vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \begin{pmatrix} a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n\\ b_n\end{pmatrix}.$$

On notera dans la suite de l'exercice $A=\begin{pmatrix} 0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

8. Déterminer une matrice diagonale B dont les termes diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible Q de taille 2×2 dont la deuxième ligne est $(1,1)$, telles que $A = QBQ^{-1}$.
9. En déduire, pour tout entier naturel $n\in\mathbb{N}$, une expression de A^n.
10. En déduire, pour tout entier naturel $n\in\mathbb{N}$, une expression de N^n.

Partie B – Inversibilité des matrices de F

1. Soient b un réel et (x,y) un couple de réels. Montrer que

$$P(1,b)P(x,y) = P(x+2by, bx+y+by) = P(x,y)P(1,b).$$

On dit qu'une matrice $M\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ admet un inverse dans F si M est inversible et $M^{-1}\in F$.

2. Déduire de la question précédente que pour tout réel b, la matrice $P(1,b)$ admet un inverse dans F si et seulement si le système

$$\begin{cases} x = 1-2by \\ (1+b-2b^2)y = -b \end{cases}$$

admet une solution (x,y).
3. Montrer que la matrice $P(1,b)$ admet un inverse dans F si et seulement si $b\in\mathbb{R}\setminus\{1,-1/2\}$.
4. Quelles sont les valeurs de b pour lesquelles la matrice $P(1,b)$ est inversible ?
5. Soit a un réel ***non nul***. Justifier que pour tout réel b, on a $P(a,b) = aP(1,b/a)$ et en déduire les valeurs de b pour lesquelles la matrice $P(a,b)$ est inversible.
6. Donner les valeurs de b pour lesquelles la matrice $P(0,b)$ est inversible. *Indication : on pourra utiliser le fait, prouvé en partie A, que la matrice N est inversible.*
7. Conclure en donnant l'ensemble des matrices de F qui ne sont pas inversibles.

Exercice 2

Soit la fonction $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x) = |\cos x| - |\sin x|$.

1. (a) Montrer que f est périodique de période π.
   (b) Donner la parité de f.
2. Trouver la plus grande valeur de $a>0$ pour laquelle l'égalité $f(x) = \cos x - \sin x$ est valable pour tout $x\in[0,a]$.
3. Calculer une constante C telle que

$$\cos(x) - \sin(x) = C\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

pour tout réel x. On utilisera cette écriture dans la suite.
4. En déduire la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$.
5. (a) Montrer que la série de Fourier Sf de la fonction f peut s'écrire sous la forme

$$Sf(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(2nx).$$

   (b) Étudier la convergence de la série de Fourier de la fonction f sur $\mathbb{R}$, en précisant le théorème utilisé et son énoncé.
6. (a) Donner, pour tout entier $n\geqslant 1$, une expression de a_n en fonction de n, en détaillant les calculs. *Indication : on pourra utiliser le fait que pour tous réels a et b, on a*

$$\cos a\cos b = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}.$$

   (b) Montrer que pour tout entier naturel pair n, on a $a_n = 0$.
   (c) Montrer que pour tout entier naturel p, on a $a_{2p+1} = \dfrac{8}{\pi(4(2p+1)^2-1)}$.
7. En exprimant de deux manières $f(0)$, calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{4(2p+1)^2-1}$.
8. (a) Énoncer le théorème de Parseval.
   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(4(2p+1)^2-1)^2}$.

Exercice 3

Soit ω un paramètre réel positif. On considère l'équation différentielle suivante

$$xy''(x) + y'(x) + \omega^2 xy(x) = 0, \qquad (H_\omega)$$

d'inconnue une fonction réelle y définie et deux fois dérivable sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. ***Les parties A, B et C de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.***

Partie A – Étude du cas $\omega = 0$

1. Montrer que si y est une solution de (H_0) sur $]0,\infty[$, alors $z = y'$ est solution de l'équation différentielle

$$z'(x) + \frac{z(x)}{x} = 0 \qquad (E)$$

sur $]0,\infty[$.
2. (a) Résoudre l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $]0,\infty[$.
   (b) En déduire les solutions de (H_0) sur $]0,\infty[$.
3. Résoudre l'équation différentielle (H_0) sur l'intervalle $]-\infty,0[$.
4. Quelles sont les solutions de (H_0) sur $\mathbb{R}$?

Partie B – Étude du cas $\omega > 0$

Dans toute cette partie, on suppose $\omega > 0$.

1. Montrer qu'une solution y de (H_ω) définie sur $\mathbb{R}$ vérifie $y'(0) = 0$.

On cherche à présent les séries entières $y(x) = \sum a_n x^n$ solutions de (H_ω) sur l'intervalle $]-R,R[$, où $R>0$ désigne le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

2. Que vaut a_1 ?

3. (a) Montrer que la suite de coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+2} = -\frac{\omega^2 a_n}{(n+2)^2}.$$

   (b) En déduire la valeur de a_{2n+1}, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{2^{2n} n!^2} a_0.$$

4. (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{n\to\infty} a_{2n}x^{2n} = 0$.

   (b) En déduire le rayon de convergence R de la série $\sum a_n x^n$.

Partie C – Calcul approché

On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!^2}.$$

Pour tout réel a, l'unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p - 1 < a \leqslant p$ est appelé la ***partie entière supérieure*** de a, et on le note $\lceil a \rceil$. De manière équivalente, $\lceil a \rceil$ est le plus petit entier qui soit supérieur ou égal à a.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On note $n_x = \lceil |x| - 1 \rceil$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=n_x}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!^2}$ vérifie la règle spéciale des séries alternées.

Dans la suite, on admet que le résultat de la question précédente implique que

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!^2} \right| \leqslant \frac{x^{2(N+1)}}{(N+1)!^2}$$

pour tout entier $N \geqslant n_x$.

2. La fonction `fapprox` ci-dessous prend en entrée un réel x non nul, un réel strictement positif ε, et renvoie une approximation de $f(x)$ à ε près, c'est-à-dire un réel y tel que $|f(x) - y| \leqslant \varepsilon$. Recopier la fonction `fapprox` (en version *Scilab* ou bien pseudo-code) et la compléter.
   Note : les fonctions « valeur absolue » et « partie entière supérieure » s'écrivent respectivement `abs` *et* `ceil` *en Scilab.*

```
function y = fapprox(x, eps)
  nx = ceil(abs(x) - 1)
  y = 0
  t = ...
  n = ...
  while ... | ...
    y = y + t
    n = n + 1
    t = -t * x^2 / n^2
  end
end
```

fonction FAPPROX(x, ε)
  $n_x \leftarrow \lceil |x| - 1 \rceil$
  $y \leftarrow 0$
  $t \leftarrow$ ...
  $n \leftarrow$ ...
  tant que ... **ou** ...
    $y \leftarrow y + t$
    $n \leftarrow n + 1$
    $t \leftarrow -tx^2/n^2$
  fin tant que
  renvoyer y
fin fonction

Exercice 4

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \vec{u}; \vec{v})$. On définit l'application $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f(z) = 2z - z^2.$$

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A – Construction géométrique

Dans cette partie, on fixe un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ de module $|z| = 1$, tel que $z \neq 1$. On introduit le point M d'affixe z, le point M_1 d'affixe $z_1 = z^2$, le point M_2 d'affixe $z_2 = 2z$ et le point N d'affixe $f(z)$.

1. Montrer que le quadrilatère $\mathrm{OM}_1\mathrm{M}_2\mathrm{N}$ est un parallélogramme.
2. Donner le module de z_1 et exprimer l'argument de z_1 en fonction de celui de z.
3. Déduire des questions précédentes une construction géométrique simple du point N.

Partie B – Tracé d'une courbe paramétrée

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{M}(t)$ le point d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ et $\mathrm{N}(t)$ le point d'affixe $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$. On note $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées cartésiennes du point $\mathrm{N}(t)$.

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$$

Le reste de cette partie se consacre à l'étude de la courbe paramétrée donnée par les fonctions x et y.

2. (a) Montrer que les fonctions x et y sont 2π-périodiques.

   (b) Pour tout réel $t \in \mathbb{R}$, montrer que le point $\mathrm{N}(-t)$ se déduit du point $\mathrm{N}(t)$ par une symétrie que l'on précisera.

   (c) Déduire des questions 2(a) et 2(b) un intervalle I de longueur minimale et de la forme $[0\,,\alpha]$ avec $\alpha > 0$ pour l'étude de la courbe paramétrée.

3. (a) Montrer que les fonctions x et y sont dérivables et déterminer les expressions de $x'(t)$ et $y'(t)$ pour tout $t \in [0\,,\pi]$, puis étudier leur signe. *On rappelle les formules trigonométriques suivantes :*

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

   (b) Dresser le tableau de variation conjoint des fonctions x et y sur l'intervalle $[0\,,\pi]$. On y fera apparaître les valeurs de $x(t)$, $x'(t)$, $y(t)$ et $y'(t)$ pour $t \in \{0, \pi/3, 2\pi/3, \pi\}$.

4. Montrer que pour tout réel $t \in \,]0\,,\pi]$, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M}(t)\mathrm{N}(t)}$ est orthogonal à la tangente à la courbe paramétrée en $\mathrm{N}(t)$.
5. Tracer la courbe paramétrée. On fera apparaître en particulier les points $\mathrm{N}(t)$ pour $t \in \{\pi/3, \pi/2, 2\pi/3, \pi\}$ ainsi que les tangentes en ces points.
6. Calculer la longueur de la courbe paramétrée, donnée par la formule

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

CONCOURS ATS
-SESSION 2020-

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

CALCULATRICE INTERDITE

CODE ÉPREUVE : 956

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3H

Exercice 1

On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 3×3 à coefficients réels, et $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes de taille 3×1 à coefficients réels. On définit, pour tout réel $a \in \mathbb{R}$, la matrice A_a par

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose également $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier sans calcul que A_1 est diagonalisable.
2. Soit a un réel. Calculer A_aU_1. En déduire que 2 est valeur propre de A_a.
3. Soit a un réel. Déterminer le polynôme caractéristique de A_a.
4. Donner, en discutant selon les valeurs du réel a, les valeurs propres réelles de A_a et leurs ordres de multiplicité. On recopiera et on complétera le tableau synthétique suivant.

Cas	**Valeurs propres réelles de A_a et ordres de multiplicité**
$a < 0$	
$a = 0$	
$a > 0$ et $a \neq 4$	
$a = 4$	

5. (a) Justifier que si $a > 0$ et $a \neq 4$, alors A_a est diagonalisable.

   (b) Déterminer une base du noyau de A_0. La matrice A_0 est-elle diagonalisable ? Est-elle trigonalisable ?
6. Étude de la matrice A_4.

   (a) Déterminer une matrice colonne $U_2 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que (U_1, U_2) soit une base de l'espace propre de A_4 associé à la valeur propre 2.

   (b) Déterminer une matrice colonne $U_3 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que (U_3) soit une base de l'espace propre de A_4 associé à la valeur propre -2.

   (c) Calculer la matrice inverse de $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

   (d) Trouver une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A_4 = PDP^{-1}$.

On définit trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$, $v_0 = -1$, $w_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 4w_n \\ v_{n+1} = 4v_n \\ w_{n+1} = u_n + 2w_n \end{cases}$$

On pose, pour tout entier naturel n, la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

8. (a) Déterminer une matrice $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_{n+1} = BX_n$.
   (b) Déterminer deux nombres réels a et b tels que $B = A_a + bI_3$.
   (c) En déduire que X_0 est un vecteur propre de la matrice B associé à une valeur propre que l'on précisera.
   (d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de X_n.

Exercice 2

On considère la fonction $f\colon \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}, \quad f(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

On rappelle que $\mathrm{i}\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 0\}$ désigne l'ensemble des nombres imaginaires purs, et $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.
Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A – Lieux de points

Les trois questions de cette partie peuvent être traitées de manière indépendante.

1. Soient les nombres complexes $a = 1$, $b = -3$ et $c = \dfrac{-3 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{3}$. Calculer $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ et montrer que les points A, B et C d'affixes respectives $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ forment un triangle équilatéral.
2. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in \mathbb{U}$.
3. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = \sqrt{2}$.

Partie B – Étude d'une suite récurrente

1. (a) Montrer que l'équation $f(z) = 1$ n'a pas de solution, puis que pour tout nombre complexe $\omega \neq 1$, l'équation $f(z) = \omega$ admet une unique solution que l'on exprimera en fonction de ω.
   (b) La fonction f est-elle injective ? Surjective ?
   (c) Montrer que pour tout nombre complexe z de $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$, on a $f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

2. (a) Résoudre l'équation $f(z) = z$.
   (b) Que dire de la suite (u_n) si $u_0 \in \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$?
   (c) Montrer que si $u_0 \notin \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$.

On suppose maintenant que $u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1, -\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$ et on introduit la suite (v_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n - \mathrm{i}}{u_n + \mathrm{i}}.$$

D'après la question précédente, la suite (v_n) et bien définie puisque $u_0 \neq -\mathrm{i}$ et donc pour tout entier naturel n, on a $u_n \neq -\mathrm{i}$.

3. (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\mathrm{i}$.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est périodique de période 4 et que ses termes sont les affixes d'un carré.
   (c) Montrer que la suite (u_n) est également périodique de période 4.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle

$$y''(x) + m\,x\,y'(x) + y(x) = x^2 \qquad (E_m)$$

d'inconnue une fonction réelle y définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, où m est un paramètre réel. On note (H_m) l'équation homogène associée à (E_m) :

$$y''(x) + m\,x\,y'(x) + y(x) = 0. \qquad (H_m)$$

Les parties A, B, C et D de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A – Étude du cas $m = 0$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène (H_0).
2. Trouver une solution particulière de l'équation différentielle (E_0) définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $y(x) = x^2 + \alpha x + \beta$, où α et β sont des réels à déterminer.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E_0).
4. Donner l'unique solution $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (E_0) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Partie B – Étude du cas $m = 1$

Dans les trois premières questions de cette partie, on cherche les séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ qui sont solutions de l'équation différentielle homogène (H_1) et pour lesquelles $a_1 = 0$.

1. Montrer que la suite des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}.$$
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{2^n n!} a_0$ et $a_{2n+1} = 0$.
3. Donner une expression simple de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en fonction de x et a_0.

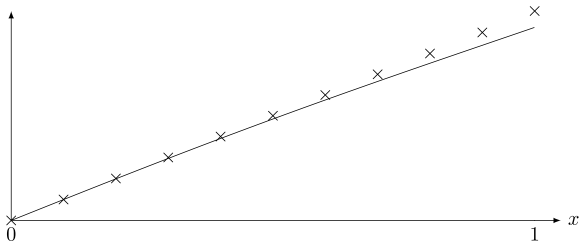
Partie C – Résolution approchée d'un problème de Cauchy

Soit N un entier naturel non nul. Dans cette partie, on cherche à résoudre l'équation (E_0), avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ par la méthode d'Euler, en prenant un pas égal à $1/N$. On admet que cela revient à calculer les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1/N$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N^2(u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n) + u_n = \frac{n^2}{N^2}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+2} en fonction de N, n, u_n et u_{n+1}.
2. Écrire une fonction `cauchy`, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un entier naturel non nul N et renvoie le vecteur `[`$u_0, u_1, \ldots, u_N$`]`.

Sur la figure suivante, on représente le graphe de la solution théorique du problème de Cauchy sur l'intervalle $[0\,,1]$, ainsi que les points de coordonnées $(k/N, u_k)$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$ (ici, on a choisi $N = 10$).



3. Comment agir sur le paramètre N pour améliorer la solution approchée ? Quel est l'impact sur le temps de calcul ?

Partie D – Existence d'une solution polynomiale non nulle

L'objectif de cette partie est de trouver les valeurs de m pour lesquelles l'équation différentielle homogène (H_m) admet au moins une solution polynomiale non nulle.

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. On suppose, dans cette question, qu'il existe un polynôme P non nul de degré d solution de (H_m). Montrer que $d \neq 0$ et que $m = -1/d$.

Dans les questions qui suivent, nous allons étudier le résultat réciproque. On fixe un entier naturel non nul $d \in \mathbb{N}^*$ et on souhaite montrer que $(H_{-1/d})$ admet une solution polynomiale non nulle.
On note $\mathbb{R}_d[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur à d, et on considère l'application $h\colon \mathbb{R}_d[X] \to \mathbb{R}_d[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_d[X], \quad h(P) = P'' - \frac{1}{d} X P' + P.$$

2. (a) Donner sans justification la dimension de $\mathbb{R}_d[X]$.
   (b) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_d[X]$, on a $\deg h(P) \leqslant d - 1$.
   (c) Montrer que h est un endomorphisme de $\mathbb{R}_d[X]$.
3. Montrer que l'application linéaire h n'est pas surjective.
4. En déduire l'existence d'une solution polynomiale non nulle de l'équation différentielle homogène $(H_{-1/d})$.

Exercice 4

On rappelle que la ***partie entière*** d'un nombre réel x, notée $\lfloor x \rfloor$, est l'unique entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n \leqslant x < n + 1.$$

On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ pour tout réel $x \in \mathbb{R}$.

1. (a) Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\lfloor x + 1 \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$.
   (b) Montrer que la fonction f est périodique de période 1.
   (c) Exprimer $f(x)$ pour $x \in [0\,,1[$ et préciser la valeur de $f(1)$.
   (d) Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2\,,2]$.
   (e) La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier.

On note

$$Sf(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x))$$

la série de Fourier de la fonction f.

2. (a) Calculer le coefficient a_0.
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $a_n = 0$.
   (c) Calculer les coefficients b_n.
   (d) Montrer que la série de Fourier de f est convergente. Énoncer le théorème utilisé et préciser la fonction vers laquelle elle converge.
3. (a) Justifier la convergence de la série numérique $U = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.
   (b) Trouver une relation entre U et $Sf(1/4)$.
   (c) Montrer que $U = \pi/4$.
4. (a) Énoncer le théorème de Parseval.
   (b) Calculer la somme $V = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

CONCOURS ATS
-SESSION 2019-

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

CALCULATRICE INTERDITE

CODE ÉPREUVE : 956

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3H

Exercice 1

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de sa base orthonormée canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On note $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire identité. On se donne l'application linéaire $s\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vérifiant

$$\begin{cases} s(e_1) = e_3 \\ s(e_2) = e_4 \\ s(e_3) = e_1 \\ s(e_4) = e_2 \end{cases}$$

et l'application linéaire p définie par $p = \dfrac{1}{2}(\mathrm{id} - s)$. L'objectif de cet exercice est de diagonaliser les applications linéaires s et p.

1. L'objectif de cette question est d'étudier s.
   (a) Donner la matrice S de s dans la base $\mathscr{B}$.
   (b) Montrer que S est diagonalisable (cette question n'exige aucun calcul).
   (c) Calculer S^2. Que peut-on en déduire sur s ?
   (d) Calculer le polynôme caractéristique de S.
   (e) Montrer que S admet deux valeurs propres, que l'on notera λ_1 et λ_2, et que l'on choisira telles que $\lambda_1 < \lambda_2$. Quels sont les ordres de multiplicité de λ_1 et λ_2 ?
   (f) On note E_1 le sous-espace propre de l'endomorphisme s associé à la valeur propre λ_1. Donner une base (u_1, u_2) de E_1, telle que les coordonnées des vecteurs u_1 et u_2 soient égales à 0, 1 ou -1.
   (g) On note E_2 le sous-espace propre de l'endomorphisme s associé à la valeur propre λ_2. Donner une base (u_3, u_4) de E_2, telle que les coordonnées des vecteurs u_3 et u_4 soient égales à 0 ou 1.
   (h) Trouver une matrice D_1 diagonale et une matrice inversible Q_1 telles que $S = Q_1 D_1 Q_1^{-1}$. On ne demande pas de calculer Q_1^{-1}.
2. L'objectif de cette question est d'étudier p.
   (a) Donner la matrice P de p dans la base $\mathscr{B}$.
   (b) Calculer $p \circ p$. Que peut-on en déduire sur p ?
   (c) Calculer $p(u_i)$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.
   (d) Montrer que l'application linéaire p est diagonalisable.
   (e) Trouver une matrice D_2 diagonale et une matrice inversible Q_2 telles que $P = Q_2 D_2 Q_2^{-1}$. On ne demande pas de calculer Q_2^{-1}.
3. On considère maintenant l'application linéaire $f = 3s + 4p$.
   (a) Donner la matrice F de f dans la base $\mathscr{B}$.
   (b) En faisant le moins de calcul possible, trouver à l'aide des résultats précédents une matrice D_3 diagonale et une matrice inversible Q_3 telles que $F = Q_3 D_3 Q_3^{-1}$. On ne demande pas de calculer Q_3^{-1}.

Exercice 2

On rappelle que les fonctions trigonométriques hyperboliques ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}\, t = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\, t = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}.$$

Partie A – Étude de fonctions

1. (a) Étudier la parité des fonctions ch et sh.
   (b) Montrer que les fonctions ch et sh sont dérivables, et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch}' t = \operatorname{sh} t$ et $\operatorname{sh}' t = \operatorname{ch} t$.
   (c) Dériver la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (\operatorname{ch} t)^2 - (\operatorname{sh} t)^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire une relation entre $(\operatorname{ch} t)^2$ et $(\operatorname{sh} t)^2$.
2. Tracer les tableaux de variations des fonctions ch et sh. On précisera les limites en $-\infty$ et $+\infty$. On y fera apparaître les valeurs de ch et sh en 0.
3. (a) En se basant sur les variations de sh, montrer que l'équation $\operatorname{sh} t = 1$ d'inconnue t admet une unique solution réelle que l'on notera dans la suite α.
   (b) On pose $z = \mathrm{e}^{\alpha}$. Montrer que $z^2 - 2z - 1 = 0$.
   (c) En déduire la valeur exacte de α.
   (d) Montrer que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.
4. Montrer que $\operatorname{ch} \alpha = \sqrt{2}$.

Partie B – Suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\alpha} (\operatorname{sh} t)^{2n}\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que $I_0 = \alpha$.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive (*indication : on pourra remarquer que pour tout* $t \in [0\,, \alpha]$, *on a* $0 \leqslant \operatorname{sh} t \leqslant 1$). En déduire qu'elle est convergente.
3. (a) En remarquant que $(\operatorname{sh} t)^{2n+2} = (\operatorname{sh} t)^{2n+1} \operatorname{sh} t$, montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+1} = \operatorname{ch} \alpha - (2n+1)(I_{n+1} + I_n)$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2n+2} - \left(\dfrac{2n+1}{2n+2}\right) I_n$.
   (c) Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Partie C – Algorithmique

Les deux questions de cette partie sont indépendantes.

1. On souhaite obtenir un encadrement du réel α, solution de l'équation $\operatorname{sh} \alpha - 1 = 0$, en appliquant un procédé de dichotomie. Recopier en la complétant la fonction *Scilab* suivante, qui prend en argument un réel strictement positif $\varepsilon > 0$, et renvoie deux réels a et b vérifiant $a \leqslant \alpha \leqslant b$ et $b - a \leqslant \varepsilon$.

```
function [a, b] = dicho(eps)
  a = ...
  b = ...
  while ......
    c = (a+b)/2
    if ...... then a = c
              else b = c
    end
  end
endfunction
```

   Note : la fonction sh *s'écrit* `sinh` *en Scilab.*

2. En utilisant la fonction précédente sur machine, on trouve 0,881 comme valeur approchée de α. On rappelle de plus que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$I_0 = \alpha, \qquad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) I_n.$$

   Écrire une fonction, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un entier naturel n et renvoie une valeur approchée de I_n.

Exercice 3

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère le carré $\mathscr{D}$ défini par

$$\mathscr{D} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| \leqslant 2 \text{ et } |x - y| \leqslant 2\Big\}.$$

On s'intéresse à la fonction de deux variables $f\colon \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathscr{D}, \qquad f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) - x.$$

1. On s'intéresse tout d'abord à la nature de l'ensemble $\mathscr{D}$.
   (a) Tracer dans le plan $\mathbb{R}^2$ les quatre droites d'équations $x + y = 2$, $x + y = -2$, $x - y = 2$ et $x - y = -2$. Sur la même figure, indiquer l'ensemble $\mathscr{D}$.
   (b) Montrer que si (x, y) appartient à $\mathscr{D}$, alors $(x, -y)$ appartient encore à $\mathscr{D}$. Quelle symétrie possède l'ensemble $\mathscr{D}$?
   (c) Montrer que l'ensemble $\mathscr{D}$ possède une symétrie centrale que l'on déterminera.
   (d) Répondre sans donner de démonstration aux questions suivantes : l'ensemble $\mathscr{D}$ est-il ouvert dans $\mathbb{R}^2$? Est-il fermé dans $\mathbb{R}^2$?
2. Montrer que la fonction f est bornée et atteint ses bornes sur l'ensemble $\mathscr{D}$.
3. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'ensemble $\mathscr{O}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\mathscr{O} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| < 2 \text{ et } |x - y| < 2\Big\}.$$

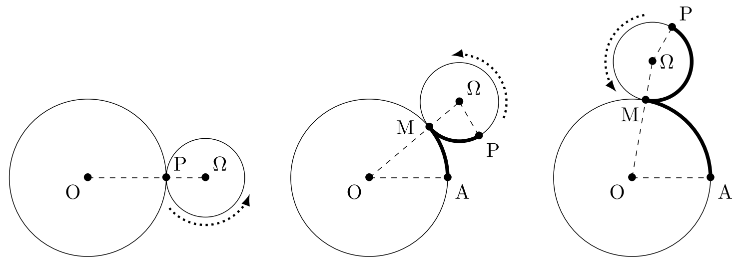
   (a) Déterminer le gradient $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(x, y)$ de f en tout point (x, y) de $\mathscr{O}$.
   (b) Montrer que $(1, 0)$ est l'unique point critique de la fonction f dans $\mathscr{O}$.
   (c) Sans calculer les deux dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$, montrer qu'elles sont néanmoins égales pour tout $(x, y) \in \mathscr{O}$. Vous utiliserez un théorème bien choisi que vous énoncerez et dont vous vérifierez les hypothèses.
   (d) Pour $(x, y) \in \mathscr{O}$, donner une expression des dérivées partielles secondes notées

$$r(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), \quad s(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \quad \text{et} \quad t(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

   (e) Donner les valeurs de r, s et t au point $(1, 0)$. L'évaluation de la fonction $rt - s^2$ au point $(1, 0)$ permet-elle de conclure sur la nature du point critique $(1, 0)$?
   (f) Rappeler le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $u \mapsto \ln(1 + u)$.
   (g) Donner le développement limité à l'ordre 3 de $t \mapsto f(1 + t, 0) - f(1, 0)$ au voisinage de 0. Le point critique $(1, 0)$ est-il un extremum local de f ?

Exercice 4

Dans cet exercice, on étudie la trajectoire d'un point P fixé sur un cercle de rayon 1/2 qui roule sans glisser à l'extérieur d'un autre cercle de rayon 1. La figure ci-dessous représente trois instants de ce mouvement. On remarquera que la longueur de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{AM}}$ est égale à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{MP}}$.



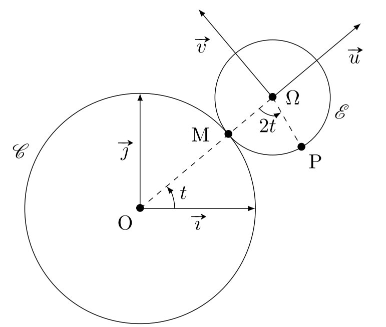
Les parties A et B peuvent se traiter de manière indépendante.

Partie A – Étude de la trajectoire du point P

1. Justifier que sur les figures ci-dessus, les angles $\left(\overrightarrow{\Omega \mathrm{M}}, \overrightarrow{\Omega \mathrm{P}}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ satisfont l'égalité $\left(\overrightarrow{\Omega \mathrm{M}}, \overrightarrow{\Omega \mathrm{P}}\right) = 2\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$.

Afin d'étudier la trajectoire du point P, on munit le plan d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = (\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. Pour $t \in \mathbb{R}$, on considère le point M de coordonnées $(\cos t, \sin t)$ appartenant au cercle $\mathscr{C}$. On note alors $\mathscr{E}$ le cercle de rayon 1/2 extérieurement tangent au cercle $\mathscr{C}$ en M. Le centre du cercle $\mathscr{E}$ est noté Ω. D'après la question 1, le point P est le point du cercle $\mathscr{E}$ tel que $\left(\overrightarrow{\Omega \mathrm{M}}, \overrightarrow{\Omega \mathrm{P}}\right) = 2t$. Enfin, on considère le repère $\mathscr{P} = (\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ où

$$\begin{cases} \vec{u} = \cos(t)\,\vec{\imath} + \sin(t)\,\vec{\jmath} \\ \vec{v} = -\sin(t)\,\vec{\imath} + \cos(t)\,\vec{\jmath} \end{cases}$$



2. Donner les coordonnées du point Ω dans le repère $\mathscr{R}$.
3. Démontrer que le repère $\mathscr{P}$ est orthornormal.
4. Démontrer que les coordonnées du point P dans le repère $\mathscr{P}$ sont
$$\left(-\frac{\cos(2t)}{2}, -\frac{\sin(2t)}{2}\right).$$
5. Soit un point N du plan. On note (x, y) ses coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$ et (X, Y) ses coordonnées dans le repère $\mathscr{P}$. Démontrer que
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$
6. En déduire que les coordonnées du point P dans le repère $\mathscr{R}$ sont
$$\left(3\cos t - 2(\cos t)^3, 2(\sin t)^3\right).$$

Partie B – Tracé de la courbe décrite par le point P

Cette partie peut être traitée même si la partie A n'a pas été abordée. On souhaite à présent tracer la courbe notée $\mathscr{N}$ et décrite par le point P. On considère donc les fonctions x et y définies sur $\mathbb{R}$ par

$$x(t) = 3\cos t - 2(\cos t)^3 \quad \text{et} \quad y(t) = 2(\sin t)^3$$

de sorte que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{P}(t) = (x(t), y(t))$.

1. Montrer que les fonctions x et y sont périodiques et préciser leurs périodes.
2. Montrer que pour tout réel t, les points $\mathrm{P}(t+\pi)$ et $\mathrm{P}(-t)$ se déduisent du point $\mathrm{P}(t)$ par des symétries à préciser. En déduire un intervalle I de longueur minimale et de la forme $[0, \alpha]$ avec $\alpha > 0$ pour l'étude de la courbe $\mathscr{N}$.
3. Dresser le tableau de variation conjoint des fonctions x et y sur l'intervalle I. On y fera apparaître les valeurs de $x(t), x'(t), y(t)$ et $y'(t)$ pour $t \in \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}$.
4. Donner une représentation graphique de la courbe $\mathscr{N}$ en y faisant apparaître pour $t \in \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}$ les points $\mathrm{P}(t)$ et les tangentes en ces points. On admettra que la tangente au point $\mathrm{P}(0)$ est horizontale.

Exercice 1

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}$. Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (2x+y+z, x+2y+z, x+y+2z).$$

Pour a et b deux réels, soit la matrice $A_{a,b}$ donnée par

$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

Nous introduisons aussi les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des matrices de la forme de $A_{a,b}$:

$$\mathscr{E} = \left\{ A_{a,b}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. Étude d'une application linéaire.
   (a) Donner l'expression de la matrice M représentative de l'application linéaire f dans la base $\mathscr{B}$.
   (b) Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $M = A_{a,b}$?
2. Propriétés de l'ensemble $\mathscr{E}$.
   (a) Déterminer sans calcul les valeurs des couples de réels (a,b) tels que la matrice $A_{a,b}$ soit diagonalisable, en précisant le théorème utilisé.
   (b) Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des matrices 3×3 à coefficients réels.
   (c) Montrer que (I,B) est une base de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}$.
   (d) Donner la dimension de l'espace vectoriel $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}$.
   (e) Donner les composantes de $A_{a,b}$ dans la base (I,B).
3. Étude de la matrice $B = A_{1,1}$.
   (a) Déterminer le polynôme caractéristique P_B de B.
   (b) Montrer que B a deux valeurs propres λ_1 et λ_2 que l'on calculera et dont on déterminera la multiplicité. On choisira $\lambda_1 < \lambda_2$. On notera $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ les sous-espaces propres associés à ces deux valeurs propres.
   (c) Donner une base (v_1, v_2) de $\mathscr{E}_1$. On choisira v_1 et v_2 tels que dans la base $\mathscr{B}$ leurs composantes ne contiennent que -1, 0 et 1 et que la première composante soit 1.

   (d) Donner une base (v_3) de $\mathscr{E}_2$. On choisira v_3 tel que dans la base $\mathscr{B}$ la première composante soit 1.
   (e) Calculer l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (f) Donner une matrice D diagonale, une matrice P et son inverse P^{-1} (à donner) telles que $B = PDP^{-1}$.
4. Étude de la matrice $A_{a,b}$.
   (a) Montrer que les vecteurs v_1 et v_2 trouvés en (3c) sont aussi des vecteurs propres de $A_{a,b}$ pour une même valeur propre μ_1 à déterminer en fonction de a et b.
   (b) Montrer que le vecteur v_3 trouvés en (3d) est aussi vecteur propre de $A_{a,b}$ pour une valeur propre μ_2 à déterminer en fonction de a et b.
   (c) En déduire que la matrice $A_{a,b}$ a en général deux valeurs propres, une double μ_1 et une simple μ_2.
   (d) Pour quelles valeurs de (a,b) la matrice a t'elle une unique valeur propre triple ?
5. Étude de la matrice $A_{\frac{2}{3},\frac{-1}{3}}$.
   (a) Résoudre le système $\begin{cases} a-b=1 \\ a+2b=0 \end{cases}$.
   (b) Déduire de ce qui précède les valeurs propres de $A_{\frac{2}{3},\frac{-1}{3}}$.
   (c) Calculer $\left(A_{\frac{2}{3},\frac{-1}{3}}\right)^{2018}$.
6. Étude de la matrice $A_{\frac{-1}{3},\frac{2}{3}}$.
   (a) Résoudre le système $\begin{cases} a-b=-1 \\ a+2b=1 \end{cases}$.
   (b) Déduire de ce qui précède les valeurs propres de $A_{\frac{-1}{3},\frac{2}{3}}$.
   (c) Calculer $\left(A_{\frac{-1}{3},\frac{2}{3}}\right)^{2018}$.

Exercice 2

On considère la fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur $[-\pi,\pi]$ par

$$\forall t \in [-\pi,\pi], \qquad f(t) = \pi^2 t - t^3.$$

Partie A

Pour k entier naturel impair et n entier naturel non nul, on considère les intégrales

$$I_{k,n} = \int_0^{\pi} t^k \sin(nt)\,dt.$$

1. Calculer $I_{1,n}$.

2. Montrer que pour $k \geqslant 3$, $I_{k,n} = \dfrac{\pi^k(-1)^{n+1}}{n} - \dfrac{k(k-1)}{n^2} I_{k-2,n}$.

3. En déduire que $I_{3,n} = \dfrac{\pi^3(-1)^{n+1}}{n} + \dfrac{6\pi(-1)^n}{n^3}$.

4. En utilisant ce qui précède, montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{6\pi(-1)^{n+1}}{n^3}$.

Partie B

1. Étudier la parité de la fonction f.
2. Étudier les variations de f sur le segment $[-\pi, \pi]$.
3. La fonction f est elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier.
4. On note

$$Sf(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$$

la série de Fourier de la fonction f.

   (a) Déterminer les coefficients a_n.

   (b) Montrer en utilisant la question A (4) et en précisant les étapes du calcul, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $b_n = 12\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3}$.

5. Montrer que la série de Fourier Sf converge vers f et précisant le théorème utilisé.

6. Calculer $Sf(\pi/2)$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$.

7. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} f^2(t)\,dt = \frac{8\pi^7}{105}$.

8. En appliquant la relation de Parseval à f, montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$.

9. (a) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que $\displaystyle\frac{1}{n^6} = \int_{n-1}^{n} \frac{1}{n^6}\,dt \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^6}\,dt$.

   (b) Soit N un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} \leq \frac{1}{5N^5}$.

Partie C

On admettra pour répondre à cette partie d'algorithmique les deux résultats suivants démontrés dans la partie **B** questions (8) et (9)(b) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} \text{ et } \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} \leq \frac{1}{5N^5}.$$

1. Écrire en métalangage ou en Scilab, une fonction `fin` prenant comme argument un réel `eps` avec $10^{-10} \leq$ `eps` ≤ 1, et renvoyant le plus petit entier naturel non nul `N` tel que $\dfrac{1}{5\mathtt{N}^5} \leq$ `eps`.

2. Écrire en métalangage ou en Scilab, une fonction `somme` prenant comme argument un réel `N` strictement positif et renvoyant une approximation décimale de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathtt{N}} \frac{1}{n^6}$.

3. En utilisant les deux fonctions précédentes, écrire en métalangage ou en Scilab, une fonction `approxPi6` prenant comme argument un réel `eps` strictement positif et renvoyant une approximation de π^6 à `eps` près.

Exercice 3

On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 - 6x - 6y.$$

Dans un espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère la surface S admettant pour équation cartésienne :

$$z = f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 - 6x - 6y.$$

1. Comparer $f(x, y)$ avec $f(y, x)$. En déduire un plan de symétrie de la surface S.

2. Dans cette question on cherche à déterminer les points critiques de f.

   (a) Calculer $p(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$.

   (b) Calculer $q(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

   (c) Trouver les couples de réels (x, y) solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} p(x, y) = 0 \\ q(x, y) = 0 \end{cases}$$

   Indication : on pourra considérer l'équation auxiliaire $p(x, y) - q(x, y) = 0$.

   (d) En déduire que la fonction f admet quatre points critiques dont on précisera les coordonnées.

(e) À l'aide d'un théorème bien choisi, que vous énoncerez et dont vous vérifierez les hypothèses dans ce cas, montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

3. Dans cette question, on détermine de quels types sont les points critiques.

(a) Calculer $r(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$.

(b) Calculer $s(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$.

(c) Calculer $t(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$.

(d) Calculer r, s, t et $rt - s^2$ pour (x,y) valant $(1,1)$, $(-1,-1)$, $(\sqrt{3},-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$. En déduire la nature des points critiques (maximum, minimum ou col) trouvés à la question (2d). Pour cela recopier et complèter le tableau récapitulatif suivant.

	$(1,1)$	$(-1,-1)$	$(\sqrt{3},-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$
r				
s				
t				
$rt-s^2$				
Nature				

4. Dans cette partie, on cherche à déterminer les points du plan tels que $f(x,y) = 0$.

(a) Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 - 6x - 6y = (x+y)\left(x^2 + y^2 + axy + bx + cy - 6\right).$$

(b) En déduire que l'ensemble de points vérifiant l'équation $f(x,y) = 0$ est formé d'une droite et d'un cercle. On donnera une équation de la droite et une équation du cercle, son centre, son rayon, puis les coordonnées de l'intersection de la droite et du cercle.

(c) Faire sur votre copie une figure donnant dans un repère la droite et le cercle précédents ainsi que les points critiques trouvés à la question (2d). (Une figure à main levée aussi claire que possible sera acceptée).

Exercice 1

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de sa base orthonormée canonique $\mathscr{B}$.
Soient p l'application $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par : $p((x,y,z,t)) = \left(\frac{x}{2} + \frac{z}{2}, y, \frac{x}{2} + \frac{z}{2}, t\right)$,
et l'endomorphisme s de $\mathbb{R}^4$ ayant dans la base $\mathscr{B}$ la matrice :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Dans cette question, nous étudions l'application p.

(a) Montrer que p est une application linéaire.

(b) Donner la matrice P de p dans la base canonique $\mathscr{B}$.

(c) Montrer sans calcul que P est diagonalisable.

2. Dans cette question, nous étudions la matrice S et l'endomorphisme s.

(a) Calculer S^2.

(b) Montrer sans calcul que S est diagonalisable.

(c) Déterminer le polynôme caractéristique de S sous une forme factorisée. Montrer que S admet deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 à préciser avec $\lambda_1 < \lambda_2$.

(d) Donner la multiplicité des valeurs propres λ_1 et λ_2.

(e) Exprimer le vecteur propre u_1 de s associé à la valeur propre λ_1 dont la première composante dans la base $\mathscr{B}$ est -1.

(f) Donner trois vecteurs propres u_2, u_3 et u_4 (linéairement indépendants) de s pour la valeur propre λ_2. On les choisira avec des composantes égales à 1 ou 0.

(g) Donner une matrice inversible U et une matrice diagonale D telles que $S = UDU^{-1}$. On ne demande pas de calculer U^{-1}.

(h) Calculer S^{2017}.

3. Dans cette partie, nous caractérisons les espaces $F = \text{Vect}(u_1)$ et $G = \text{Vect}(u_2, u_3, u_4)$.

(a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

(b) Montrer que si $v \in F$ et $w \in G$ alors v et w sont orthogonaux pour le produit scalaire canonique.

(c) Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

4. Dans cette partie, nous cherchons à caractériser l'application linéaire p.

(a) Calculer p^2 ($p^2 = p \circ p$).

(b) Calculer $p(u_1)$, $p(u_2)$, $p(u_3)$ et $p(u_4)$.

(c) Déterminer les valeurs propres et une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de de p .

(d) Donner une matrice inversible V et une matrice diagonale Δ telles que $P = V\Delta V^{-1}$. On ne demande pas de calculer V^{-1}.

(e) Caractériser géométriquement l'application linéaire p.

Exercice 2

Soit c un nombre réel non nul. On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, toutes deux 2π-périodiques et définies sur $[-\pi,\pi[$ par

$$\forall t \in [-\pi,\pi[, \quad f(t) = e^{ct} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2} = \mathrm{ch}(ct).$$

1. Dans cette question seulement, on suppose $c = 1$. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$. On précisera sur cette figure les valeurs de f aux points de discontinuité. On donne $e^{-\pi} \simeq 0,04$, $e^{\pi} \simeq 23,14$.

2. On note

$$Sf(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) \quad \text{et} \quad Sg(t) = a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \sin(nt)$$

les séries de Fourier respectives de f et g.

(a) Calculer le coefficient a_0.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$a_n = \frac{2(-1)^n c\,\mathrm{sh}(c\pi)}{\pi(c^2+n^2)}.$$

Indication : on pourra utiliser $\cos(nt) = \mathrm{Re}\left(e^{int}\right)$.

On rappelle que $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1} n\,\mathrm{sh}(c\pi)}{\pi(c^2+n^2)}.$$

3. (a) Quelle est la parité de g ?

(b) g est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

(c) Montrer que la série de Fourier de g est convergente. On énoncera le théorème utilisé et on précisera la fonction vers laquelle elle converge.

(d) Déduire à l'aide des coefficients de Fourier a_n et b_n de f les coefficients de Fourier a'_n et b'_n de la fonction g.

4. (a) Dans cette sous-question seulement, on suppose $c = 1$. Représenter graphiquement g sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

(b) Calculer $Sf(0) = Sg(0)$ et en déduire l'expression $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{c^2+n^2}$.

(c) Calculer $Sg(\pi)$ et en déduire l'expression $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c^2+n^2}$.

5. En appliquant la relation de Parseval à g, calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{c^2+n^2}\right)^2$.

Exercice 3

On considère la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad g(x,y) = \left(x^2+y^2-3\right)^2 + 4y^2 - 8.$$

Dans un espace affine euclidien muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère la surface S admettant pour équation cartésienne :

$$z = g(x,y) = \left(x^2+y^2-3\right)^2 + 4y^2 - 8.$$

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Comparer $g(x,y)$ avec $g(x,-y)$, $g(-x,y)$, $g(-x,-y)$. Déduire de chaque égalité trouvée une symétrie de la surface S.

2. On rappelle que $p(x,y) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$. Montrer que $p(x,y) = 4x\left(x^2+y^2-3\right)$.

3. On rappelle que $q(x,y) = \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)$. Calculer $q(x,y)$.

4. Trouver tous les couples de réels solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 4x\left(x^2+y^2-3\right) = 0 \\ 4y\left(x^2+y^2-1\right) = 0 \end{cases}$$

5. En déduire que la fonction g admet cinq points critiques dont on précisera les coordonnées.

6. Énoncer un théorème permettant de démontrer que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$. Montrer que la fonction g vérifie les hypothèses de ce théorème.

7. (a) On rappelle que $r(x,y) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)$. Montrer que $r(x,y) = 4\left(3x^2+y^2-3\right)$.

(b) On rappelle que $s(x,y) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y)$. Calculer $s(x,y)$.

(c) On rappelle que $t(x,y) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)$. Calculer $t(x,y)$.

8. Calculer r et $rt - s^2$ pour (x,y) valant $(0,0)$, $(0,\pm 1)$, $(\pm\sqrt{3}, 0)$. En déduire la nature des points critiques (maximum, minimum ou col) trouvés à la question 5.

Partie B

On se propose de déterminer deux réels positifs α et r tels que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$g(x,y) = (x^2+y^2-3)^2+4y^2-8 = \left((x-\alpha)^2+y^2-r^2\right)\left((x+\alpha)^2+y^2-r^2\right) \qquad (*).$$

1. Écrire l'égalité $(*)$ avec $(x,y)=(0,1)$. En déduire la valeur de α^2+1-r^2, s'il existe α et r tels que l'égalité $(*)$ soit vraie.
2. Écrire l'égalité $(*)$ avec $(x,y)=(1,0)$. En déduire en utilisant aussi le résultat de la question 1. de cette partie la valeur des réels positifs α et r, s'il existe α et r tels que l'égalité $(*)$ soit vraie.
3. Pour les valeurs de α et r trouvées dans les cas particuliers $(0,1)$ et $(1,0)$, montrer que l'égalité $(*)$ est vraie pour tout couple de réels (x,y).
4. En déduire que l'ensemble de points vérifiant l'équation $g(x,y)=0$ est formé de deux cercles dont on donnera les centres, les rayons et les coordonnées des points d'intersection.

Exercice 4

On se donne un tableau à une dimension, de longueur n dont les entrées sont indexées de 1 à n, ne contenant que des 0 et des 1, commençant et se terminant par un 0. On supposera qu'il ne contient pas que des 0.

Dans un tel tableau on appelle **séquence1** une suite de 1 consécutifs précédés et suivis d'au moins un 0. Ci-dessous, on a un exemple d'un tel tableau de longueur 16, comportant 4 **séquence1**, dont une de longueur 4 entre les numéros 8 et 11, et une en 15 de longueur 1. On se propose d'écrire des fonctions en métalangage ou en Scilab permettant de calculer le nombre, la longueur et la position de telles **séquence1**.

Index i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Tableau1(i)	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**

1. Soit la fonction `f` écrite en Scilab, avec en entrée un tableau `t` défini précédemment.

```
function nb=f(t)
    nb=0
    n=length(t)
    for i=1:(n-1)
        if t(i)<t(i+1)
            nb=nb+1
        end
    end
endfunction
```

   Expliquer ce que renvoie `f(Tableau1)` et préciser le fonctionnement de `f`.

2. Écrire en métalangage ou en Scilab une fonction `g` qui détermine et renvoie la position et la longueur [début,fin,longueur] de la plus longue `séquence1` du tableau (en cas d'égalité de longueur celle de la première rencontrée). Par exemple `g(Tableau1)` doit renvoyer la liste [3,6,4].

Exercice 1

On considère l'ensemble U des suites réelles $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}=u_{n+1}+2u_n.$$

Pour un $u\in U$ les deux premiers termes u_0 et u_1 sont donnés.
La suite nulle définie par $u_0=0$ et $u_1=0$ appartient à U.

1. Montrer que si $a\in U$, $b\in U$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, on a $a+b\in U$ et $\alpha a\in U$.
   En déduire que U est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Soient c et d les deux suites appartenant à U telles que $c_0=1$, $c_1=0$, $d_0=0$ et $d_1=1$.
   (a) Montrer que (c,d) est une base de U.
   (b) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel U ?
3. (a) Montrer qu'il existe deux réels distincts et non nuls ρ et σ que l'on calculera, avec $\rho<0<\sigma$, tels que les suites géométriques $(\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sigma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à U. On notera r et s les suites telles que $\forall N\in\mathbb{N}$, $r_n=\rho^n$ et $s_n=\sigma^n$.
   (b) Montrer que (r,s) est une autre base de U.
4. (a) Si v est la suite de U telle que $v_0=x$, $v_1=y$, donner en fonction de x et u les composantes de v dans la base (r,s).
   (b) En déduire une formule générale de v_n en fonction de n (sans utiliser la formule de récurrence).

   Les deux questions d'informatique suivantes peuvent être rédigées au choix en pseudo-code ou en Scilab.
5. (a) Écrire une procédure informatique F ayant pour variables d'entrée deux réels x, y et un entier naturel n et qui renvoie le terme v_n de la suite $v\in U$ telle que $v_0=x$ et $v_1=y$.
   La fonction F utilisera la relation de récurrence $v_{n+2}=v_{n+1}+2v_n$ dans une boucle ou de manière récursive.
   (b) Écrire une procédure informatique G ayant également pour variable d'entrée deux réels x, y et un entier naturel n et qui renvoie aussi le terme v_n de la suite $v\in V$ telle que $v_0=x$ et $v_1=y$, mais sans faire de boucle (en utilisant la formule établie à la question 4.b).
   (c) Expliquez quelle est, entre F et G, la fonction la plus efficace pour calculer v_n.

Exercice 2
On considère un espace vectoriel E de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ et un endomorphisme f de E ayant pour matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{U}$.

1. (a) Déterminer une base de l'image et du noyau de f.
   (b) Déterminer le polynôme caractéristique de A.
   (c) Déterminer les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 de A. On choisira $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
   (d) Déterminer des vecteurs propres v_1, v_2 et v_3 de A associés respectivement aux valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3 et tels que leur première composante soit égale à 1.
   (e) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de E.
2. (a) Donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.
   (b) Calculer l'inverse P^{-1} de P.
3. Calculer A^2 et A^3.
4. Montrer par récurrence que pour tout entier n strictement positif on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_n & a_{n+1} & a_n \end{pmatrix}$$

   où les a_n sont les termes consécutifs d'une même suite. Déterminer une relation de récurrence pour la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donner a_1, a_2 et a_3.
5. (a) Montrer que l'on a pour tout entier naturel n non nul, $\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$, avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) Diagonaliser B en déterminant une matrice inversible Q et une matrice diagonale Δ avec $B = Q\Delta Q^{-1}$.
   (c) Calculer l'inverse Q^{-1} de Q.
   (d) Pour tout entier strictement positif n, calculer B^n en fonction de n.
6. (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = B^{n-1} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.
   (b) Donner une expression de a_n pour tout entier naturel n non nul.

Exercice 3
Soit la fonction $f :]0\,;+\infty[\times]0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{\ln(1+xy^2)}{y^2}$$

et la fonction $g :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{\ln(1+xy^2)}{y^2}\,\mathrm{d}y.$$

On se propose de calculer une expression de $g(x)$, puis de $g'(x)$. On calcule ensuite $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ puis l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y$ que l'on comparera à $g'(x)$.

1. (a) Pour un x positif fixé, montrer que $\displaystyle\lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(1+xy^2)}{y^2} = x$.
   (b) Que peut–on en déduire pour la convergence de l'intégrale définissant f ?
2. (a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que l'on précisera, l'égalité :

$$g(x) = -\ln(1+x) + 2x\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+xy^2}.$$

   (b) À l'aide d'un changement de variable montrer qu'il existe deux fonctions à préciser a et b dépendant de x telles que :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+xy^2} = a(x)\int_0^{b(x)} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

   (c) En déduire une expression de $g(x)$ sans intégrale.
   (d) En déduire une expression de $g'(x)$ (également sans intégrale).
3. (a) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\ln(1+xy^2)}{y^2}\right)$.
   (b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y$.
   (c) Que remarque–t–on ?

Exercice 4
On considère la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π–périodique, définie sur $]-\pi\,;\pi]$ par :

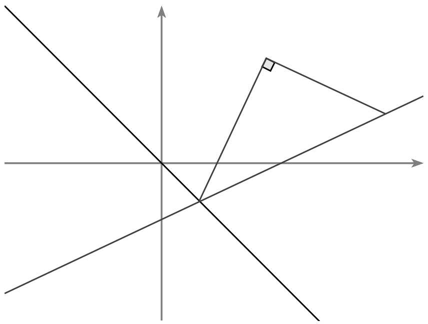
$$g(t) = \begin{cases} \cos t & \text{si } t \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right], \\ 0 & \text{si } t \in \left]-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]. \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction g entre -3π et 3π.
2. Quelle est la parité de la fonction g ? Justifier votre réponse.
3. La série de Fourier de g est notée $g(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\big)$.
   (a) Donner les coefficients b_n pour tout entier n strictement positif.
   (b) Calculer a_0 et a_1.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a :
   $$a_n = \frac{1}{\pi(n+1)} \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + \frac{1}{\pi(n-1)} \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)$$
   (d) En déduire que si n est impair et $n \neq 1$, alors $a_n = 0$.
   (e) Montrer que si $n = 2p$ est un entier pair non nul, alors $a_{2p} = \dfrac{2(-1)^{p+1}}{\pi(4p^2-1)}$.
4. On s'intéresse maintenant à la convergence de la série de Fourier de g.
   (a) A–t–on pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = Sg(t)$? Justifier précisément votre réponse.
   (b) Montrer que
   $$\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right], \quad \cos t = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(4p^2-1)} \cos(2pt).$$
   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1}$.
5. (a) Appliquer l'identité de Parseval à la fonction g.
   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4p^2-1}\right)^2$.

Exercice 5
Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, on considère les points $A(1\,;1)$, $B(-1\,;-1)$ et la droite D d'équation $y = -x$.
Pour un point N de D de coordonnées $(t\,;-t)$, on considère la droite (BN), la droite (AN) et la droite Δ passant par A et perpendiculaire à la droite (AN).
Le point M est l'intersection, si elle existe, de la droite (BN) et de la droite Δ.

1. En fonction de t, donner une équation cartésienne de la droite (BN).
2. En fonction de t, donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{AN}$.
3. En fonction de t,donner une équation cartésienne de la droite Δ passant par A et perpendiculaire à (AN).
4. Pour quelles valeurs de $t$les droites (BN) et Δ sont-elles parallèles ? On trouvera deux valeurs notées dans la suite t_1 et t_2.
5. Calculer en fonction de t les coordonnées du point L en résolvant un système formé par les équations des droites (BN) et Δ pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{t_1, t_2\}$.

   On appelle désormais G la courbe décrite par M quand N parcourt la droite D.
6. On note $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les fonctions telles que :
   $$u(t) = \frac{t+1}{-t+1} = \frac{2}{-t+1} - 1 \text{ et } v(t) = \frac{-t+1}{t+1} = \frac{2}{t+1} - 1$$
   (a) Préciser les domaines de définition de u et v.
   (b) Calculer les dérivées de u et v et préciser les sens de variation de u et v sur chaque intervalle ou elles sont définies.
   (c) Donner un tableau de variations conjointes de u et v en précisant leurs limites aux extrémités de chaque intervalle où elles sont définies.
   On ne demande pas de représentation de u et v.
7. (a) Le point A appartient–il à G ? Si c'est le cas, quelle est la valeur de t qui lui est associée ?
   (b) Le point B appartient–il à G ? Si c'est le cas, quelle est la valeur de t qui lui est associée ?
8. (a) Calculer $u(t)v(t)$. Que remarque–t–on ?
   (b) On appelle H la courbe d'équation cartésienne $y = \dfrac{1}{x}$.
   Peut–on déduire de ce qui précède que G est la courbe H dont on a retiré un ou plusieurs points ? Quel(s) point(s) retirer à H pour obtenir G ?



Exercice 1

L'objectif de cet exercice est de résoudre le système différentiel :

$$\text{(SD)} \qquad \begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) - z(t) \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) - 2z(t) \\ z'(t) = 2x(t) + y(t) - 4z(t) \end{cases}$$

avec les conditions initiales (CI) $x(0) = 1$, $y(0) = 2$ et $z(0) = 1$.

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

1. Écrire ce système sous la forme matricielle $X'(t) = AX(t)$ où A est une matrice réelle de taille 3×3 à préciser.

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A.

   (b) Montrer que les valeurs propres de A sont -1, -2 et -3.

3. Dans cette question, nous déterminons les sous-espaces propres de la matrice A.

   (a) Donner le vecteur propre associé à la valeur propre -1 dont la première composante non nulle est 1.

   (b) Donner le vecteur propre associé à la valeur propre -2 dont la première composante non nulle est 1.

   (c) Donner le vecteur propre associé à la valeur propre -3 dont la première composante non nulle est 1.

4. Dans cette question, nous diagonalisons la matrice A.

   (a) Expliquer pourquoi la matrice A peut s'écrire sous la forme $A = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale et P une matrice de passage inversible.
   On choisira pour D la matrice ayant $-1, -2, -3$ dans cet ordre sur la diagonale.

   (b) Donner l'expression de P tel que 1 soit le premier terme non nul de chaque colonne.

   (c) Montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. On pose $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$, tel que $U(t) = P^{-1}X(t)$.

   (a) Donner les valeurs de $u(0)$, $v(0)$ et $w(0)$.

   (b) Montrer que $U(t)$ vérifie l'équation différentielle matricielle $U'(t) = DU(t)$.

   (c) Trouver la solution de $U'(t) = DU(t)$ telle que $u(0)$, $v(0)$ et $w(0)$ soient les valeurs trouvées en (a).

   (d) En déduire la solution de (SD) satisfaisant aux conditions initiales (CI).

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} \, \mathrm{d}t.$$

1. Calculer $f(0)$.

2. Pour x dans $\mathbb{R}$, calculer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$. En déduire la parité de f.

3. Donner la fonction dérivée de la fonction h définie par $h(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$.

4. (a) Calculer la dérivée de la fonction f.

   (b) Calculer $f'(0)$.

   (c) Calculer $f'(x) - 2xf(x)$. Donner une équation différentielle vérifiée par f.

5. (a) Donner le signe de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.

   (b) On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ converge. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.

   (c) Donner le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

6. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p} p!}{(2p+1)!} x^{2p+1} = x + \frac{4}{6}x^3 + \cdots + \frac{2^{2p} p!}{(2p+1)!} x^{2p+1} + \cdots$.

   On note g sa somme sur l'intervalle de convergence. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

7. Donner le développement en série entière de la dérivée de g.

8. Montrer que la fonction g vérifie la même équation différentielle que f.

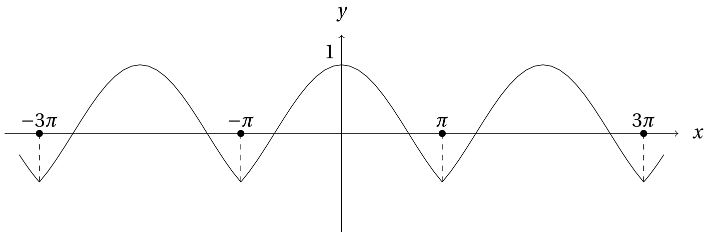
9. En déduire que $f = g$.

Exercice 3

Soit $u \in]0,1[$ un paramètre. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que :

$$\forall t \in [-\pi, +\pi], \quad f(t) = \cos(ut)$$

1. Étudier la parité de la fonction f.



2. Le graphe ci-dessus représente la fonction f lorsque $u = 3/4$. Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi, +3\pi]$ pour la valeur $u = 1/2$.

   Dans les question 3 et 4, u est un réel quelconque de $]0,1[$.

3. La série de Fourier de f est notée $Sf(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$.

   (a) Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$. On rappelle que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

   $$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

   (b) Que valent les coefficients $b_n(f)$?

   (c) Déduire des questions précédentes $Sf(t)$.

4. (a) Étudier la convergence de la série de Fourier de f, en énonçant le théorème utilisé.

   (b) Calculer $Sf(\pi)$ puis donner la valeur de l'expression

   $$\frac{\sin(\pi u)}{\pi u} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u\sin(\pi u)}{n^2 - u^2}.$$

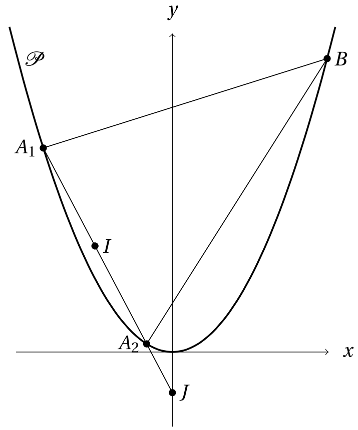
5. Dans cette question, on considère le cas $u = 1/2$.

   (a) Appliquer l'identité de Parseval à f.

   (b) En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n^2 - 1}\right)^2$.

Exercice 4

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$, ou encore de représentation paramétrique (t, t^2) pour $t \in \mathbb{R}$.



1. Pour un réel a non nul, soit $A(a, a^2)$ un point de la parabole $\mathscr{P}$. Donner les composantes d'un vecteur tangent à $\mathscr{P}$ en a.

2. Donner une équation cartésienne de la droite D normale à la parabole $\mathscr{P}$ en $A(a, a^2)$.

3. La droite D normale à la parabole $\mathscr{P}$ et passant par $A(a, a^2)$ coupe $\mathscr{P}$ en $A(a, a^2)$ et en un deuxième point $B(b, b^2)$. Montrer que $b = -a - \frac{1}{2a}$.

4. On définit la fonction $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = -x - \frac{1}{2x}$.

   (a) Calculer la fonction dérivée de h et donner un tableau de variation de h en précisant les extrema et les limites en $-\infty, 0^-, 0^+$ et $+\infty$. On ne demande pas de représentation graphique de h ni d'étude des asymptotes.

   (b) En déduire que l'image de $\mathbb{R}^*$ par h est un ensemble E de la forme :
   $E =]-\infty, \alpha] \cup [\beta, +\infty[$, avec $\alpha < \beta$.

   (c) Précisez les valeurs de α et de β.

5. (a) Montrer que pour tout $b \in E \setminus \{\alpha, \beta\}$, il existe exactement deux réels distincts a_1 et a_2 tels que :

   $$b = h(a_1) = h(a_2).$$

   (b) Donner une équation du second degré de paramètre b et d'inconnue a telle que a_1 et a_2 soient ses solutions.

   (c) En déduire une expression de a_1 et a_2 en fonction de b.

   (d) Qu'observe-t-on si $b = \alpha$ ou si $b = \beta$?

6. Ici, $b \in E \setminus \{\alpha, \beta\}$.

   (a) Pour $A_1(a_1, a_1^2)$ et $A_2(a_2, a_2^2)$, donner en fonction de b les coordonnées du milieu I du segment $[A_1 A_2]$.

   (b) Montrer que $\vec{u}(1, -b)$ est un vecteur directeur de la droite $(A_1 A_2)$.

(c) Donner en fonction du paramètre b, l'équation de la droite $\Delta = (A_1A_2)$, passant par I et de vecteur directeur $\vec{u}(1,-b)$.

(d) Montrer que quand $b \in E \setminus \{\alpha, \beta\}$, les droites Δ passent par un point fixe J, dont on donnera les coordonnées.

(e) Que remarque-t-on quand $b = \alpha$ ou quand $b = \beta$?

Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les exercices sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1

Soit E l'espace vectoriel des matrices réelles 2×2 avec la base :

$$\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=(e_1,e_2,e_3,e_4).$$

On notera par une matrice unicolonne les composantes d'un vecteur de E dans une base.

Ainsi la matrice unicolonne des composantes de $v=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$ est $V=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$.

Soit f l'endomorphisme de E défini par $f\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}d&c\\b&a\end{pmatrix}$ et g l'endomorphisme de E défini par $g\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&c\\b&a\end{pmatrix}$.

Partie A

1. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

2. Soit la matrice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$. Déterminer son polynôme caractéristique $P_\mathbf{A}$.

3. Montrer que **A** admet deux valeurs propres distinctes λ et μ à calculer. (Choisir $\lambda<\mu$). Quelles sont les multiplicités de λ et μ comme racines de $P_\mathbf{A}$?

4. Déterminer les matrices unicolonnes des composantes dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs de base du sous espace propre $\mathcal{E}_\lambda$. On choisira des matrices dont la première composante non nulle est 1.

5. Déterminer les matrices unicolonnes des composantes dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs de base du sous espace propre $\mathcal{E}_\mu$. On choisira des matrices dont la première composante non nulle est 1.

6. Peut-on déduire de ce qui précède que **A** est diagonalisable ?

7. En déduire une matrice inversible **P** et une matrice diagonale **D** telles que $\mathbf{A}=\mathbf{PDP}^{-1}$.
[Ne pas calculer $\mathbf{P}^{-1}$]

Partie B

1. Donner la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$.

2. Soit la matrice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer son polynôme caractéristique $P_{\mathbf{B}}$.

3. Montrer que **B** admet trois valeurs propres distinctes, 0 et α, β. (Choisir $\alpha < \beta$)
Quelles sont les multiplicités de 0, de α et de β, comme racines de $P_{\mathbf{B}}$?

4. Déterminer la matrice unicolonne des composantes $\mathbf{V}_0$ dans la base $\mathcal{B}$ d'un vecteur de base v_0 du sous espace propre $\mathcal{E}_0$. On choisira celle dont la première composante non nulle est 1.

5. Déterminer la matrice unicolonne des composantes $\mathbf{V}_\alpha$ dans la base $\mathcal{B}$ d'un vecteur de base v_α du sous espace propre $\mathcal{E}_\alpha$. On choisira celle dont la première composante non nulle est 1.

6. Déterminer la matrice unicolonne des composantes $\mathbf{V}_\beta$ dans la base $\mathcal{B}$ d'un vecteur de base v_β du sous espace propre $\mathcal{E}_\beta$. On choisira celle dont la première composante non nulle est 1.

7. Peut-on déduire de ce qui précède que **B** est diagonalisable ? Justifier.

8. Soit la famille de vecteurs $\mathcal{B}_2 = (v_0, e_1, v_\alpha, v_\beta)$. Montrer que $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathcal{E}$.

9. Calculer les composantes des images par g des vecteurs de $\mathcal{B}_2$, d'abord dans la base $\mathcal{B}$, puis dans la base $\mathcal{B}_2$.

10. En déduire l'expression de la matrice **C** de g dans la base $\mathcal{B}_2$.

Exercice 2

On considère les fonctions 2π-périodiques, f et g définies par :

$$\forall x \in \left]-\pi,\pi\right],\ f(x) = |x| \text{ et } g(x) = x.$$

1.a. Préciser la parité de f ;
1.b. Déterminer la série de Fourier de la fonction f. On note Sf la somme de la série de Fourier.
2.a. Étudier la convergence de la série de Fourier de la fonction f sur $\mathbb{R}$, en précisant le théorème utilisé et son énoncé.

2.b. En calculant $Sf(0)$, trouver la somme de la série numérique : $T = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

3. Soit $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Montrer qu'il existe deux réels a et b non nuls tels que $S = aS + bT$.

4. À l'aide du résultat de la question précédente, en déduire la somme de la série numérique S.
5. Appliquer la relation de Parseval à Sf et trouver la somme de la série numérique :

$$V = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$

6.a. Soit $U = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$. Montrer qu'il existe deux réels c et d non nuls tels que $U = cU + dV$.

6.b. À l'aide du résultat de la question précédente, en déduire la somme de la série numérique U.

7.a. Préciser la parité de g.
7.b. Déterminer la série de Fourier de la fonction g. On note Sg la somme de la série de Fourier.
8. Étudier la convergence de la série de Fourier de la fonction g sur $\mathbb{R}$, en précisant le théorème utilisé et son énoncé.

9. En calculant $Sg\left(\frac{\pi}{2}\right)$, trouver la somme de la série numérique $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.

10. Appliquer la relation de Parseval à Sg et retrouver la somme de la série numérique :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

11. Montrer que $\forall x \in \left[0,\pi\right[$, $-2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2}$.

On considère la fonction 2π-périodique, h définie par :

$$\forall x \in \left]-\pi,0\right],\ h(x) = 0 \text{ et } \forall x \in \left]0,\pi\right],\ h(x) = x.$$

12. Exprimer h à l'aide de f et g.
13. En déduire sans aucun calcul la série de Fourier de h.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle, définie pour $x \in \left]0,+\infty\right[$, de fonction inconnue y :
(E) : $xy'(x) - y(x) = \mathrm{Arctan}(x)$ et l'équation homogène associée (H) $xy'(x) - y(x) = 0$.

1. Déterminer la solution générale de (H).
2. Montrer que la résolution de (E) peut se ramener à calculer l'intégrale :

$$K(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(u)}{u^2} du \text{ pour } x \in \left]0,+\infty\right[.$$

Justifier que cette intégrale est convergente.
3. Par une intégration par parties, exprimer $K(x)$ à l'aide de l'intégrale d'une fraction rationnelle.

4. Déterminer trois réels α, β, γ tels que : $\forall u \in \mathbb{R}^*$, $F(u) = \frac{1}{u(u^2+1)} = \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta u + \gamma}{(u^2+1)}$.

5. En déduire le calcul de l'intégrale $K(x)$, puis la solution générale y de (E), en fonction d'une constante d'intégration C.
6. Montrer que $\lim_{x \to 0+} y(x)$ existe et calculer cette limite.

Exercice 4

Soit la courbe **C** de représentation paramétrique dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{cases} x(\alpha) = \alpha - \sin\alpha \\ y(\alpha) = 1 - \cos\alpha \end{cases}$$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $\mathbf{M}(\alpha)$ le point de paramètre α de **C**.

1.a. Préciser la parité des fonctions x et y. En déduire une symétrie pour la courbe **C.**

1.b. Donner les coordonnées du milieu du segment $\left[\mathbf{M}(\alpha),\mathbf{M}(2\pi-\alpha)\right]$. En déduire une symétrie pour la courbe **C.**

1.c. Donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{M}(\alpha)\mathbf{M}(\alpha+2\pi)}$. Montrer qu'il existe des translations à préciser qui laissent la courbe **C** invariante.

1.d. Déduire de ce qui précède toutes les symétries de la courbe **C.**

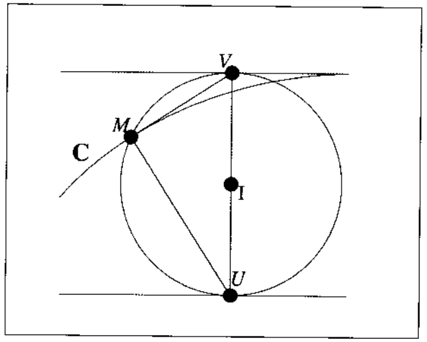
2.a. Faire une étude conjointe des fonctions x et y sur $\left[0,2\pi\right]$. (dérivée, extrema, sens de variation, tableau de variation.)

2.b. Déterminer la limite $\lim\limits_{\alpha\to 0^-}\dfrac{y(\alpha)}{x(\alpha)}$. On admettra qu'il en résulte que **C** admet une tangente verticale en $\mathbf{M}(0)$.

2.c. Donner une représentation graphique de **C** pour $\alpha\in\left[-2\pi,2\pi\right]$dans le repère orthonormé $(\mathbf{O};\vec{i},\vec{j})$.

On suppose maintenant que $\alpha\in\left]0,\pi\right[$. On note **M** le point $\mathbf{M}(\alpha)$ de **C.**

3.a. Donner les composantes d'un vecteur directeur $\vec{t}$ de la tangente **T** à **C** en **M**, et d'un vecteur directeur $\vec{n}$ de la normale **N** à **C** en **M.**



3.b. Donner une équation de la droite **N** normale à **C** en **M.** Déterminer les coordonnées du point **U**, intersection de **N** avec l'axe $(\mathbf{O}x)$.

3.c. Donner une équation de la droite **T** tangente à **C** en **M.** Déterminer les coordonnées du point **V**, intersection de **T** avec la droite d'équation $y=2$.

3.d. Que remarque-t-on sur les abscisses des points **U** et **V** ?

On appelle **I** le milieu du segment $\left[\mathbf{UV}\right]$.

4.a. Montrer que le cercle de centre **I** et de rayon **1** contient **U, V** et **M.**

4.b. Donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{IM}}$. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{\overrightarrow{\mathbf{IU}},\overrightarrow{\mathbf{IM}}}$.

4.c. Comparer la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{\mathbf{UM}}$ (situé sous la droite $(\mathbf{UM})$) et la longueur du segment $\left[\mathbf{OU}\right]$. (**O** est l'origine du repère).

❖

Mathématiques

Durée : 3 heures. Coefficient : 3
Les exercices sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1

Soient deux nombres réels strictement positifs a et b, ainsi que les matrices :
$\mathbf{K}=\begin{pmatrix}0&0&a\\0&0&0\\b&0&0\end{pmatrix}$ et $\mathbf{I}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

1. Soit $\mathcal{E}=\left\{\alpha\mathbf{K}+\beta\mathbf{I}|(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\right\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,.)$ et donner sa dimension en justifiant la réponse.
2. Montrer que la matrice $\mathbf{K}$ admet trois valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$ que l'on calculera.
3. La matrice $\mathbf{K}$ est-elle diagonalisable ? Justifier.
4. (a) Déterminer le sous espace vectoriel propre $\mathcal{U}_1$ associé à la valeur propre λ_1. Donner u_1 le vecteur propre de $\mathcal{U}_1$ dont la première composante vaut $\sqrt{a}$.
   (b) Déterminer le sous espace vectoriel propre $\mathcal{U}_2$ associé à la valeur propre λ_2. Donner u_2 le vecteur propre de $\mathcal{U}_2$ dont la deuxième composante vaut 1.
   (c) Déterminer le sous espace vectoriel propre $\mathcal{U}_3$ associé à la valeur propre λ_3. Donner u_3 le vecteur propre de $\mathcal{U}_3$ dont la première composante vaut $\sqrt{a}$.
5. Montrer qu'il existe une matrice $\mathbf{P}$ inversible et une matrice diagonale $\mathbf{D}$ telles que $\mathbf{K}=\mathbf{PDP}^{-1}$. Donner $\mathbf{P}$ et $\mathbf{D}$.
6. Pour i valant 1 ou 2 ou 3, montrer que les vecteurs propres u_i de $\mathbf{K}$ associés aux valeurs propres λ_i sont aussi vecteurs propres de la matrice $\mathbf{M}=\alpha\mathbf{K}+\beta\mathbf{I}$ associés aux valeurs propres μ_i que vous exprimerez en fonction de α, β, λ_i
7. (a) Montrer que toute matrice $\mathbf{M}=\alpha\mathbf{K}+\beta\mathbf{I}$ est diagonalisable et donner une matrice diagonale Δ semblable à M.
   (b) Montrer que $\mathbf{M}=\mathbf{P}\Delta\mathbf{P}^{-1}$ avec le même $\mathbf{P}$ qu'à la question 5.
8. On considère la matrice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. Utiliser ce qui précède pour déterminer une matrice Δ et une matrice $\mathbf{Q}$ inversible telles ques $\mathbf{A}=\mathbf{Q}\Delta\mathbf{Q}^{-1}$.
9. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, donner l'expression de la puissance n-ième $\mathbf{A}^n$ de $\mathbf{A}$.

Exercice 2
Partie I

Soit n un entier naturel non nul.

1. Exprimer $\mathrm{e}^{in\pi}$ à l'aide d'une puissance de -1.

2. On pose pour tout entier naturel p, $I_{p,n} = \int_0^\pi t^p e^{int}\,dt$. Montrer que $I_{0,n} = \dfrac{-\left((-1)^n - 1\right) i}{n}$.
3. Montrer que $\forall (p,n) \in \mathbb{N}^{*2}$, $I_{p,n} = \dfrac{i(-1)^{n+1}\pi^p}{n} + \dfrac{ip}{n} I_{p-1,n}$.
4. Soient quatre nouvelles intégrales définies respectivement par :

$$C_{1,n} = \int_0^\pi t\cos(nt)\,dt\ ,\ S_{1,n} = \int_0^\pi t\sin(nt)\,dt\ ,\ C_{2,n} = \int_0^\pi t^2\cos(nt)\,dt\ ,\ S_{2,n} = \int_0^\pi t^2\sin(nt)\,dt.$$

   (a) Calculer $I_{1,n} = \int_0^\pi t^1 e^{int}\,dt$ et en déduire que :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $C_{1,n} = \dfrac{(-1)^n - 1}{n}$ et $S_{1,n} = \dfrac{(-1)^{n+1}\pi}{n}$.
   (b) Calculer $I_{2,n} = \int_0^\pi t^2 e^{int}\,dt$ et en déduire que :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $C_{3,n} = \dfrac{2\pi(-1)^n}{n^2}$ et $S_{2,n} = \dfrac{2}{n^3}\left((-1)^n - 1\right) - \dfrac{(-1)^n\pi^2}{n}$.

Partie II

Soit une fonction f **impaire**, continue et 2π–périodique sur $\mathbb{R}$ définie sur $]0,\pi[$ par : $f(t) = \pi t - t^2$.

1. Représenter la fonction f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Déterminer la série de Fourier de f. Préciser la valeur des termes d'indice pair et des termes d'indice impair.
3. Etudier la convergence de la série de Fourier et donner sa somme.
4. (a) Enoncer la relation de Parseval.
   (b) Appliquer la relation de Parseval à la fonction f et en déduire la valeur de : $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$.
   (c) Soit $T = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$. Trouver une expression de T de la forme $T = S + bT$. En déduire la valeur de T.

Exercice 3

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique : $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$ avec $t \in\,]-\pi\,;\pi]$. On note $M(t)$ le point de la courbe $\mathcal{C}$ associé au paramètre t.

1. Soit $M(t)$ un point de $\mathcal{C}$. Préciser par quelle transformation géométrique on obtient à partir de $M(t)$ les trois points suivants :

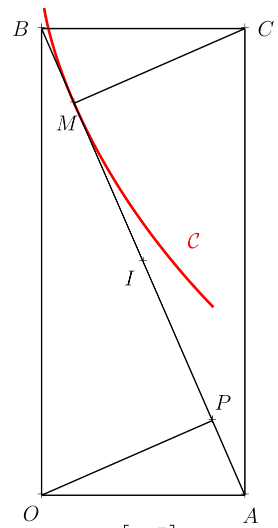
   a) $M(-t)$ b) $M(\pi - t)$ c) $M\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$

   En déduire l'intervalle le plus petit possible $I = [0\,;\alpha]$ tel que si $\mathcal{C}_0$ est la restriction de $\mathcal{C}$ obtenue pour $t \in I$, on peut obtenir tout $\mathcal{C}$ par des transformations géométriques successives (dont on précisera la nature et l'ordre) appliquées à $\mathcal{C}_0$.

2. Faire un tableau de variation conjoint de $(x(t), y(t))$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$.
   En déduire la représentation graphique de $\mathcal{C}_0$, puis de $\mathcal{C}$ que l'on donnera sur la copie.
3. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{t}$ de composantes $(-\cos(t), \sin(t))$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $M(t)$. Donner les composantes d'un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{t}$.
   En déduire qu'une équation de la tangente T au point $M(t)$ de la courbe $\mathcal{C}$ est

$$X\sin(t) + Y\cos(t) = \sin(t)\cos(t)$$

4. Pour $t \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, donner les coordonnées de $A(t)$ point d'intersection de T avec l'axe $(x'x)$ et de $B(t)$ point d'intersection de T avec l'axe $(y'y)$.
   [On posera $A(0) = (1,0), B(0) = (0,0),\ A\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = (0,0), B\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = (0,1)$.]
   Que peut-on dire de la distance **AB** ?



5. Pour $t \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, avec $A = A(t)$, $B = B(t)$ soit $C = C(t)$ tel que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. [$(OACB)$ est un rectangle].
   Montrer que la projection orthogonale de C sur (AB) est $M(t)$.
6. Montrer que la projection orthogonale de l'origine O sur (AB) est $P = P(t) = \left(\cos(t)\sin^2(t), \cos^2(t)\sin(t)\right)$ et que le milieu I de $[MP]$ est le centre du rectangle $(OACB)$.
7. On se propose de représenter graphiquement la courbe $\mathcal{Q}$ de représentation paramétrique :
   $\begin{cases} X(t) = \cos(t)\sin^2(t) \\ Y(t) = \cos^2(t)\sin(t) \end{cases}$ avec $t \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
   Donner les coordonnées de $P(0)$, $P\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $P\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ ainsi que la direction des vecteurs tangents à $\mathcal{Q}$ en ces points..
8. Pour $t \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, montrer que l'angle $\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP(t)}}$ a pour mesure $\theta = \dfrac{\pi}{2} - t$.
9. Pour $t \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, calculer la longueur $OP(t)$ en fonction de θ.
   En déduire l'équation de $\mathcal{Q}_0$ ($\mathcal{Q}$ restreinte à $t \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$) en coordonnées polaires.
10. En déduire la représentation graphique de $\mathcal{Q}_0$ que l'on donnera sur la copie.
    On représentera $\mathcal{Q}$ en utilisant, et en les justifiant, les mêmes transformations géométriques qu'au 1.

Mathématiques

Durée : 3 heures. Coefficient : 3
Les exercices sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1

On veut calculer les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -3u_n + v_n + 3w_n \\ v_{n+1} = -4u_n + v_n + 4w_n \\ w_{n+1} = -2u_n + v_n + 2w_n \end{cases}.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

On se place dans l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ des matrices réelles à 3 lignes et une colonne.

1. Déterminer la matrice carrée A telle que $X_{n+1} = AX_n$.
2. Donner une expression de X_n en fonction de A, n et X_0.
3. Montrer que $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice A. Donner la valeur propre, λ_1 qui lui est associée.
4. (a) Déterminer le polynôme caractéristique P_A de la matrice A.
   (b) Montrer que la matrice A admet trois valeurs propres distrinctes $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ à déterminer, avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. [$\lambda_1$ est la valeur propre trouvée à la question 3]
   (c) Déterminer un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_2 de la forme $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$.
   (d) Déterminer un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_3 de la forme $E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$.
5. Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$. On ne demande pas de calculer P^{-1}.
6. Exprimer pour tout entier naturel n la matrice A^n à l'aide de P, D et P^{-1} et n. En déduire que pour tout entier naturel non nul k, $A^{2k-1} = A$ et $A^{2k} = A^2$. Calculer A^2.
7. (a) On suppose que $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Déduire de ce qui précède l'expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que dans ce cas, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes à partir d'un certain rang à préciser. Quelles sont les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
8. On suppose ici que $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Exprimer en fonction de la parité de n l'expression des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Préciser lesquelles n'ont pas de limite.
9. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u_0, v_0, w_0 pour que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Quelles sont alors les limites de ces suites ?

Exercice 2

Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}$. $\varphi^{(n)}$ désigne sa dérivée n-ième, avec $\varphi^{(0)} = \varphi$.

1. Montrer par récurrence sur n qu'il existe une suite de fonctions polynômes P_n telles que $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n P_n(x)\varphi(x)$. Calculer P_0, P_1 et P_2.
2. Montrer par récurrence sur n la relation $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_n'(x)$. En déduire que P_n est un polynôme de degré n, de même parité que n, de coefficient dominant $a_n = 1$.
3. Calculer $P_3(x)$ et $P_4(x)$.
4. Montrer que $P_4(x)$ admet quatre racines réelles. Calculer ces racines.
5. On pose $\varphi_n(x) = P_n(x)\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}} = (-1)^n\varphi^{(n)}(x) = -\varphi_{n-1}'(x)$ avec $\varphi_0(x) = \varphi(x)$.
   (a) Justifier que pour tout entier naturel n, $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi_n(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_n(x) = 0$. En déduire que pour $n > 0$, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
   (b) Soient deux entiers k et n, avec $0 < k \leqslant n$. En utilisant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = k\int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-1}\varphi_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x$.
   (c) Montrer que pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = k!\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n-k}(x)\,\mathrm{d}x$. En déduire que
   – si $k < n$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$;
   – si $k = n$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = An!$ avec $A = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x > 0$. [Ne pas chercher à calculer A.]
   (d) Montrer que
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} P_m(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} P_m(x)P_n(x)\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 0 \text{ si } m < n \text{ et que } \int_{-\infty}^{+\infty} P_n^2(x)\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = An!$$

Exercice 3

Soient les fonctions f et F de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par $f(t) = e^{-|t|}$ et $F(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t-n)$ (1).

1. Soit $t \in [0,1]$. Justifier la convergence des séries puis calculer les sommes de
$$G(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(t-n) \quad \text{et} \quad H(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} f(t-n) = \sum_{k=1}^{+\infty} f(t+k).$$
2. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ $\quad F(t) = H(t) + e^{-|t|} + G(t) = A(e^t + e^{-t}) + e^{-t}$ (2) avec $A = \dfrac{1}{e-1}$.
3. Montrer, à partir de la définition (1), que $F(t)$ est paire et de période 1.
4. A l'aide de la formule (2), calculer $F(0)$ et $F(1)$. En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que pour tout réel a, une primitive de $e^t\cos(at)$ est $\dfrac{e^t}{1+a^2}(\cos(at)+a\sin(at))$, et qu'une primitive de $e^{-t}\cos(at)$ est $\dfrac{e^{-t}}{1+a^2}(-\cos(at)+a\sin(at))$.
6. Montrer que la somme de la série de Fourier de F peut s'écrire $S(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{1}^{+\infty} a_n\cos(2\pi nt)$.
7. Déduire de ce qui précède la valeur de a_0 et de a_n en fonction de n. [Il est bon de remarquer que $\sin(\pi n)$ s'annule pour tout n entier.]
8. Expliquer à l'aide d'un théorème pourquoi la série de Fourier $S(t)$ est convergente. Quelle est sa somme ?
9. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2n^2}$.
10. Soit $M = \displaystyle\int_0^1 F^2(t)dt$. On ne demande pas de calculer M. Exprimer à l'aide de M la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+4\pi^2n^2)^2}$ en justifiant votre réponse.

Exercice 4

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère la courbe $\mathcal{P}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}$, t étant un paramètre réel.

1. Reconnaître la nature de cette courbe.
2. Donner les composantes d'un vecteur tangent $\vec{T}(t)$ et d'un vecteur normal $\vec{N}(t)$ au point $M(t)$ de paramètre t de la courbe $\mathcal{P}$.

   On considère deux points quelconques A et B de cette courbe qui correspondent respectivement à deux valeurs distinctes a et b du paramètre t.
3. Donner une équation de la droite T_A tangente au point A à la courbe $\mathcal{P}$. Déterminer les coordonnées de l'intersection A' de T_A avec l'axe des abscisses.

   De même, donner une équation de la tangente T_B au point B à la courbe $\mathcal{P}$ et déterminer les coordonnées de l'intersection B' de T_B avec l'axe des abscisses.
4. Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[AB]$.
5. Déterminer les coordonnées du point M, point d'intersection des deux tangentes T_A et T_B.
6. Comparer les ordonnées des points I et M.
7. Déterminer les coordonnées du point C qui appartient à la courbe $\mathcal{P}$ et dont l'ordonnée est égale à celle de I.
8. Démontrer que la tangente T_C en C à la courbe $\mathcal{P}$ est parallèle à la droite (AB).
9. Pour $a = -1$ et $b = 2$, faire une figure comportant $\mathcal{P}$, A, B, A', B', $[AB]$, $T_A = (AA')$, $T_B = (BB')$, I, M, C, T_C.

Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les exercices sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaire et 2π-périodique telle que : $\forall x \in \left]0, 2\pi\right[, \quad f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$

1. On suppose de plus que f est définie sur $\mathbb{R}$. En déduire $f(0)$.
2. Représenter graphiquement f sur l'intervalle $[-\pi, 3\pi]$. On précisera sur cette figure la valeur de f aux points de discontinuité.
3. Calculer la série de Fourier de la fonction f. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$.

Soit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaire et 2π-périodique telle que : $\begin{cases} \forall x \in \left]0,1\right],\ g(x) = xf(1) \\ \forall x \in \left]1,\pi\right],\ g(x) = f(x) \end{cases}$.

4. Représenter la fonction g sur $[-\pi, 3\pi]$.
5. Calculer $\int_0^1 x\sin(nx)dx$, puis $\int_0^{\pi} (g(x) - f(x))\sin(nx)dx$. En déduire la série de Fourier g.
6. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)\sin(nx)}{n^2}$.
7. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2}$. Exprimer ces sommes à l'aide de π.
8. En appliquant la relation de Parseval à la fonction g, calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^4}$.

Exercice 2

Partie A

Soit un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3 de base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, f un endomorphisme de matrice $\mathbf{A}$ dans la base $\mathcal{B}$, et une matrice $\mathbf{S}$ avec $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Soient la famille de vecteurs $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ ayant pour composantes dans la base $\mathcal{B}$: $\vec{i}' : (1,2,2)$, $\vec{j}' : (2,-2,1)$, $\vec{k}' : (2,1,-2)$.

1) Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ est une base orthogonale de E.

2) Montrer que $\mathbf{S}^2 = \mathbf{S}.\mathbf{S} = 9\mathbf{I}$, (**I** étant la matrice de l'identité de $\mathcal{E}$). En déduire l'inverse de $\mathbf{S}$.

3) Montrer que $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ sont des vecteurs propres de **A.** Préciser les valeurs propres associées ainsi que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. Trouver une matrice diagonale **D** telle que

(1) $\quad \mathbf{A} = \mathbf{S}.\mathbf{D}.\mathbf{S}$

En déduire, sans calcul explicite de produit matriciel, que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}.\mathbf{A} = 81\mathbf{I}$.

Partie B

On considère trois fonctions (x,y,z) dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant le système différentiel :

$$(\mathrm{SD})\begin{cases} x'(t) = 7x(t) - 4y(t) - 4z(t) \\ y'(t) = -4x(t) + y(t) - 8z(t) \\ z'(t) = -4x(t) - 8y(t) + z(t) \end{cases}$$, avec la condition initiale(CI) $(x(0),y(0),z(0))=(9,0,9)$

Dans un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension 3, on sera amené à utiliser le repère orthonormé $\mathcal{R}=(\mathbf{O};\mathcal{B})=(\mathbf{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ainsi que le repère orthogonal $\mathcal{R}'=(\mathbf{O};\mathcal{B}')=(\mathbf{O};\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$.

1) Montrer que (SD) peut s'écrire $\mathbf{X}'(t)=\mathbf{A}.\mathbf{X}(t)$ en précisant ce qu'est $\mathbf{X}(t)$.

2) Soit la matrice colonne $\mathbf{U}(t)=\mathbf{S}.\mathbf{X}(t)$, avec $\mathbf{U}(t)={}^t(u(t)\ \ v(t)\ \ w(t))$. Montrer que $\mathrm{U}(t)$ vérifie un système différentiel simple (calculer $\mathbf{U}'(t)$ et utiliser l'équation (1) du A3)). Préciser la condition initiale $\mathbf{U}(0)$.

3) Calculer $\mathrm{U}(t)$. Si dans le repère orthonormé $\mathcal{R}'$, $\mathbf{m}_t$ est le point de coordonnées $(u(t), v(t), w(t))$ déterminer un vecteur (constant) $\vec{\mathbf{n}}\in\mathcal{E}$ tel que $\forall t\in\mathbb{R},\ \vec{\mathbf{n}}\perp\overrightarrow{\mathbf{Om}_t}$.

4) Déduire de ce qui précède l'unique fonction $\mathbf{X}(t)$ vérifiant (SD) et (CI). Si dans le repère $\mathcal{R}$, $\mathbf{M}_t$ est le point de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$ déterminer un vecteur (constant) $\vec{\mathbf{N}}\in\mathcal{E}$ tel que $\forall t\in\mathbb{R},\ \vec{\mathbf{N}}\perp\overrightarrow{\mathbf{OM}_t}$.

5) Pour $t\in\mathbb{R}$ le point $\mathbf{M}_t$ de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$ décrit la courbe $\mathcal{H}$. Montrer que $\mathcal{H}$ est incluse dans un plan dont on donnera une équation cartésienne.

6) Représenter graphiquement dans le repère $(\mathbf{O};\vec{i}',\vec{j}')$ la courbe de représentation paramétrique $(u(t),v(t))$. Quelle est la nature de cette courbe? Quel est son rapport avec la courbe $\mathcal{H}$?

Exercice 3

Les questions 3) et 4) sont indépendantes des questions 1) et 2)

Soit $f(x)=\int_0^{x/2}\frac{dv}{\cos(v)}$ pour $x\in]-\pi,\pi[$.

1.a) Calculer $f'(x)$. Montrer que f est impaire et strictement croissante.

1.b) Donner un équivalent simple de $\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)=\sin u$ au voisinage de 0. En déduire que $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi^-}\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dv}{\sin v}=+\infty$, et que f est une bijection de $]-\pi,\pi[$ vers $\mathbb{R}$.

On note $g=f^{-1}$ et donc dans leurs domaines de définition on a $y=f(x)\Leftrightarrow x=g(y)$.

2) a) Montrer que $g'(y)=2\cos\left(\frac{g(y)}{2}\right)$. Calculer $g''(y)$.

b) Montrer que $g(t)$ est solution de l'équation différentielle en t :

$$X''(t)+\sin(X(t))=0 \text{ avec } t\geq 0, X(0)=0, X'(0)=a>0$$

pour une valeur de a à préciser.

3) Calculer $h(t)=\int_0^t\frac{2du}{1-u^2}$ pour $t\in]-1,1[$ [on utilisera la décomposition $\frac{2}{1-u^2}=\frac{a}{1-u}+\frac{b}{1+u}$].

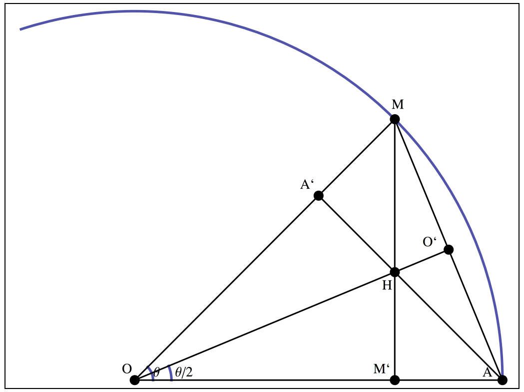
4) Dans l'intégrale définissant $f(x)$, on pose $u=\tan\left(\frac{v}{2}\right)$.

a) Exprimer v en fonction de u, puis dv en fonction de u et du.

b) Montrer que $\cos(v)=\frac{1-u^2}{1+u^2}$ [Indication : on peut calculer d'abord $\cos^2\left(\frac{v}{2}\right)$].

c) Faire le calcul de l'intégrale définissant $f(x)$ et en déduire une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 4



Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère le cercle C, de centre O et de rayon 1. On note A le point de coordonnées (1,0). Soit M un point du cercle C tel que $\theta=(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ avec $0\leq\theta<\pi$, O' la projection orthogonale de O sur (AM) (c'est aussi le milieu de $[A,M]$), A' la projection orthogonale de A sur (OM), M' la projection orthogonale de M sur (OA). L'intersection des trois hauteurs $(OO'),(AA'),(MM')$ est l'orthocentre H du triangle (OAM).

1) Donner les coordonnées des points M, M', O' en fonction de θ.

2) Montrer que les coordonnées $(x(\theta),y(\theta))$ du point H sont $\left(\cos(\theta),\cos(\theta)\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$.

(On conviendra que pour $\theta=0$, H=A)

3) Calculer $(x'(\theta),y'(\theta))$.

4) On rappelle que si on pose $t=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, on a : $\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Montrer, en exprimant tout à l'aide de *t*, que $y'(\theta)=\cos\theta-\frac{1}{1+\cos\theta}$. En déduire le signe de $y'(\theta)$ pour $0\leq\theta<\pi$. On notera θ_0 le réel de $[0,\pi]$ tel que $\cos(\theta_0)=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

5) Faire le tableau de variation conjoint de $(x(\theta),y(\theta))$ pour $0\leq\theta<\pi$. On précisera les valeurs ou les limites de $x(\theta),y(\theta)$ et de $x'(\theta),y'(\theta)$ en 0 et π ainsi qu'aux extrema éventuels de x et y.

6) On appelle Γ la courbe paramétrée décrite par $(x(\theta),y(\theta))$. Montrer que Γ admet une asymptote verticale à préciser.

7) Donner une représentation graphique de Γ en plaçant l'asymptote, les points et les tangentes à ces points pour les valeurs 0, θ_0, $\frac{\pi}{2}$ de θ.[On prendra $\cos(\theta_0)\simeq 0{,}62$ et $\cos(\theta_0)\tan\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\simeq 0{,}30$]

8) Montrer que les coordonnées (x,y) des points de la courbe Γ vérifient l'équation : $x(x^2+y^2)=x^2-y^2$.

Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les exercices sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1

On pose pour k entier naturel, $I_k = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin\theta)^{2k}d\theta$ et $J_k = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin\theta)^{2k}(\cos\theta)^2 d\theta$.

1) Calculer I_0 et I_1.
2) Montrer que pour tout $k>0$, $I_{k-1} - I_k = J_{k-1}$.
3) Avec une intégration par parties, montrer que pour tout $k>0$ $J_{k-1} = \dfrac{1}{2k-1}I_k$. En déduire la relation de récurrence (R) $I_k = \dfrac{2k-1}{2k}I_{k-1}$.

4) Démontrer par récurrence que pour tout $k>0$ $I_k = \dfrac{(2k)!}{4^k(k!)^2}$ [On précisera bien les hypothèses de la démonstration par récurrence]

On pose $u_n = \ln(I_n)$.
5) Démontrer, à partir de la relation de récurrence (R), que pour tout entier n>0 : $u_n = u_{n-1} + \ln\left(1-\dfrac{1}{2n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\dfrac{1}{2k}\right)$
6a) Étudier la fonction h définie par $h(x) = \ln(1+x) - x$ sur $]-1,0]$. Donner son signe.

6b) Montrer que pour tout entier $k>0$, $\ln\left(1-\dfrac{1}{2k}\right) < \dfrac{-1}{2k} < 0$.

6c) Donner $\lim_{n\to\infty} u_n$, puis $\lim_{n\to\infty} I_n$.

7) On pose $S_n(x,\theta) = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{(2k)!}(x\sin\theta)^{2k}$ et $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k}$

Montrer que $g_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}S_n(x,\theta)d\theta$.

8) Donner le rayon de convergence de la série entière $g(x) = \sum_{0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k}$

On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\varphi(x) = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin(\theta))d\theta$. [Remarque : ne pas chercher à calculer cette intégrale]
9a) Donner le développement en série entière de la fonction cosinus et donner son rayon de convergence.
9b) En utilisant ce développement dans φ, en déduire que

$|\varphi(x) - g_n(x)| \le \left(\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin\theta)^{2n}d\theta\right)R_n(x)$ avec $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$.

10a) Donner le développment en série entière de la fonction cosinus hyperbolique (ch) et donner son rayon de convergence.
10b) En déduire que pour tout réel x, $R_n(x) \le \operatorname{ch}(x)$, puis que $|\varphi(x) - g_n(x)| \le ch(x)I_n$.
11) En déduire que pour tout réel x , $g(x) = \varphi(x)$.

Exercice 2

Soient deux réels positifs a et p avec p>0 .
1) Sachant que $\sin(ax) = \operatorname{Im}(e^{iax})$, montrer que $\int_0^{\infty}e^{-px}\sin(ax)dx = \dfrac{a}{a^2+p^2}$

On pose $f(a,p) = \dfrac{a}{a^2+p^2}$

2a) Soit $F(p) = \int_0^{\pi/2} f(\sin(\theta),p)\,d\theta$. En posant $t = \dfrac{\cos(\theta)}{\sqrt{1+p^2}}$, montrer que $F(p) = G(p)\int_a^b \dfrac{dt}{1-t^2}$ en précisant $G(p)$ et les bornes a,b de l'intégrale.
2b) Déterminer A et B tels que pour tout réel différent de +1 et -1, $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{A}{1-t} + \dfrac{B}{1+t}$.
2c) En déduire par intégration la valeur de $F(p)$.

Exercice 3

Soit un espace vectoriel E de dimension 3 de base $\mathcal{B} = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et f un endomorphimse dont la matrice **A** dans la base $\mathcal{B}$ est $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1a) Donner le polynôme caractéristique de la matrice **A**.
1b) Montrer que f a deux valeurs propres, λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 > \lambda_2$. [Indication : on vérifiera que $\lambda_1=2$ est la plus grande des valeurs propres]
2) Déterminer deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tels que $(\vec{u})$ est une base du sous-espace propre $\mathcal{U}_{\lambda_1}$ et $(\vec{v})$ une base du sous-espace propre $\mathcal{U}_{\lambda_2}$.
3) Pourquoi la matrice **A** n'est elle pas diagonalisable ?
4a) Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ est une base de E. [$\vec{k}$ est de composantes $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$].
4b) Calculer les composantes de $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$, $f(\vec{k})$ dans la base $\mathcal{B}$
4c) Calculer les composantes de $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$, $f(\vec{k})$ dans la base $\mathcal{B}'$
4d) Montrer que dans la base $\mathcal{B}'$, la matrice de f est de la forme: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en précisant α .
5) Calculer $\mathbf{B}^2$, $\mathbf{B}^3$. En déduire une formule pour $\mathbf{B}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Cette formule sera démontrée par récurrence.
6) Donner la matrice de passage **P** de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$, puis calculer $\mathbf{P}^{-1}$.

7) Montrer que $\mathbf{B}$ est inversible. Calculer $\mathbf{B}^{-1}$. Démontrer que la formule trouvée au 5) est valable pour $n \in \mathbb{Z}$. [On note $\mathbf{B}^{-p} = \left(\mathbf{B}^{-1}\right)^{p}$]

8) En déduire l'expression de $\mathbf{A}^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i}\ ,\vec{j}\right)$. On considère la courbe C de représentation paramétrique $M(t) = \left(x(t), y(t)\right)$ définie par:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t)\ \sin^2(t) \\ y(t) = \ \sin(t)\ \cos^2(t) \end{cases}$$

1) Justifier qu'il suffit de prendre le paramètre t dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ pour étudier toute la courbe.

2a) Comparer $M(-t)$ avec $M(t)$ et montrer que C admet une symétrie d'axe à préciser.

2b) Comparer $M(\pi - t)$ avec $M(t)$ et montrer que C admet une symétrie d'axe à préciser.

2c) Comparer $M\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$ avec $M(t)$ et montrer que C admet une symétrie d'axe à préciser.

3) Proposer un intervalle d'étude I qui tienne compte des symétries précédemment trouvées. Préciser par quelles symétries successives on obtient la courbe C à partir du tracé obtenu pour $t \in I$

4) Calculer les dérivées de x et y et montrer qu'elles peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} x'(t) = \sin t\left(3\cos^2 t - 1\right) \\ y'(t) = \cos t\left(1 - 3\sin^2 t\right) \end{cases}$$

Étudier les variations des fonctions x et y et dresser leur tableau de variation conjoint sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. On notera t_0 le réel de $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ tel que $\sin t_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

5) Préciser les coordonnées de $M(0)$, $M(t_0)$ et $M\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ ainsi que les vecteurs tangents en ces points

6) Tracer en gras la partie de la courbe C pour $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et en pointillés la partie complétée par les transformations géométriques que l'on précisera.

7) Montrer que si (ρ, θ) sont les coordonnées polaires d'un point de la courbe C, on a $4\rho^2 = \sin^2(2\theta)$

8) En déduire que la courbe C est inscrite dans un disque de centre O et d'un rayon à préciser.

Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les exercices sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1

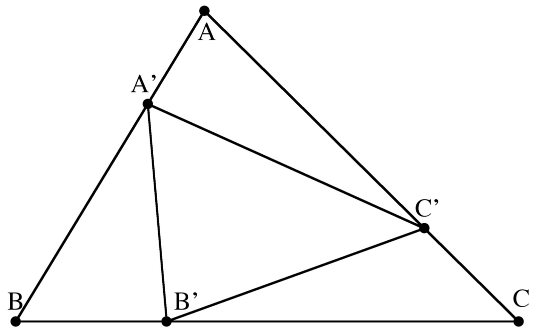


Fig. 1

Soit (ABC) un triangle et p un réel de l'intervalle $]0,1[$. On considère les points A', B' et C' définis par :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AA'} = p\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BB'} = p\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{CC'} = p\overrightarrow{CA} \end{cases}$$

Dans le plan complexe, on note a, b et c les affixes des points respectifs A, B, C, et a', b' et c' les affixes des points respectifs A', B', C'.

On note $\omega = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, on rappelle que $\omega^3 = 1$, $1 + \omega + \omega^2 = 0$ et que $\omega^2 = \overline{\omega}$.

1. Montrer que $a' = (1-p)a + pb$ Déterminer de même les affixes b' et c' des points B' et C' en fonction de a, b, c et p.

2. Démontrer que les triangles $(A'B'C')$ et (ABC) ont le même centre de gravité G d'affixe g.

3. On considère l'application linéaire h de $\mathbb{C}^3$ dans $\mathbb{C}^3$ qui au triplet (a,b,c) associe le triplet (a',b',c').

On pose $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\mathbf{T}' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$

3.a. Déterminer la matrice $\mathbf{A}$ telle que $\mathbf{T}' = \mathbf{AT}$.

3.b. Exprimer la matrice $\mathbf{A}$ à l'aide des matrices $\mathbf{I}$ et $\mathbf{J}$.

4.a. Calculer le polynôme caractéristique de $\mathbf{J}$ et déterminer les valeurs propres de $\mathbf{J}$ à l'aide de ω et ω^2.

4.b. Déterminer la matrice $\mathbf{D}$ diagonale telle que $\mathbf{JP}=\mathbf{PD}$, $\mathbf{P}$ étant la matrice définie plus haut.

5.a. Exprimer $\mathbf{P}^2$ en fonction de $\mathbf{K}$.

5.b. Calculer $\mathbf{K}^2$.

5.c. Exprimer $\mathbf{P}^{-1}$ en fonction de $\mathbf{P}$ et de $\mathbf{K}$; puis calculer explicitement $\mathbf{P}^{-1}$.

6. Déterminer la matrice Δ diagonale telle que $\mathbf{A}=\mathbf{P}\Delta\mathbf{P}^{-1}$.

On considère la suite $(\mathbf{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\mathbf{T}_0=\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$, $\mathbf{T}_{n+1}=\mathbf{A}\mathbf{T}_n$

7.a. Calculer $|1-p+p\omega|^2$ en fonction du nombre réel p.

7.b. En déduire que pour $p\in\,]0,1[$, $0<|1-p+p\omega|<1$ et $0<\left|1-p+p\omega^2\right|<1$

7.c. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}|1-p+p\omega|^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|1-p+p\omega^2\right|^n$

7.d. On dit qu'une suite de matrices converge si les suites respectives de chaque coefficient matriciel convergent. La matrice ayant pour coefficients les limites respectives de ces suites est dite la limite de la suite de matrices. Quelle est la limite de la suite $(\mathbf{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Exprimer cette limite à l'aide de g.

7.e. Quel résultat géométrique peut-on en tirer ?

Exercice 2

Soient les fonctions $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}e^{2ikx}$ et $S_n(x)=2\,\mathrm{Re}(T_n(x))-1$ pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$, $n\in\mathbb{N}$

Rappel: $\sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ et $2\sin(a)\cos(b)=\sin(a+b)+\sin(a-b)$

1. Calculer $T_n(x)$, en déduire que $\mathrm{Re}(T_n(x))=\cos(nx)\frac{\sin[(n+1)x]}{\sin(x)}$

2. a) Montrer que $S_n(x)=\frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin(x)}=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(2kx)$. On posera $S_n(0)=S_n(\pi)=2n+1$

b) Interpréter cela comme une série de Fourier de période π, et en déduire la valeur de $I_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}S_n(x)dx$, puis celle de $J_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(S_n(x))^2dx$.

3. Soit la fonction π-périodique définie par : $f(0)=0$ et $f(x)=\ln(\sin(x))$ si $0<x<\pi$

a) Que vaut $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln(x)^2$? En déduire que $\int_0^1(\ln(x))^2dx$ est convergente.

b) Montrer que $\ln(\sin(x))\underset{x\to0^+}{\sim}\ln(x)$. En déduire que $\int_0^{\pi}(f(x))^2dx$ converge.

On admettra que cette propriété de carré intégrable permet d'étendre à f le développement en série de Fourier et ses propriétés connues pour les fonctions C^1 par morceaux.

c) Pour $x\in\,]0,\pi[$, montrer que $f(-x)=f(\pi-x)=f(x)$. En déduire que le développement en série de Fourier de f s'écrit : $S_f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2nx)$, donner l'expression intégrale de a_n pour $n>0$.

d) Que vaut $\lim\limits_{x\to0+}\ln(\sin(x))\sin(2nx)$? En déduire en intégrant par parties que si $n\in\mathbb{N}^*$

$a_n=\frac{-1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos(x)\frac{\sin(2nx)}{\sin(x)}dx$ puis que $a_n=\frac{-1}{2n}(I_n+I_{n-1})=\frac{-1}{n}$.

4. On admet que $f(x)=S_f(x)$ si $0<x<\pi$. En choisissant une valeur particulière de x, montrer que $a_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Justifier que cette dernière série converge.

5. Quelle est le rayon de convergence et la somme de la série entière $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$?

En admettant que cette somme est continue sur [0,1], en déduire la valeur de a_0.

6. On rappelle que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Donner la valeur de $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\ln(\sin(x))]^2dx$.

Exercice 3

On note ($\mathcal{H}$) l'hyperbole d' équation cartésienne $y=\frac{1}{x}$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

On souhaite déterminer les coordonnées (a,b) du centre Ω du cercle (C) qui passe par O et qui est tangent en un point $\mathrm{M}\left(t,\frac{1}{t}\right)$, $t\in\mathbb{R}^*$, à ($\mathcal{H}$).

Dire que le cercle (C) est tangent au point M à l'hyperbole ($\mathcal{H}$), c'est dire que $\mathrm{M}\in(C)\cap(\mathcal{H})$ et que la normale ($\mathcal{N}$) à ($\mathcal{H}$) au point M contient le centre Ω du cercle (C).

1.a. Donner les composantes d'un vecteur $\vec{T}$ tangent à ($\mathcal{H}$) au point $\mathrm{M}\left(t,\frac{1}{t}\right)$.

1.b. En déduire une équation cartésienne de la normale ($\mathcal{N}$) à ($\mathcal{H}$) au point $\mathrm{M}\left(t,\frac{1}{t}\right)$.

1.c. Écrire que le point $\Omega(a,b)$ appartient à ($\mathcal{N}$) et en déduire qu'une relation (1) liant a, b et t est :

(1) : $at^3-bt\ =\ t^4-1$

2. Écrire que $\mathrm{O}\Omega^2=\mathrm{M}\Omega^2$ et en déduire qu'une relation (2) liant a, b et t est :

(2) : $at^3+bt\ =\ \frac{1}{2}(t^4+1)$

3. Déduire des relations (1) et (2) une représentation paramétrique des centres Ω quand t varie.

4. On souhaite étudier la courbe (Γ) dont une représentation paramétrique est :

$$x(t)=\frac{3t^4-1}{4t^3}\quad\text{et}\quad y(t)=\frac{-t^4+3}{4t}\quad\text{avec } t\in\mathbb{R}^*$$

4.a. Montrer que la courbe (Γ) admet une symétrie de centre O.

4.b. Calculer $x\left(\frac{1}{t}\right)$ et $y\left(\frac{1}{t}\right)$. En déduire une nouvelle symétrie pour la courbe (Γ).

4.c. Expliquer pourquoi on peut se contenter d'étudier les variations de $x(t),y(t)$ quand le paramètre t appartient à l'intervalle $]0,1]$

5. Donner le tableau des variations conjointes de $x(t),y(t)$ pour $t\in\,]0,1]$. Donner les coordonnées du point $A=(x(1),y(1))$, en déduire celles de $B=(x(-1),y(-1))$.

6. Voici (fig.2) dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ les graphes de ($\mathcal{H}$) en pointillé et de (Γ) en gras, et les première et deuxième bissectrices.

Les deux branches de (Γ) sont divisées par la première bissectrice en 4 parties (Γ_1), (Γ_2) limitées par A, (Γ_3), (Γ_4) limitées par B .

a) Préciser, en le justifiant, la partie de (Γ) obtenue quand $t \in \left]0,1\right]$.

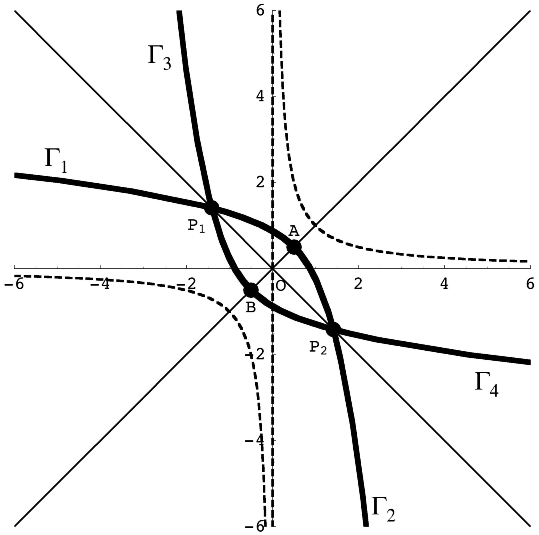


fig. 2

b) Déterminer les paramètres t_1 et t_2 des points doubles P_1, P_2, (utiliser le fait qu'ils sont invariants si on change t en $-\frac{1}{t}$). On ramènera leur recherche à la résolution de l'équation $T^3 - 3T^2 - 3T + 1 = 0$, de racine évidente -1, et on justifera qu'il n'y a que deux points doubles, et que $t_2 = \frac{1}{t_1}$.

c) Déterminer les coordonnées de P_1 (on pourra calculer d'abord $y(t_1)$ puis $y(t_1)^2$ pour trouver une simplification)

Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les exercices sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1

Pour b et t strictement positifs, on considère les fonctions F et I définies par :

$F(t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} e^{-tx} dx$, et $I(b) = \int_0^{b} \frac{\sin(x)}{x} dx$

1) a- Que vaut $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$? Justifier que F et I sont définies sur $\mathbb{R}_*^+$.

b- Montrer que $\forall x \geq 0, |\sin x| \leq x$. En déduire que $|F(t)| \leq \frac{1}{t}$, puis calculer $\lim\limits_{t \to \infty} F(t)$.

2) On admet que F' peut se calculer en dérivant sous l'intégrale et donc que $F'(t) = \int_0^{\infty} -\sin(x) e^{-tx} dx$ pour $t > 0$. Montrer que $F'(t) = \frac{-1}{1+t^2}$.

En déduire la valeur de $F(t)$ pour $t > 0$, en utilisant la limite trouvée au 1)b

3) a- Donner le développement en série entière de $\frac{\sin(x)}{x}$.

b- Montrer par récurrence que $\forall n \geq 0, \int_0^{\infty} u^n e^{-u} du = n!$

c- On admet que pour t>1 on peut intégrer terme à terme le développement en série obtenu dans l'intégrale définissant $F(t)$. En déduire que si t>1 on a :

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)t^{2k+1}}$$

d- Comment retrouver ce résultat à partir de l'expression de $F(t)$ obtenue en 2) ?

4) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\lim\limits_{b \to \infty} \int_1^b \frac{\sin(x)}{x} dx$ existe.

On posera alors : $F(0) = \lim\limits_{b \to \infty} I(b) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

5) On admet que F est continue en 0. En déduire la valeur de $F(0)$.

6) Montrer que $|I((n+1)\pi) - I(n\pi)| \geq \frac{2}{(n+1)\pi}$. En déduire que $\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| dx$ diverge.

Exercice 2

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, soit P la parabole d'équation cartésienne $y^2 = 4x$ de représentation paramétrique pour $u \in \mathbb{R}$

$u \mapsto M(u) = (x(u), y(u)) = (u^2, 2u)$

1.a. Donner un vecteur directeur $\vec{t}(u)$ de la tangente au point $M(u)$ à la parabole P.

1.b. Donner un vecteur directeur $\vec{n}(u)$ de la normale au point $M(u)$ à la parabole P.
1.c- Écrire une équation cartésienne de la tangente $\mathrm{T}(u)$ au point $M(u)$.
2. On se donne le point $A(a,0)$ de l'axe des abscisses. Donner un vecteur directeur de la droite contenant A et orthogonale à $\mathrm{T}(u)$. Calculer les coordonnées de $H(u)$, projection orthogonale de $A(a,0)$ sur $\mathrm{T}(u)$. On notera $\left(X(u),Y(u)\right)$ les coordonnées de $H(u)$. (Ces coordonnées dépendent du paramètre a)
On appelle C_a la courbe de représentation paramétrique $u \mapsto H(u) = \left(X(u),Y(u)\right)$
3. Montrer que la courbe C_a admet la même asymptote Δ_a (dépendant de a) quand u tend vers $+\infty$ et quand u tend vers $-\infty$, et donner cette asymptote.
4. Montrer qu'il existe une unique valeur de a telle que C_a est une droite. Préciser la valeur de a et la droite trouvée.
On choisit maintenant $a=0$, c'est-à-dire que le point A est choisi à l'origine O du repère.
5. Faire une étude et un tableau de variation conjoint de $X(u)$ et de $Y(u)$. En déduire que la courbe C_0 admet une tangente en $H(u)$ ayant un vecteur directeur de composantes $\left(-2,u\left(3+u^2\right)\right)$. Préciser la nature du point $H(0)$.
6. Représenter sur une même figure la parabole P, la courbe C_0, l'asymptote Δ_0.

Exercice 3

On pose pour tout couple d'entiers naturels (n, p) : $I_p(n) = \int_0^\pi x^p \cos(2nx)\,dx$

1. Calculer $I_p(0)$. Montrer que pour $n>0$, $I_0(n)=0$, $I_1(n)=0$, $I_2(n)=\dfrac{\pi}{2n^2}$.

f est une fonction π-périodique telle que : $\forall x \in [0,\pi[,\ f(x) = \alpha x^2 + \beta x$
On fait l'hypothèse qu'il existe deux réels α,β tels que le développement en série de Fourier de *f* est : $S_f(x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}\cos(2nx) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2nx)$

2.a) Déterminer les conditions sur α,β telles que $a_0 = \dfrac{\pi^2}{6}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_n = \dfrac{-1}{n^2}$.
b) Déterminer les valeurs de α,β qui répondent à ces conditions.
c) Représenter graphiquement la fonction *f* sur l'intervalle $[-\pi,+\pi]$.
d) Soit $x \in]-\pi,0[$, on a donc $-x \in]0,\pi[$ et aussi $\pi + x \in]0,\pi[$. Montrer pour les valeurs de α et β trouvées à la question *2.a.* $f(-x) = f(\pi + x)$.
e) En déduire que la fonction *f* est paire et continue sur $\mathbb{R}$.

3. Que peut-on en déduire pour les coefficients b_n.
4. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ $f(x) = S_f(x)$, en énonçant le théorème qui le justifie.
5. Déduire du résultat précédent la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

6. Déduire d'un des résultats précédents la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ et de $\sum_{p=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2p+1)^2}$.
7. Appliquer le théorème de Parseval et en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4}$.

Exercice 4

Dans un espace vectoriel E de dimension 3 on considère l'endomorphisme *f* de matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = \left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Dans E, l'application identique *id* a pour matrice **I**.
L'objet de l'exercice est de déterminer toutes les matrices **M** telles que $\mathbf{M}^2 = \mathbf{A}$.
1. Montrer que ker *f* est de dimension 1 et déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de ker *f* de la forme : $\vec{u} = \vec{j} + a\vec{k}$ [on calculera a].
2. Calculer le polynôme caractéristique de **A**.Déterminer ses racines.
3. Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre non nulle de **A**. Montrer qu'il est de dimension 1 et qu'il est engendré par un vecteur de la forme $\vec{v} = \vec{j} + b\vec{k}$ [on calculera b].
4. La matrice **A** est elle diagonalisable? Expliquer pourquoi.
5.a) Montrer que $\mathcal{B}' = \left(\vec{u},\vec{v},\vec{i}\right)$ est une base de E.
b) Déterminer la matrice **B** de *f* dans la base $\mathcal{B}'$.
c) Déterminer la matrice de passage **P** de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ et calculer son inverse $\mathbf{P}^{-1}$.
d) Donner une relation entre **A**, **P** et **B**.
Soit **M** une matrice telle que $\mathbf{M}^2 = \mathbf{A}$.
On note g l'endomorphisme de matrice **M** dans la base $\mathcal{B}$. On a donc $g \circ g = f$
6. a) Montrer que l'on a $f \circ g = g \circ f$.
b) Calculer de deux manières $f \circ g(\vec{u})$ et $f \circ g(\vec{v})$. En déduire que $g(\vec{u}) = \vec{0}$ et qu'il existe un réel x tel $g(\vec{v}) = x\vec{v}$.
c) En déduire que l'on a $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{MP} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s \\ 0 & x & t \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$.
d) Déterminer les deux valeurs possibles de $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{MP}$ puis de **M**.

Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les exercices sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1

Rappel: la fonction arctan est une bijection strictement croissante de $]-\infty,+\infty[$ vers $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, sa dérivée vérifie $\arctan'(x)=\frac{1}{x^2+1}$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ \tan(\arctan(x))=x$

Soit un entier $k>0$ fixé et les fonctions f_k, g_k définies sur $\mathbb{R}$ par:

$$f_k : x\mapsto \arctan(x+k\pi) \text{ et } g_k(x)=f_k(x)-x.$$

1) Calculer $f_k'(x)$ et montrer que $\forall x>0,\ 0<f_k'(x)\le\delta_k<1$ pour une constante δ_k à calculer en fonction de *k*.

2) Étudier les variations de g_k sur $[0,+\infty[$. En déduire l'existence d'un unique réel $\theta_k\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ solution de l'équation $\theta_k=f_k(\theta_k)$.

3) On définit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0=0$, et $\forall n\ge1,\ u_n=f_k(u_{n-1})$.

   a- Montrer que $0\le\theta_k-u_n\le\delta_k(\theta_k-u_{n-1})$.

   b- En déduire que $\lim_{n\to+\infty}u_n=\theta_k$

   c- Pour *k*=1, déterminer *n* pour que $\theta_1-u_n<10^{-15}$

4) Montrer que $\lim_{k\to+\infty}\theta_k=\frac{\pi}{2}$ (comparer $f_k(0)$ et θ_k).

5) Montrer que $\forall x>0,\quad \frac{\pi}{2}-\arctan(x)=\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. En déduire que si on pose $\tau_k=\frac{\pi}{2}-\theta_k$, alors $\arctan\left(\frac{1}{(k+1/2)\pi}\right)\le\tau_k\le\arctan\left(\frac{1}{k\pi}\right)$.

6) Donner un équivalent de τ_k lorsque *k* tend vers $+\infty$ (s'exprimant simplement en fonction de *k).*

Exercice 2

Les deux parties de cet exercice sont largement indépendantes.

Partie I

Soient deux réels *p* et *q*. On considère la matrice **N** telle que : $\mathbf{N}=\begin{pmatrix}0&0&q\\1&0&p\\0&1&0\end{pmatrix}$

1) Calculer le polynôme caractéristique $P_{\mathbf{N}}(x)$ de la matrice **N**.

On rappelle qu'un polynôme $P(x)$ admet une racine x_0 double s'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x)=(x-x_0)^2Q(x)$ avec $Q(x_0)\neq0$.

2) Montrer que si x_0 est une racine double de $P(x)$ alors x_0 est aussi une racine du polynôme dérivé $P'(x)$.

On suppose qu'il existe un réel α racine double du polynôme caractéristique $P_{\mathbf{N}}(x)$.

3) Montrer que nécessairement *p* et *q* doivent vérifier la relation (R) $4p^3=27q^2$.

4) Déterminer les plus petits entiers positifs *p* et *q* qui vérifient (R)

Partie II

Dans cette partie on prends *p=3* et *q=2*. La matrice **N** est donc ici $\mathbf{N}=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&3\\0&1&0\end{pmatrix}$

1) Déterminer le polynôme caractéristique $P_{\mathbf{N}}(x)$ de cette matrice **N**.

2) Déterminer les racines λ_1 et λ_2 du polynôme $P_{\mathbf{N}}(x)$, λ_1 etant la racine négative. Préciser leurs multiplicités.

3) Déterminer une base de E_1, sous-espace propre de **N** associé à la valeur propre λ_1.

4) Déterminer une base de E_2, sous-espace propre de **N** associé à la valeur propre λ_2.

5) Quelles sont les dimensions des sous espaces propres E_1 et E_2. La matrice **N** est-elle diagonalisable ? (On précisera pourquoi.)

6) On pose $\mathbf{M}=\mathbf{N}+\mathbf{I}$ où $\mathbf{I}$ est la matrice de l'identité.

a) Calculer $\mathbf{P}=\frac{1}{9}\mathbf{M}^2$

b) Calculer les valeurs propres et une base des sous-espaces propres de $\mathbf{P}$.

c) Montrer que $\mathbf{P}$ est la matrice d'une projection.

d) Préciser les sous-espaces images et noyau de la matrice $\mathbf{P}$.

Exercice 3

On rappelle que les fonctions ch, sh sont définies par

$\mathrm{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\mathrm{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, et que $e^{ni\pi}=(-1)^n$

On considère la fonction 2π-périodique définie sur [-π,+π[par $f(x)=e^x$ Sa série de Fourier est $S(x)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

1) Calculer a_0. Donner son expressionà l'aide de $\mathrm{sh}(\pi)$.

2) Donner une primitive de la fonction $x\mapsto e^{x(1+in)}$. On pose $d_n=a_n+i\,b_n$. Calculer les coefficients d_n, a_n, b_n en fonction de a_0 et n.

3) Justifier que la somme de la série $S(x)$ existe pour tout x, et donner sa valeur pour $x\in]-\pi,+\pi[$. Calculer $S(\pi)$ et donner son expression à l'aide de $f(x)$.

4) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ en fonction de $\frac{\mathrm{ch}(\pi)}{\mathrm{sh}(\pi)}$.

5) Appliquer l'identité de Parseval et retrouver ainsi la somme calculée en 4).

Exercice 4

Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j})$. On considère la courbe $\mathcal{L}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x(t)=\dfrac{2t^3}{t^4+1} \\ y(t)=\dfrac{2t}{t^4+1} \end{cases}$. Les points de cette courbe seront notés $M(t)$ en prenant t dans $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ avec la convention que $M(\infty)$ correspond à la limite de $x(t)$ et $y(t)$ en $+\infty$ ou $-\infty$

1) Montrer que la courbe $\mathcal{L}$ admet une symétrie centrale par rapport à O.

2) En changeant t en $\dfrac{1}{t}$ montrer que la courbe $\mathcal{L}$ admet une autre symétrie et qu'ainsi on peut réduire l'étude de la courbe aux t de l'intervalle $[0,1]$

3) Donner le tableau de variation conjoint des fonctions x et y sur l'intervalle $[0,1]$

4) Donner sur votre copie le tableau de valeurs ci-dessous rempli en écrivant les résultats sous la forme de fractions écrites le plus simplement possible:

t	0	$1/2$	$1/\sqrt[4]{3}$	1
$x(t)$				
$y(t)$				
$x'(t)$				
$y'(t)$				

5) Préciser la limite de $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ quand t tend vers 0, puis quand t tend vers $+\infty$

6) Représenter graphiquement la courbe $\mathcal{L}$ dans le repère orthonormé $\mathcal{R}$. (Choisir la longueur unité assez grande , de l'ordre de 8 à 10 cm). On placera les points $M(0)$, $M(1/2)$, $M(1/\sqrt[4]{3})$, $M(1)$ ainsi que les tangentes en ces points. On donne $\sqrt[4]{3}\simeq 1,3$ et $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\simeq 0,76$. Sur cette courbe on surlignera la partie correspondant aux valeurs du paramètre sur l'intervalle $[0,1]$

On considère l'application f du plan privé de l'origine dans le plan qui au point M de coordonnées (x,y) associe le point N de coordonnées (X,Y) avec : $\begin{cases} X=\dfrac{x}{x^2+y^2} \\ Y=\dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$

7) Déterminer l'ensemble C des points invariants de cette transformation, c'est à dire les points M du plan tels que f(M) = M.

8) Donner une représentation paramétrique $(X(t),Y(t))$ de l'image par f de $\mathcal{L}^*=\mathcal{L}\setminus\{O\}$ (La courbe $\mathcal{L}$ privée de l'origine du repère)

9) Calculer $X(t)\times Y(t)$ et en déduire la nature de la courbe image.

Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les trois problèmes sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.

Problème 1

Soient les intégrales $I(x)=\int_0^1 \dfrac{t^{x-1}}{1+t}dt$ avec $0<x<1$ et $J=\int_0^1 \dfrac{\ln(t)}{1+t}dt$.

1) Évaluer $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k$, déduisez-en une expression de $\dfrac{1}{1+t}$ incluant cette somme.

2) Montrer que l'intégrale $I(x)$ est convergente.

3) Montrer que $I(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{(-1)^k}{k+x}+R_n(x)$ et donner l'expression intégrale de $R_n(x)$.

4) Montrer que $|R_n(x)|\le\dfrac{1}{n}$. En déduire que la série $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k+x}$ est convergente, et que $I(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k+x}$

5) a- Montrer que pour tout entier naturel k, $\int_0^1 t^k\ln(t)dt=\dfrac{-1}{(k+1)^2}$

b- Montrer que $J=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k^2}+T_n$ avec $T_n=(-1)^n\int_0^1\dfrac{t^n\ln(t)}{1+t}dt$

c- Montrer que $|T_n|\le\dfrac{1}{(n+1)^2}$, en déduire que $J=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^2}$

d- Sachant que $S=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$, montrer que $J=-\dfrac{\pi^2}{12}$

T.S.V.P

Problème 2

Partie I

On considère l'ensemble des matrices à coefficients complexes, $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

On note **I** et **J** les matrices :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

I.1) Calculer $\mathbf{J}^2$.

I.2) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres (à coefficients complexes) de la matrice **J**.

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de la forme $\mathbf{M} = a\mathbf{I} + b\mathbf{J}$ où a et b sont des nombres complexes.

I.3) Calculer $\mathbf{M}^2$ et $\mathbf{M}^3$.

I.4) a- Montrer que si **X** est un vecteur propre pour la matrice **J**, alors **X** est aussi un vecteur propre de toute matrice **M** de $\mathcal{E}$.

b- Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres (que l'on exprimera en fonction de a et b) d'une matrice **M** de $\mathcal{E}$.

c- Les matrices de $\mathcal{E}$ sont-elles diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

I.5) Calculer $\mathbf{M}^n$ pour n entier naturel.

Partie II

Soient α et β deux réels non nuls. On note f_1 et f_2 les fonctions numériques réelles définies par : $f_1(x) = \cos(\beta x)e^{\alpha x}$ $\quad f_2(x) = \sin(\beta x)e^{\alpha x}$

$\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des fonctions : $\mathcal{F} = \left\{ f \middle| f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

II.1) Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel.

II.2) Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$ est une base de $\mathcal{F}$.

II.3) Donner la dimension de $\mathcal{F}$.

On considère l'application φ définie sur $\mathcal{F}$ qui a f associe f', fonction dérivée de f.

II.4) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{F}$.

II.5) Donner la matrice **M** de φ dans la base $\mathcal{B}$.

II.6) φ est-elle une application bijective de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{F}$? Si oui donner $\mathbf{M}^{-1}$.

II.7) Donner un triplet (r,s,t) de $\mathbb{R}^3$ tel que $r\mathbf{M}^2 + s\mathbf{M} + t\mathbf{I} = \mathbf{O}$ ou $\mathbf{O}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

On peut remarquer que $\mathbf{M} - \alpha\mathbf{I} = \beta\mathbf{J}$ et utiliser le résultat de I.1

II.8) Montrer que toutes les fonctions de $\mathcal{F}$ vérifient une équation différentielle linéaire du second ordre que vous donnerez.

II.9) Donner dans $\mathcal{F}$ l'unique primitive F de la fonction $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.

II 10) En utilisant ce qui précède, calculer l'intégrale $\int_0^{\pi/2} (4\cos(3x)e^{4x} - 3\sin(3x)e^{4x})dx$

Problème 3

On considère les fonctions x et y de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$x(t) = \sin^2 t \text{ et } y(t) = (1 + \cos t)\sin t$$

1) Montrer que x et y sont périodiques de périodes à préciser.
2) Préciser les parités de x et y.
3) Donner le tableau de variation conjoint des fonctions x et y sur l'intervalle $[0, \pi]$
4) Donner sur votre copie le tableau de valeurs ci-dessous rempli :

t	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π
$x(t)$					
$y(t)$					
$x'(t)$					
$y'(t)$					

5) Préciser la limite de $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ quand t tend vers 0, puis quand t tend vers π

Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. On se propose d'étudier et de tracer la courbe Γ paramétrée par :

$$\mathbb{R} \to \mathcal{P}$$
$$t \mapsto M(t) = (\sin^2 t, (1+\cos t)\sin t) = (x(t), y(t))$$

6) On appelle Γ_0 la partie de la courbe Γ obtenue en prenant t dans l'intervalle $[0, \pi]$.

Représenter sur une figure la courbe Γ_0 en plaçant avec soin les points correspondant aux valeurs 0, $\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/3$, π de t, ainsi que les tangentes à la courbe en ces points (On peut prendre $\sqrt{3} \simeq 1,7$).

7) Montrer que Γ s'obtient à partir de Γ_0 à l'aide d'une symétrie à préciser.

Pour $t \in \mathbb{R}$ on note $M_1 = M(t)$ et $M_2 = M(\pi + t)$.

8) Démontrer que pour tout t de $\mathbb{R}$, les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ sont orthogonaux.

9) Déterminer une représentation paramétrique de l'ensemble $\mathcal{C}$ des milieux des segments $[M_1, M_2]$ quand t varie. On notera $(X(t), Y(t))$ cette représentation paramétrique de $\mathcal{C}$

10) Calculer $\left(X(t) - \dfrac{1}{2}\right)^2 + Y^2(t)$ sous une forme simplifiée. En déduire une équation cartésienne de $\mathcal{C}$. Préciser la nature de $\mathcal{C}$.

§§§

Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les trois problèmes sont indépendants .
La calculatrice personnelle est interdite.

Problème 1

On considère l'équation différentielle sur $]0,+\infty[$:

$$\text{(E)} \qquad x^2y''(x)+4xy'(x)+(2-x^2)y(x)=1$$

① Déterminer toutes les solutions réelles de l'équation différentielle $u''(x)-u(x)=0$

② Sur l' intervalle $]0,+\infty[$ on effectue dans (E) le changement de fonction $y(x)=\dfrac{z(x)}{x^2}$. Que devient cette équation après ce changement?

③ On se propose de montrer que (E) admet une unique solution développable en série entière autour de l'origine, notée y_0, et de déterminer cette série entière. On pose $y_0(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^k$

a) Déterminer a_0 et a_1

b) Pour $n\geq 2$ donner une relation de récurence entre a_n et a_{n-2}. [On pensera à factoriser n^2+3n+2]

c) En déduire a_n en fonction de *n*.

④ Déterminer le rayon de convergence de la série entière qui a pour somme y_0.

⑤ Exprimer y_0 à l'aide de fonctions "classiques". [Indication : on déterminera d'abord l'expression de $x^2y_0(x)+1$]

⑥ Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions de (E)

⑦ Déterminer les solutions de (E) admettant une limite à droite en 0.

Problème 2

Partie 1

Soit *h* un réel fixé, élément de l'intervalle $]0,\pi]$ et la fonction *f* paire et de période 2π vérifiant :

$f(t)=\dfrac{1}{2h}$ si $t\in[0,h]$ et $f(t)=0$ si $t\in]h,\pi]$

① Déterminer la série de Fourier de *f* et montrer qu'elle converge. On note :

$sf(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)\right)$ et déterminer ce développement.

② Calculer $f(0)$. En déduire la valeur de $A=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(nh)}{n}$

③ Que vaut $sf(h)$ (justifier ce résultat). En déduire la valeur de $B=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2nh)}{n}$ à l'aide de $sf(h)$.

④ En prenant $h=\dfrac{\pi}{2}$, déduire de A la valeur $C=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}$

⑤ Trouver, grâce à la formule de Parseval, la valeur $D=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2(nh)}{n^2}$

⑥ En prenant $h=\dfrac{\pi}{2}$, déduire de D la valeur $E=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}$, et puis la valeur $F=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$

Partie 2

h est maintenant un réel de l'intervalle $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, la fonction *g* est paire, de période 2π vérifiant :

$g(t)=\dfrac{1}{2h}\left(1-\dfrac{t}{2h}\right)$ si $t\in[0,2h]$ et $f(t)=0$ si $t\in]2h,\pi]$

① Déterminer la série de Fourier de *g* et montrer qu'elle converge. On note :

$sg(t)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos(nt)+\beta_n\sin(nt)\right)$ et déterminer ce développement. [Indication : On exprimera $1-\cos(2\theta)$ à l'aide de $\sin^2\theta$]

② Trouver, grâce à la formule de Parseval, la valeur de $G=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^4(nh)}{n^4}$

③ En prenant $h=\dfrac{\pi}{2}$, déduire de G la valeur de $H=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^4}$, puis la valeur de $K=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$

Problème 3

$\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de dimension n à coefficients complexes.

On dit qu'une matrice $\mathbf{K}$ est une matrice scalaire s'il existe un nombre complexe k tel que

$$\mathbf{K} = k\mathbf{I}_n \text{ où } \mathbf{I}_n \text{ est la matrice de l'identité de } \mathsf{M}_n(\mathbb{C})$$

On dit qu'une matrice $\mathbf{A}$ a la propriété de Dirac si $\mathbf{A}^2$ est une matrice scalaire.

On note tr($\mathbf{M}$) la trace de la matrice $\mathbf{M}$, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.

On note det($\mathbf{M}$) le déterminant de la matrice $\mathbf{M}$.

Partie 1

Dans cette partie, on considère les matrices de $\mathsf{M}_2(\mathbb{C})$

1°) Montrer que. $\forall \mathbf{M} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{C}) \quad \mathbf{M}^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{M})\mathbf{M} + \det(\mathbf{M})\mathbf{I}_2 = 0$

2°) Montrer que si la matrice $\mathbf{A}$ a sa trace nulle alors la matrice $\mathbf{A}$ possède la propriété de Dirac.

3°) Montrer qu'une matrice $\mathbf{A}$ qui a la propriété de Dirac est une matrice dont la trace est nulle ou une matrice scalaire.

4°) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathsf{M}_2(\mathbb{C})$ dont la trace est nulle, ensemble noté D_2, est un sous espace vectoriel de $\mathsf{M}_2(\mathbb{C})$ Donner la dimension de D_2.

5°) Soient les matrices : $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Montrer que ($\mathbf{J}$,$\mathbf{K}$,$\mathbf{L}$) est une base de D_2,

b) Si $\mathbf{A} = x\mathbf{J} + y\mathbf{K} + z\mathbf{L}$. Calculer $\mathbf{A}^2$ en fonction de x,y,z et $\mathbf{I}_2$.

Partie 2

Dans cette partie on considère les matrices de $\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$

1°) Montrer que si $\mathbf{A}$ est une matrice qui vérifie la propriété de Dirac avec $\mathbf{A}^2$ non nulle alors

a) $\mathbf{A}$ est inversible.

b) $\mathbf{A}^{-1}$ vérifie aussi la propriété de Dirac

c) $\mathbf{A}$ n'a au plus que deux valeurs propres.

2°) Montrer que si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{A}$+$\mathbf{B}$ vérifient la propriété de Dirac alors la matrice $\mathbf{AB}$+$\mathbf{BA}$ est scalaire.

Partie 3

Dans cette partie on considère les matrices de $\mathsf{M}_4(\mathbb{C})$ et plus particulièrement les matrices:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\mathbf{A} = 3\mathbf{M} + 2\mathbf{N} + 2\mathbf{P}$

1°) Calculer $\mathbf{M}^2, \mathbf{N}^2, \mathbf{P}^2$. Montrer que $\mathbf{MN} + \mathbf{NM} = \mathbf{MP} + \mathbf{PM} = \mathbf{NP} + \mathbf{PN} = 0$

2°) On considère le sous espace vectoriel D_n des matrices de la forme $\mathbf{H} = x\mathbf{M} + y\mathbf{N} + z\mathbf{P}$. Montrer que toutes les matrices de D_n ont la propriété de Dirac. En déduire $\mathbf{A}^2$.

3°) Démontrer que si □ est une valeur propre de $\mathbf{A}$ alors nécessairement □□ ne peut prendre que deux valeurs réelles que l'on déterminera□

4°) a) Déterminer tous les sous espaces propres de la matrice $\mathbf{A}$.

b) Donner une matrice $\mathbf{U}$ inversible et une matrice $\mathbf{D}$ diagonale telles que $\mathbf{A} = \mathbf{UDU}^{-1}$.

Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les exercices sont indépendants .
La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1

Notations : $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de dimension 3 sur le corps $\mathbb{C}$. a, b, c sont des nombres complexes. On note $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ et $\mathbf{M}(a, b, c)$ les matrices suivantes

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad \mathbf{J}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\qquad \mathbf{M}(a,b,c)=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}$$

On note $j=e^{2i\pi/3}$. $j^2=\bar{j}=e^{4i\pi/3}$ est une autre racine cubique de l'unité.

Partie I

I.1. Calculer $\mathbf{J}^2$ et $\mathbf{J}^3$.

I.2. Déterminer les valeurs propres de $\mathbf{J}$. La matrice $\mathbf{J}$ est-elle diagonalisable sur le corps $\mathbb{C}$? L'est elle sur le corps $\mathbb{R}$?

I.3. Pour chaque valeur propre de $\mathbf{J}$ déterminer le vecteur propre associé ayant 1 pour première composante, et une matrice $\mathbf{P}$ de passage à une base de vecteurs propres.

I.4. Exprimer la matrice $\mathbf{M}(a, b, c)$ à l'aide des matrices $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ et $\mathbf{J}^2$. En déduire que $\mathbf{H}=\{\mathbf{M}(a,b,c) \mid (a,b,c)\in\mathbb{C}^3\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ pour les lois usuelles (somme et loi externe). Précisez la dimension de $\mathbf{H}$.

I.5. Montrer que les vecteurs propres (complexes) de $\mathbf{J}$ sont aussi vecteurs propres de $\mathbf{J}^2$ ainsi que de $\mathbf{M}(a, b, c)$. En déduire les valeurs propres de $\mathbf{M}(a, b, c)$ à l'aide de celles de $\mathbf{J}$, puis en fonction du nombre complexe j.

I.6. Montrer que tout élément de $\mathbf{H}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Donner la décomposition de $\mathbf{M}(a, b, c)$ en fonction de la matrice $\mathbf{P}$ du I.3 et d'une matrice diagonale que l'on explicitera.

I.7. On suppose ici que les coefficients (a,b,c) sont réels.

a) Montrer que toutes les valeurs propres de $\mathbf{M}(a, b, c)$ sont réelles si et seulement si $b=c$.

b) Déterminer les valeurs propres de $\mathbf{M}(a, b, b)$ ainsi que les *sous espaces propres réels* associés.

Partie II

Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel euclidien réel de dimension 3, de base orthonormée $\mathcal{B}=(\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}})$ On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbf{E}$. Dans cette partie on s'intéresse à une étude géométrique des endomorphismes $f_{a,b,c}$ différents de Id dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est $\mathbf{M}(a, b, c)$, en supposant que les coefficients (a,b,c) sont réels. Il est recommandé d'utiliser les résultats trouvés dans la première partie.

II. 1. Montrer qu'il existe deux couples (a,b) tels que $f_{a,b,b}$ ait pour seules valeurs propres 1 et -1. Préciser les sous espaces propres associés. Donner la nature géométrique de $f_{a,b,b}$ dans ces deux cas.

II.2. Montrer qu'il existe deux couples (a,b) tels que $f_{a,b,b}$ ait pour seules valeurs propres 1 et 0. Préciser les sous espaces propres associés. Donner la nature géométrique de $f_{a,b,b}$ dans ces deux cas.

II.3.a) À quelles conditions nécessaires et suffisantes une matrice 3×3 à coefficients réels représente-t-elle la matrice dans la base $\mathcal{B}$ d'une rotation ?

b) Montrer que $\mathbf{J}$ et $\mathbf{J}^2$ sont des matrices de rotation de $\mathbf{E}$ préciser le cosinus de leurs angles de rotation.

c) Montrer que $f_{a,b,c}$ est une rotation vectorielle si et seulement si $a^2+b^2+c^2=1$ et $a+b+c=1$ En déduire que $ab+bc+ca=0$

Préciser l'axe de rotation ainsi que le cosinus de son angle de rotation en fonction de (a,b,c).

Exercice 2

Dans ce qui suit, la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On considère les équations différentielles, de fonction inconnue f en la variable réelle x

(E_1) $\qquad f'(x)+xf(x)=0$

(E_2) $\qquad f'(x)+xf(x)=x^3$

1. Donner la solution générale de (E_1) et l'unique solution f_0 telle que $f_0(0)=1$
2. Donner la solution générale de (E_2), et la fonction f_1 solution de (E_2) et telle que $f_1(0)=0$

Dans la suite de l'exercice, on pose $F(x)=e^{\frac{-x^2}{2}}$ et on note $I(R)=\int_0^R e^{\frac{-x^2}{2}}dx$

3. a) Montrer que $A = \int_0^{\infty} F(t)dt = \lim_{R\to+\infty} I(R)$ existe.

b) Soient $J(R) = \iint_C F(x)F(y)dxdy$ avec $C = [0, R]\times[0, R] = [0, R]^2$.

Exprimer $J(R)$ en fonction de $I(R)$

c) Soit $K(R) = \iint_D F(x)F(y)dxdy$ avec $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \,\middle|\, 0 \le x, 0 \le y, x^2 + y^2 \le R^2\right\}$

Montrer que pour tout R positif on a $K(R) \le J(R) \le K\left(R\sqrt{2}\right)$

d) Calculer la valeur de $K(R)$ par passage en coordonnées polaires. Calculer $\lim_{R\to+\infty} K(R)$ et en déduire que $A = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

4. On considère la fonction $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt)F(t)dt$

a) Justifier l'existence de $g(x)$

b) En admettant qu'on peut dériver sous l'intégrale, démontrer que g est solution de (E_1) [On transformera l'expression trouvée pour $g'(x)$ à l'aide d'une intégration par parties] .

c) En déduire l'expression de $g(x)$ en fonction de $F(x)$.

5. Donner le développement en série entière (et le rayon de convergence) de $G(x) = \int_0^x F(t)dt$.

Exercice 3

$P(z) = (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)$ est un polynôme de degré 3 dont les racines complexes a_1, a_2, a_3 sont distinctes. On note b_1, b_2 les racines du polynôme $P'(z)$, dérivé de $P(z)$. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, les points A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 sont les points d'affixes respectives a_1, a_2, a_3 b_1, b_2

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{P'(z)}{P(z)}$

2. En déduire que $\sum_{k=1}^{3} \dfrac{1}{(b_1 - a_k)} = 0$. Que peut-on écrire pour b_2 ?

3. En déduire que $\sum_{k=1}^{3} \lambda_k \overrightarrow{A_k B_1} = \vec{0}$ pour des coefficients λ_k réels à préciser, et que le point B_1 est à l'intérieur du triangle (A_1, A_2, A_3) [On rappelle que le barycentre de trois points dont les coefficients sont strictement positifs est intérieur au triangle défini par ces trois points]. Que peut on dire de B_2 ?

4. Calculer le coefficient de z dans $P'(z)$ à l'aide de a_1, a_2, a_3, et en déduire que le point G, centre de gravité du triangle (A_1, A_2, A_3) est le milieu du segment $[B_1, B_2]$.

5. On se propose de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les points B_1, B_2 associés au triangle (A_1, A_2, A_3) soient confondus.

a) On suppose pour commencer que le centre de gravité G du triangle (A_1, A_2, A_3) est à l'origine. Que peut-on en déduire pour le coefficient de z^2 dans $P(z)$? Démontrer que dans ce cas on a $B_1 = B_2$ si et seulement si (A_1, A_2, A_3) est équilatéral de cercle circonscrit de centre O.

b) En déduire une propriété analogue dans le cas général.

6. On se propose de montrer que les angles de vecteurs $\left(\overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1B_1}\right)$ et $\left(\overrightarrow{A_1B_2}, \overrightarrow{A_1A_2}\right)$ sont égaux.

a) Montrer que $3(z-b_1)(z-b_2) = (z-a_1)(z-a_2) + (z-a_2)(z-a_3) + (z-a_3)(z-a_1)$ pour tout nombre complexe z.

b) Montrer que $3(a_1 - b_1)(a_1 - b_2) = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)$, puis que les arguments des nombres complexes $\dfrac{b_1 - a_1}{a_3 - a_1}$ et $\dfrac{a_2 - a_1}{b_2 - a_1}$ sont égaux (à 2π près).

c) En déduire l'égalité des angles $\left(\overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1B_1}\right)$ et $\left(\overrightarrow{A_1B_2}, \overrightarrow{A_1A_2}\right)$. Donner par la même méthode deux autres égalités angulaires.

d) Si dans le triangle (A_1, A_2, A_3) le point B_1 est connu, donner une construction géométrique du point B_2

Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les exercices et le problème sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1

Soit un espace vectoriel E de dimension 3, muni du repère B=$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Soit f_α un endomorphisme de E de matrice dans la base B (α est un paramètre réel) :

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

1) Déterminer le polynôme caractéristique P_α de $\mathbf{A}_\alpha$. Préciser les valeurs de α telles que P_α a une racine double.

2) On suppose ici que α vaut 3. Déterminer dans ce cas les valeurs propres et une base de E formée de vecteurs propres de f_3

3) On suppose que α vaut 2. Montrer que dans ce cas f_2 admet deux valeurs propres réelles λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 < \lambda_2$. Calculer deux vecteurs propres, $\vec{v}_1$ (associé à λ_1) et $\vec{v}_2$ (associé à λ_2). f_2 est-il diagonalisable?

4) Toujours pour α =2, calculer la matrice K de l'endomorphisme $g = (f_2 - 2Id)^2$ dans la base B. Montrer que $(\vec{v}_2, \vec{e}_3)$ est une base de Ker g . Calculer $f(\vec{e}_3)$ à l'aide de $(\vec{v}_2)$ et de $(\vec{e}_3)$.

5) Montrer que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{e}_3)$ est une base de E. Donner la matrice T de f_2 dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{e}_3)$.

Exercice 2

On considère les fonctions $F_k(x) = \int_0^x \frac{dt}{\mathrm{ch}^k(t)}$ pour k entier naturel non nul. On rappelle que $\mathrm{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $\mathrm{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ et que $\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2(t) = 1$.

1) Justifier l'existence de $F_k(x)$ pour tout réel x.

2) Pour tout entier naturel non nul k , on note $I_k = \lim_{x \to \infty} F_k(x)$. Justifier l'existence de I_k. Calculer I_1.
[Indication : on peut utiliser le changement de variable $sh(t) = u$].

3) Calculer $J(y) = \int_0^y \frac{du}{1+u^2}$. Calculer, par une intégration par parties, $K(y) = \int_0^y \frac{u^2 du}{(1+u^2)^2}$. En déduire la valeur de $L(y) = \int_0^y \frac{du}{(1+u^2)^2}$.

4) À l'aide du changement de variable $sh(t) = u$, exprimer $F_3(x)$ avec la fonction L.

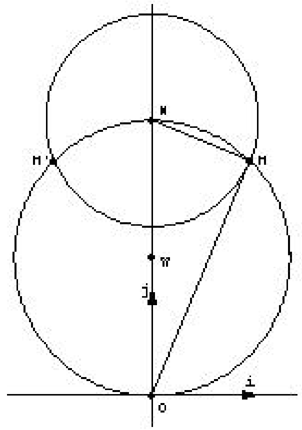
5) On pose $u_p = I_{2p-1}$

5a) Exprimer l'intégrale par le changement de variable précédent.

5b) Utiliser ensuite la décomposition $\frac{1}{(1+u^2)^{p+1}} = \frac{1}{(1+u^2)^p} - \frac{u^2}{(1+u^2)^{p+1}}$ et une intégration par parties pour démontrer la relation de récurrence $u_{p+1} = \frac{2p-1}{2p} u_p$.

5c) En déduire l'expression complète de u_{p+1} à l'aide de factorielles, de puissances de 2 et du nombre π .

Exercice 3



Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On appelle K l'ensemble des points M du plan tels que (OMN) soit rectangle en M, avec N sur l'axe (y'y) et tel que MN=1.

1) On considère les points W(0;v) et N(0;2v) , où v est un paramètre réel tel que $|v| \geq \frac{1}{2}$.
Montrer que l'intersection d'un cercle C_1 de centre N et de rayon 1 et d'un cercle C_2 de centre W et passant par N est non vide et que les points d'intersection sont dans K. Donner les équations des cercles C_1 et C_2.

2) Avec l'équation d'un des cercles, exprimer v en fonction de x et y. En reportant cette expression de v dans l'autre équation de cercle, montrer que K est inclus dans la courbe K' vérifiant l'équation $x^4 + x^2y^2 - y^2 = 0$ (on admettra dans la suite sans démonstration que K=K'). Préciser les symétries de K.

3) On suppose ici que M a ses deux coordonnées strictement positives. et on note t la mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$. Calculer en fonction de t les longueurs OM et ON.

4) Pour un point M quelconque de K (de coordonnées non nécessairement positives), déduire de l'expression précédente et des symétries de K une représentation paramétrique de K à l'aide du paramètre t Préciser des intervalles pour t permettant de parcourir K une seule fois.

5) On appelle Δ la droite passant par O orthogonale à la droite (OM) et H le point d'intersection de Δ et de la droite horizontale passant par N.
Déterminer en fonction de t non nul fixé:
- a) Les coordonnées du point N.
- b) La distance OH.
- c) Les coordonnées du point H.
- d) Montrer que la droite (HM) est la normale à la courbe K au point M.

Problème

Partie A

On note B l'ensemble des suites numériques (réelles ou complexes) $u = (u_n)_{n \geq 0}$ vérifiant la condition

$$\exists M > 0 , \exists a > 0 , \forall n \in Å , |u_n| \leq Ma^n$$

On leur associe la fonction $G_u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ qui est définie lorsque la série converge.

1) Montrer que $G_u(x)$ est définie pour tout $x \in$ È tel que $|x| < \frac{1}{a}$

2) Montrer que l'ensemble des suites B est stable par addition, produit et contient les suites géométriques et les suites polynomiales (c.a.d. les suites u telles que $u_n = P(n)$, P étant un polynôme). Donner un exemple de suite qui n'appartient pas à B.

3) Soit m un entier positif fixé, et une suite $u=(u_n)_{n\geq 0}$ de B, on définit la suite $v=(v_n)_{n\geq 0}$ par

$v_n = u_{n-m}$ si $n\geq m$ et $v_n = 0$ si $0\leq n<m$

Exprimez la fonction $G_v(x)$ à l'aide de $G_u(x)$.

4) On introduit les polynômes $A_0(x)=1$, $A_1(x)=x$, $A_2(x)=x(x-1)$ et plus généralement $A_k(x)=x(x-1)...(x-k+1)$ pour k entier positif.

a- Pour une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de B, soit la suite $w_k=(A_k(n)u_n)_{n\geq 0}$. Exprimer la fonction $G_{w_k}(x)$ à l'aide de $G_u(x)$ en détaillant les cas $k=1$, $k=2$ et $k>2$.

b- On prend ici pour tout n, $u_n=1$. Calculer par récurrence sur k la fonction $G_{w_k}(x)$ et préciser quel est le rayon de convergence de la série qui la définit.

c- On prend encore pour tout n, $u_n=1$, et le polynôme $P(x)=x^3+4x^2$. Déterminer la décomposition $P(x)=\sum_{k=0}^{3} c_k A_k(x)$, en déduire la fonction $G_s(x)$ pour la suite $s=(s_n)_{n\geq 0}$ telle que $s_n=P(n)u_n$.

Partie B

On s'intéresse dans cette partie à l'équation récurrente (où l'inconnue est la suite $y=(y_n)_{n\geq 0}$)

(E) $$y_n+\frac{15}{4}y_{n-1}+3y_{n-2}-y_{n-3}=u_n \text{ pour } n\geq 0$$

et on prend comme convention que $\forall n<0,\quad y_n=0$, ce qui revient à poser :

$y_0=u_0$, $y_1+\frac{15}{4}y_0=u_1$, $y_2+\frac{15}{4}y_1+3y_0=u_2$, $y_n+\frac{15}{4}y_{n-1}+3y_{n-2}-y_{n-3}=u_n$ pour $n\geq 3$

Cette équation (E) associe donc à toute suite $u=(u_n)_{n\geq 0}$ une suite unique $y=(y_n)_{n\geq 0}$.

Soit P le polynôme défini par: $P(x)=1+\frac{15}{4}x+3x^2-x^3$

1) Exprimer la fonction $G_y(x)$ à l'aide de $G_u(x)$.

2) Montrer que $P(x)$ possède une racine double a et la calculer (on pourra diviser $P(x)$ par $P'(x)$).

En déduire l'autre racine b et la factorisation de $P(x)$.

3) Déterminer, par développement en série entière convergent au voisinage de 0, les suites $p=(p_n)_{n\geq 0}$, $q=(q_n)_{n\geq 0}$, $r=(r_n)_{n\geq 0}$, telles que $G_p(x)=\frac{1}{x-a}$, $G_q(x)=\frac{1}{(x-a)^2}$, $G_r(x)=\frac{1}{x-b}$

4) On prend ici dans (E) la suite $u=(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0=1$, $u_n=0$ si $n>0$.

a- Déterminer $G_y(x)$

b- Calculer les coefficients α,β,γ tels que $G_y(x)=\alpha G_p(x)+\beta G_q(x)+\gamma G_r(x)$

c- Montrer que la solution $y=(y_n)_{n\geq 0}$ de (E) s'écrit $(-2)^n(c\,n+d)+e\,\frac{1}{4^n}$ et calculer les constantes c, d, e.

Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les exercices et le problème sont indépendants .

La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1

Soit la fonction f , 2π-périodique, telle que $\forall x\in[-\pi,\pi]$, $f(x)=|x|$.

1) Calculer les coefficients de Fourier de f. Montrer que f est égale à la somme de sa série de Fourier.

2) A l'aide du théorème de Parseval, déterminer la somme $V=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$

3) On pose $U=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$. Exprimer U à l'aide de V et en déduire la valeur de U.

Exercice 2

Soit le polynôme défini pour tout entier naturel non nul n par:

$$P_n(x)=C_{2n+1}^{1}x^n-C_{2n+1}^{3}x^{n-1}+C_{2n+1}^{5}x^{n-2}-\ldots+C_{2n+1}^{2n+1}(-1)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{2n+1}^{2k+1}x^{n-k}$$

On rappelle que la fonction cotangente est définie par $\text{cotan}(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$ pour x tel que $\sin x\neq 0$

1) Soit un polynôme de degré n : $Q(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=a_n(x-x_1)\ldots(x-x_n)$ ayant comme racines $\{x_1,\ldots,x_n\}$ (distinctes ou non). Donner une expression de la somme des racines à l'aide de a_n et a_{n-1} .

2) On prend $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. En calculant de deux manières la partie imaginaire de $\frac{e^{(2n+1)it}}{\sin^{2n+1}t}=\frac{(\cos t+i\sin t)^{2n+1}}{\sin^{2n+1}t}$ montrer que $P_n\left(\text{cotan}^2(t)\right)=\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin^{2n+1}t}$

3) Monter que P_n a n racines distinctes qui sont $\left\{\text{cotan}^2\frac{k\pi}{2n+1}\,\middle|\,1\leq k\leq n\right\}$

4) En déduire que : $\sum_{k=1}^{n}\text{cotan}^2\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{n(2n-1)}{3}$.

5) Pour $t\neq k\pi$ (avec k entier relatif) montrer que $1+\text{cotan}^2 t=\frac{1}{\sin^2 t}$. En déduire une expression en fonction de n de: $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}$.

6) Pour $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, montrer que $\text{cotan}\,t\leq\frac{1}{t}\leq\frac{1}{\sin t}$, puis que $\text{cotan}^2 t\leq\frac{1}{t^2}\leq\frac{1}{\sin^2 t}$

7) À l'aide des expressions trouvées au 4) et au 5), et de l'encadrement du 6) trouver un encadrement de la forme: $A_n\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leq B_n$, dans lequel A_n et B_n s'expriment à l'aide de n et de π.

8) En déduire la convergence de la série de terme général $\frac{1}{k^2}$, et la somme $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$

Exercice 3

Soit un espace vectoriel euclidien E de dimension 3, muni du repère orthonormé direct B=$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On note $\vec{u}.\vec{v}$ et $\vec{u}\wedge\vec{v}$ le produit scalaire et le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On se propose de déterminer l'ensemble H de toutes les applications linéaires f de E dans E telles que pour tout vecteur $\vec{u}$, on ait $\vec{u}\perp f(\vec{u})$ (c'est à dire $\vec{u}.f(\vec{u})=0$).

1) Pour $1\le k\le 3$ calculer $\vec{e}_k.f(\vec{e}_k)$. En déduire que la matrice **M** de f dans la base B a tous les termes de sa diagonale qui sont nuls.

2) Si **M** a pour terme général $m_{i,j}$, calculer le produit scalaire $(\vec{e}_i+\vec{e}_j).f(\vec{e}_i+\vec{e}_j)$ et en déduire une relation entre $m_{i,j}$ et $m_{j,i}$. En déduire que la matrice **M** est antisymétrique.

3) Si $\vec{w}\in E$ est fixé, montrer que l'application $f:E\to E$ $f:\vec{u}\to\vec{w}\wedge\vec{u}$ est dans H. Préciser la matrice de f dans la base B en fonction des composantes (p,q,r) du vecteur $\vec{w}\in H$.

4) Montrer réciproquement que si $f\in H$ alors il existe un vecteur $\vec{w}\in E$ à déterminer en fonction des coefficients de la matrice **M** de f tel que $f:\vec{u}\to\vec{w}\wedge\vec{u}$

5) Soit l'endomorphisme g de E ayant dans la base B pour matrice $A=\begin{pmatrix}0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-2}{3}\\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & 0\end{pmatrix}$. Montrer que $g\in H$, en précisant le vecteur $\vec{w}\in E$ associé. Préciser la norme de ce vecteur.

6) Déterminer l'unique valeur propre réelle de la matrice A et une base du sous-espace propre associé.

Problème

Soit λ un paramètre réel avec $0<\lambda<2$ et les fonctions définies par :

$$f:È\to È \qquad f:x\mapsto 1-\lambda x^2 \qquad\qquad g:È\to È \qquad g:x\mapsto f(f(x))$$

On étudie des suites numériques définies par $x_0\in È$ et $x_{n+1}=f(x_n)$ pour n≥0 (on notera aussi $x_n=f^n(x_0)=f\circ f\circ\ldots\circ f(x_0)$ avec n termes f). Dans ce problème, on dit que α est un point fixe de la fonction h si $h(\alpha)=\alpha$.

Partie A

Dans cette partie on fixe $\lambda=1/2$ et on travaille sur l'intervalle $I=[0,1]$.

1) Montrer que $f(I)\subset I$ et donc que l'on peut considérer f comme une application $f:I\to I$,

2) Soit $J=[f(1),1]$. Montrer que $f(I)\subset J$,et que $f(J)\subset J$

3) Montrer que f possède un unique point fixe $a\in I$. Calculer a et $f'(a)$.

4) Montrer que $|f'(a)|<1$ et aussi que $x\in[0,a]\Rightarrow -1<f'(x)\le 0$

5) Montrer que pour tout réel x de I, $x<a\Rightarrow a<f(x)$, et que $a<x\Rightarrow f(x)<a$

6) Sur un même graphique, placer la courbe représentative C de f, la première bissectrice Δ d'équation $y=x$, et le point d'abscisse a de C. On prend $x_0=0$, représenter graphiquement à l'aide de Δ et de C la suite des cinq premiers termes de la suite $(x_n)_{n\ge 0}$ (sans les calculer numériquement). Quel comportement observe-t-on pour cette suite ?

7) Montrer que $\forall x\in I$, $|f'(x)|\le 1$ et que $\forall x\in I$, $|g'(x)|\le 1$

En déduire que $\forall x\in I$, $|g(x)-a|\le|x-a|$ *(Indication: utiliser l'inégalité des accroissements finis)*

8) Montrer que si $x_0<a$ la suite x_{2n} est croissante et a une limite ℓ_1 , la suite x_{2n+1} est décroissante et a une limite ℓ_2. Montrer que $\ell_1=\ell_2=a$.

9) En déduire que $\forall x_0\in I, \lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$

Partie B

Dans cette partie, on fixe $\lambda=6/5$ et on travaille sur l'intervalle $K=[-1,1]$.

On étudie ici les points fixes de l'application $g(x)=f(f(x))$. Pour $x_0\in K$, on notera $y_n=g^n(x_0)=x_{2n}$ la suite des itérés de x_0 par g.

1) Montrer que $f(K)\subset K$ .On considère donc g comme application $g:K\to K$.

2) Montrer que f admet un unique point fixe dans l'intervalle K . Calculer ce point fixe qui est noté a dans la suite (sa valeur est distincte de celle trouvée en A 3). Montrer que a est aussi point fixe de g, et que si g possède un autre point fixe b, alors $c=f(b)$ est aussi point fixe de g . Que vaut $f(c)$?

3) On se propose de déterminer les points fixes de g dans K.

3.1- Soit $p(x)=g(x)-x$ *et* $q(x)=f(x)-x$. Montrer que toute racine (réelle ou complexe) du polynôme $q(x)$ est aussi racine du polynôme $p(x)$.

3.2- En déduire que $p(x)=d(x)q(x)$, $d(x)$ étant un polynôme à calculer.

3.3- Calculer les racines de $d(x)$ et montrer que g possède dans K exactement trois points fixes à calculer. Ils sont notés a,b,c.

4) Tracer sur une même figure le graphe Γ de g , la première bissectrice Δ d'équation $y=x$, et les points d'abscisses a,b,c de Γ. Expliquer graphiquement le comportement des suites itérées de terme général $y_n=g^n(x_0)=x_{2n}$ selon la valeur de x_0. Quelle conclusion peut on en tirer sur le comportement de la suite $x_n=f^n(x_0)$?

Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les trois problèmes sont indépendants et doivent être traités.

La calculatrice personnelle est interdite.

Problème 1

On considère la fonction $f:[0,\pi]^2 \to \mathbf{R}$ définie par :

$f(x,y)=\dfrac{x(\pi-y)}{2}$ si $0\leq x\leq y\leq\pi$ et $f(x,y)=\dfrac{y(\pi-x)}{2}$ si $0\leq y\leq x\leq\pi$

Partie A

Préciser la valeur de f sur les bords du carré $[0,\pi]^2$

Montrer que $\forall (x,y)\in[0,\pi]^2$, $f(y,x)=f(x,y)$

Calculer l'intégrale double $\iint_{[0,\pi]^2} f(x,y)\,dxdy$

À toute fonction continue $\psi:[0,\pi]\to\mathbf{R}$, on associe la fonction u définie par:

$$u(x)=\int_0^\pi f(x,y)\psi(y)dy=\frac{(\pi-x)}{2}\int_0^x y\psi(y)dy+\frac{x}{2}\int_x^\pi(\pi-y)\psi(y)dy.$$

a) Montrer que u est deux fois dérivable et calculer $u'(x)$ et $u''(x)$

b) Montrer que u est solution de l'équation différentielle

$$-\frac{2}{\pi}u''(x)=\psi(x) \text{ avec } u(0)=0 \text{ et } u(\pi)=0$$

c) Dans le cas où $\psi(x)=\sin(nx)$ avec n entier strictement positif, donner l'expression de u sous forme d'une intégrale et donner la solution de l'équation différentielle du b)

Partie B

Pour $y\in]0,\pi[$ on définit une fonction φ_y sur $\mathbf{R}$, <u>2π-périodique</u> et <u>impaire</u> telle que: $\forall x\in[0,\pi], \varphi_y(x)=f(x,y)$

Pour $y\in]0,\pi[$ donné, déterminer le développement en série de Fourier de φ_y.

[On peut soit faire le calcul direct, soit utiliser le résultat du c)]

Pour $(x,y)\in]0,\pi[^2$, en déduire une expression simple de $\sum_{n=1}^{n=\infty}\dfrac{\sin(nx)\sin(ny)}{n^2}$ et de $\sum_{n=1}^{n=\infty}\dfrac{\sin^2(nx)}{n^2}$

a) À l'aide de la question précédente, calculer la somme $S'=\sum_{k=0}^{k=\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}$

b) On pose $S''=\sum_{k=1}^{k=\infty}\dfrac{1}{(2k)^2}$ et $S=\sum_{n=1}^{n=\infty}\dfrac{1}{n^2}=S'+S''$. Montrer que ces séries convergent et déduire du calcul précédent la valeur de S.

a) Calculer $\sum_{n=1}^{n=\infty}\dfrac{\sin^2(ny)}{n^4}$, et en déduire la somme $T'=\sum_{k=0}^{k=\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^4}$

b) On pose $T''=\sum_{k=1}^{k=\infty}\dfrac{1}{(2k)^4}$ et $T=\sum_{n=1}^{n=\infty}\dfrac{1}{n^4}=T'+T''$. Montrer que ces séries convergent et déduire du calcul précédent la valeur de T.

Problème 2

On associe à tout polynôme P à coefficients réels le polynôme $L(P)$ défini par

$$L(P)(x)=-x\,P''(x)+(x-1)P'(x)$$

Soit $E=\mathbf{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels. Montrer que L est un endomorphisme de E et déterminer sa matrice **M** dans la base canonique de E : $B_1=(T_0,T_1,T_2,T_3)$ avec $T_k:x\mapsto x^k$

Déterminez la dimension du noyau et la dimension de l'image de L.

Diagonalisez la matrice **M**, (on notera λ_k, pour $0\leq k\leq 3$, les valeurs propres de **M** rangées dans l'ordre croissant, et donc aussi valeurs propres de L). Déduisez-en la suite de polynômes $P_k(x)$ unitaires de degrés k(ayant 1 pour coefficient du terme de degré k) telle que $L(P_k)=\lambda_k P_k$ Montrez que $B_2=(P_0,P_1,P_2,P_3)$ est une base de E.

On s'intéresse maintenant à la recherche de solutions polynomiales P de l'équation

$$L(P)-\lambda P=Q \quad \text{avec } \lambda\in\mathbf{R} \text{ et } Q\in E \text{ fixés} \qquad (*)$$

a) On décompose $Q=\sum_{k=0}^{k=3}a_k P_k$, et on recherche P sous la forme $P=\sum_{k=0}^{k=3}b_k P_k$.

Établir les relations entre les coefficients $(a_k)_{0\leq k\leq 3}$ et $(b_k)_{0\leq k\leq 3}$

b) Montrer que si λ n'est pas valeur propre de M, il existe une solution unique pour tout Q, et donner le développement de cette solution dans la base B_2 en fonction de $(a_k)_{0\leq k\leq 3}$

c) Si λ est une valeur propre de L ($\lambda=\lambda_k$, avec $0\leq k\leq 3$), quelle condition doit vérifier Q pour qu'il existe une solution ? Déterminer alors toutes les solutions de (*) par leur développement dans la base B_2.

d) On prend $\lambda=\lambda_2$, $Q(x)=-28+118x-63x^2+7x^3$ Montrer qu'il existe une unique solution de l'équation $L(P)-\lambda_2 P=Q$ telle que $P(0)=0$ Déterminer cette solution sous la forme $P=\sum_{k=0}^{k=3}b_k P_k$ en calculant les $(b_k)_{0\leq k\leq 3}$

Montrez que P_3 possède 3 racines réelles distinctes dans l'intervalle $]0,+\infty[$, dont une dans l'intervalle $]0,1[$ et une dans l'intervalle $]3,+\infty[$

Problème 3

Soit un plan P muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i}\,,\,\vec{j})$. On note Δ_0 la droite d'équation $y=0$, I le point de coordonnées $(0{,}1)$ et J le point de coordonnées $(0,-1)$.
Dans ce problème, si E est un ensemble de points du plan, on note $E^*=E\setminus(E\cap\Delta_0)$, c'est à dire E privé de son intersection avec Δ_0

Partie A

Soit M de coordonnées (x,y) avec $y\neq 0$ et $y\neq 1$. La droite (IM) coupe Δ_0 en Ω de coordonnées $(x_\Omega,0)$. Calculer x_Ω en fonction de (x,y)

Soit $r=\dfrac{\overline{\Omega I}}{\overline{\Omega M}}$ Montrer que les coordonnées du point M' tel que: $\overrightarrow{\Omega M'}=r\overrightarrow{\Omega J}$ vérifient

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-x}{y} \\ y' = \dfrac{-1}{y} \end{cases} \qquad (1)$$

Pour $M(x,y)$ avec $y\neq 0$ la relation (1) définit une application f de $P^*=P\setminus\Delta_0$ vers P^* , même si $y=1$. Montrer que cette application est bijective et donner l'expression de sa bijection réciproque.

Soit D une droite distincte de Δ_0 ayant pour équation cartésienne $ax+by=c$ avec $(a\,,\,b)\neq(0\,,\,0)$. L'image de D^* par f, notée D'^*, est une droite D' privée éventuellement d'un point. Donner une équation cartésienne de D' à l'aide de $(a\,,\,b\,,c)$.

Soient deux droites D_1 et D_2 toutes deux non parallèles à Δ_0 et strictement parallèles entre elles. Les images de D_1^* et D_2^* sont incluses dans les droites D_1' et D_2' . Quelle particularité présente l'intersection de D_1' et D_2' ?

De même soient deux droites D_1 et D_2 (toutes deux distinctes de Δ_0) sécantes et dont l'intersection appartient à Δ_0. Les images de D_1^* et D_2^* sont incluses dans les droites D_1' et D_2' . Quelle particularité géométrique présentent D_1' et D_2' ?

Partie B

Dans cette partie, f est toujours l'application de P^* vers P^* définie par (1). On note C le cercle de centre I et de rayon R avec R strictement positif , C^* ce cercle privé de ses points d'intersection éventuels avec Δ_0

Donner une équation cartésienne de C ainsi que celle de l'image de C^* par f.

Montrer qu'il existe une unique valeur de R (à déterminer) telle que l'image de C^* par f est une parabole dont on donnera une équation, le foyer et la directrice.

Déterminer l'ensemble des réels R strictement positifs tels que l'image de C^* par f est une ellipse dont on donnera une équation réduite, le centre, les foyers , et l'excentricité en fonction de R.

Déterminer l'ensemble des réels R strictement positifs tels que l'image de C^* par f est une hyperbole dont on donnera une équation réduite, le centre, les foyers , l'excentricité et les asymptotes en fonction de R.

Pour $R>1$ soient U et V les intersections de C avec Δ_0. T_U et T_V sont les tangentes à C en U et V. Les images par f de T_U^* et T_V^* sont incluses dans les droites T_U' et T_V' . Montrer que T_U' et T_V' sont les asymptotes de l'image de C^* par f.

Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les trois problèmes sont indépendants et doivent être traités.
La calculatrice personnelle est interdite.

Problème 1

Partie A

① Soit la matrice $A_3=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$. Déterminer son rang, puis calculer les valeurs propres et les vecteurs propres associées.

On se propose de déterminer les valeurs propres des matrices $A_n=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\1&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\ddots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&1\\0&\cdots&0&1&0\end{pmatrix}$ carrées de dimensions n, telles que $a_{i,j}=1$ si $i-j=1$ ou si $i-j=-1$ et $a_{i,j}=0$ dans les autres cas. On sait que de telles matrices symétrique réelles ont des valeurs propres toutes réelles.

② Soit λ une valeur propre de A_n, et soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ un vecteur propre (non nul) associé.

Soit k le numéro de ligne tel que $|x_k|=Max(|x_1|,\ldots,|x_n|)$

Montrer que $|\lambda||x_k|\leq|x_{k-1}|+|x_{k+1}|$ (En posant par convention $x_0=x_{n+1}=0$ si $k=1$ ou $k=n$).

En déduire que $|\lambda|\leq 2$
Nous allons chercher dans la suite ces valeurs propres λ_k en posant $\lambda_k=2\cos(\alpha_k)$

Partie B

① On considère les suites $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles qui vérifient la relation de récurrence (R): $\forall k\geq 2,\quad x_k=(2\cos\alpha)x_{k-1}-x_{k-2}$ avec $0<\alpha<\pi$
Montrer que les suites de puissances $(r^k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui vérifient (R) sont telles que r est une des solutions de l'équation $r^2-(2\cos\alpha)r+1=0$

Donner les solutions de cette équation sous forme d'exponentielles complexes.
② En déduire que les suites réelles $(\sin(k\alpha))_{k\in\mathbb{N}}$ vérifient (R) et les conditions $x_0=0$ et $x_1\neq 0$

[Rappel : $\sin p+\sin q=2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$]

③ Pour n donné, montrer que le vecteur de composantes $(\sin(k\alpha)), 1 \le k \le n$ est un vecteur propre pour la matrice $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ à condition que $\sin((n+1)\alpha) = 0$

④ Pour n donné et $0 < \alpha < \pi$, déterminer les valeurs de α telles que $\sin((n+1)\alpha) = 0$. En déduire n vecteurs propres de la matrice A_n, associés à n valeurs propres distinctes que l'on précisera.

⑤ Montrer que si r est un entier naturel non nul $\sum_{k=0}^{k=2n+1} e^{\frac{kr\pi i}{n+1}} = 0$. En déduire la somme $\sum_{k=1}^{k=n} \cos\left(\frac{kr\pi}{n+1}\right)$ en distinguant le cas ou r est un entier naturel non nul, et le cas $r = 0$

⑥ Pour $1 \le r \le n$, on se donne la matrice unicolonne v_r de matrice transposée uniligne ${}^t v_r = \left(\sin\frac{r\pi}{n+1} \quad \sin\frac{2r\pi}{n+1} \quad \ldots \quad \sin\frac{kr\pi}{n+1} \quad \ldots \quad \sin\frac{nr\pi}{n+1}\right)$. Calculer le produit ${}^t v_r v_s$ en distinguant les cas où $r \ne s$ et où $r = s$ [Indication : préciser d'abord l'expression linéarisée de $\sin a \sin b$ et $\sin^2 a$]

⑦ On définit $P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$, la matrice carrée de dimensions n dont les colonnes sont les $v_1 \ldots v_n$ de la question précédente. Calculer le produit matriciel ${}^t PP$

⑧ En déduire le résultat du produit matriciel ${}^t P A_n P$

⑨ Sans effectuer de nouveaux calculs, déduire de ce qui précède les valeurs propres de la matrice

C= $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ de dimension 5, ainsi qu'un vecteur propre pour la plus grande valeur propre.0

Problème 2

On note f la fonction de période 2π sur È, et telle que $\begin{cases} f(x) = 0 \; si \; 0 \le x < \pi \\ f(x) = -\sin x \; si \; \pi \le x < 2\pi \end{cases}$

Sa série de Fourier est notée $S_f(x)$, avec $S_f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} [a_n \cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x)]$

Partie A

① Calculer a_0, a_1 et b_1

② Montrer que si n≥2, $b_n = 0$, et calculer a_n en distinguant le résultat selon que n est pair ou impair. Écrire la série de Fourier de f.

③ Justifier que $f(\pi) = S_f(\pi)$, et en déduire la valeur de la série numérique $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2 - 1}$

④ Quelle est la série de Fourier de $g(x) = f(x) + \frac{\sin x}{2}$? Donner une expression plus simple de g . Montrer que g est paire et la représenter graphiquement sur È.

Partie B

Soit plus généralement h, de période 2π, continue, de classe C^1 par intervalles et telle que $h(0) = h(2\pi)$

On note $a_n(h)$, $b_n(h)$ les coefficients de Fourier de h, et $a_n(h')$, $b_n(h')$ ceux de la dérivée h'.

① Montrer que $a_0(h') = 0$. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que si n≥1, $a_n(h') = nb_n(h)$ et $b_n(h') = -na_n(h)$

② On suppose ici que $\int_0^{2\pi} [h'(x)]^2 dx$ converge. En déduire que la série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 [a_n^2(h) + b_n^2(h)]$ est convergente. Calculer sa somme en donnant le résultat à l'aide d'une intégrale.

③ Justifier que ces résultats s'appliquent à la fonction f.

Donner les valeurs de la somme des séries $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(4p^2-1)^2}$ et $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{p^2}{(4p^2-1)^2}$

Problème 3

On note (E) l'équation différentielle $4x\,y''(x) + 2\,y'(x) + y(x) = 0$, où *y(x)* désigne la fonction inconnue.

Partie A

On cherche ici les solutions de (E) qui sont développables en série entière sur un intervalle de centre 0, sous la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

① Montrer que si $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de (E), alors si $n \ge 1, 2n(2n-1)a_n + a_{n-1} = 0$

② En déduire l'expression de a_n en fonction de a_0

③ Quel est le rayon de convergence de la série obtenue ? En déduire qu'il existe une unique solution de (E) développable en série entière en 0, et telle que y(0)=1 . On notera $y_1(x)$ cette solution.

④ Vérifier que $y_1(x) = \cos\sqrt{x}$ pour x≥0 ; que vaut $y_1(x)$ si x<0 ?

Partie B

On cherche maintenant sur $]0,+\infty[$ les solutions de (E) de la forme, $y(x) = k(x)\,y_1(x)$ où $y_1(x)$ est la solution trouvée dans la partie A.

① Montrer que $y(x)=k(x)\,y_1(x)$ est solution de (E) si et seulement si $4xy_1(x)k''(x)+[8xy_1'(x)+2y_1(x)]k'(x)=0$, puis que $\dfrac{k''(x)}{k'(x)}=-\dfrac{1}{2x}-2\dfrac{y_1'(x)}{y_1(x)}$ lorsque les dénominateurs ne sont pas nuls.

En déduire $k'(x)$ pour x>0 .

② Montrer que la dérivée de $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ est égale à $\dfrac{1}{\cos^2 x}$; en déduire que $k(x)=\alpha\tan\sqrt{x}+\beta$, avec α ,β constantes réelles.

③ En déduire que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont de la forme $y(x)=\alpha\sin\sqrt{x}+\beta\cos\sqrt{x}$

④ Quelles sont les solutions de (E) dérivables en 0 ?

Peut-on déterminer une solution vérifiant $\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$?