Mathématiques - Concours ATS 2023
Proposition de corrigé

Exercice 1 :
Partie A – Étude d'une matrice

1. (a) Comme ${}^tA \neq A$, alors $\boxed{\text{La matrice } A \text{ n'est pas symétrique réelle.}}$

   (b) En développant par rapport à la première ligne, on obtient $\det A = -1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$:

   $\boxed{\text{la matrice } A \text{ n'est pas inversible.}}$
   Le noyau de A n'est alors pas réduit au vecteur nul, donc il existe un vecteur colonne U non nul tel que $AU = 0U$ c'est-à-dire que U est vecteur propre de A associé à la valeur propre 0.
   $\boxed{\text{Une valeur propre de } A \text{ est } 0.}$

2. (a) On a

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ \lambda & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \quad C_1 \longleftarrow C_1 - C_3 \\
&= \lambda \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda \begin{vmatrix} 0 & 2 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \quad L_1 \longleftarrow L_1 + L_3 \\
&= \lambda \begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{vmatrix} \\
&= \lambda(4 - \lambda^2)
\end{aligned}$$

   soit

$$\boxed{P(\lambda) = \lambda(2 - \lambda)(2 + \lambda).}$$

   (b) Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.
   $\boxed{\text{La matrice } A \text{ admet 3 valeurs propres simples et distinctes } \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 0 \text{ et } \lambda_3 = 2.}$

   (c) La matrice A admet 3 valeurs propres distinctes, donc, d'après la condition suffisante de diagonalisation, $\boxed{\text{la matrice } A \text{ est diagonalisable.}}$

3. (a) $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1} \iff AU = \lambda_1 U$ soit le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} y = -2x \\ 2x + 2z = -2y \\ y = -2z \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + \ \ y \qquad\quad = 0 & L_1 \\ 2x + 2y + 2z = 0 & L_2 \\ \qquad\ \ y + 2z = 0 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 & L_1 \longleftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ 2x + y \qquad = 0 & L_2 \longleftarrow L_1 \\ 2x + y \qquad = 0 & L_3 \longleftarrow L_2 - L_3 \end{cases} \quad \text{soit}$$

$$\begin{cases} x = x \\ y = -2x \\ z = x \end{cases}$$. On a alors $E_{\lambda_1} = \mathbf{Vect}\left((1, -2, 1)\right)$.

   $\boxed{\text{Une base de } E_{\lambda_1} \text{ est le vecteur } (1, -2, 1).}$

(b) De même, $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2} \iff AU = \lambda_2 U$ soit le système suivant à résoudre : $\begin{cases} y = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

soit $\begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = -x \end{cases}$. On a alors $E_{\lambda_2} = \mathbf{Vect}\left((1, 0, -1)\right)$.

$\boxed{\text{Une base de } E_{\lambda_2} \text{ est le vecteur } (1, 0, -1).}$

(c) De même, $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_3} \iff AU = \lambda_3 U$ soit le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} y = 2x \\ 2x + 2z = 2y \\ y = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - \ \ y \qquad\ \ = 0 & L_1 \\ 2x - 2y + 2z = 0 & L_2 \\ \qquad\ y - 2z = 0 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} \ \ x - y + z = 0 & L_1 \longleftarrow \frac{1}{2} L_2 \\ 2x - y \qquad = 0 & L_2 \longleftarrow L_1 \\ 2x - y \qquad = 0 & L_3 \longleftarrow L_2 + L_3 \end{cases} \text{ soit}$$

$\begin{cases} x = x \\ y = 2x \\ z = x \end{cases}$ On a alors $E_{\lambda_3} = \mathbf{Vect}\left((1, 2, 1)\right)$.

$\boxed{\text{Une base de } E_{\lambda_3} \text{ est le vecteur } (1, 2, 1).}$

4. La matrice A est diagonalisable, et on a

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

et une matrice Q de passage, donc inversible, qui est

$$\boxed{Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

avec $D = Q^{-1}AQ$ soit $A = QDQ^{-1}$

5. En écriture matricielle, le polynôme P a pour coordonnées $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, son image par v a pour coordonnées $AU = \begin{pmatrix} b \\ 2a + 2c \\ b \end{pmatrix}$ soit en écriture vectorielle,

$$\boxed{v(P) = bX^2 + 2(a + c)X + b}$$

6. Les coordonnées de polynôme $X^2 - 2X + 1$ dans la base donnée sont $(1, -2, 1)$, du polynôme $X^2 - 1$, $(1, 0, -1)$ et du polynôme $X^2 + 2X + 1$ sont $(1, 2, 1)$.
On remarque que ces coordonnées sont celles des vecteurs propres de la matrice A qui forment une base, donc $\boxed{\text{la famille } \mathscr{C} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$

7. $\boxed{\text{Dans cette base } \mathscr{C}\text{, la matrice de } v \text{ est alors la matrice diagonale } D.}$

Partie B – Étude d'un endomorphisme

1. $\boxed{\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n}$.

2. (a) Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Sachant que la dérivation est linéaire, on a immédiatement $f_n(P+Q) = f_n(P) + f_n(Q)$ et pour tout réel λ, $f_n(\lambda P) = \lambda f_n(P)$.

   $\boxed{f_n \text{ est une application linéaire.}}$

   (b) — En prenant $P = 1$ d'où $P' = 0$, on obtient $\boxed{f_n(1) = (n-1)X.}$

   — Pour $P = X^{n-1}$ alors $P' = (n-1)X^{n-2}$ d'où $\boxed{f_n(X^{n-1}) = (n-1)X^{n-2}.}$

   — Pour $k \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$ $P = X^k$ d'où $P' = kX^{k-1}$ d'où $\boxed{f_n(X^k) = (n-1-k)X^{k+1} + kX^{k-1}.}$

   (c) Comme $k \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$, alors $f_n(X^k)$ est au plus de degré $n-1$, $f_n(1)$ de degré 1 et $f_n(X^{n-1})$ de degré $n-2$, et $f_n(P)$ s'écrit comme combinaison linéaire de ces $f_n(X^k)$, alors $f_n(P)$ est de degré inférieur ou égal à $n-1$:

   $\boxed{f_n \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_{n-1}[X].}$

3. À l'aide de la question précédente pour $n = 3$, on a :
   $f_3(1) = 2X,\ \ f_3(X) = X^2 + 1,\ \ f_3(X^2) = 2X$. La matrice représentative de f_3 est donnée par l'image des vecteurs de base dans la base de l'espace d'arrivée, c'est-à-dire ici

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

4. On a $P_k = (X-1)^k(X+1)^{n-1-k}$ d'où $P_k' = k(X-1)^{k-1}(X+1)^{n-1-k} + (n-1-k)(X-1)^k(X+1)^{n-2-k}$.
   Comme $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ alors
   $(X^2-1)P_k' = k(X-1)^k(X+1)^{n-k} + (n-1-k)(X-1)^{k+1}(X+1)^{n-1-k}$.

$$\begin{aligned} f_n(P_k) &= (X-1)^k(X+1)^{n-1-k}\left[(n-1)X - k(X+1) - (n-1-k)(X-1)\right] \\ &= (n-1-2k)(X-1)^k(X+1)^{n-1-k} \end{aligned}$$

   soit $f_n(P_k) = (n-1-2k)P_k$.
   Comme P_k n'est pas le polynôme nul, cela signifie que
   $\boxed{P_k \text{ est vecteur propre de } f_n \text{ associé à la valeur propre } n-1-2k}$

5. k prend n valeurs distinctes entre 0 et $n-1$ donc f_n admet n valeurs propres distinctes. Par conséquent, d'après la condition suffisante de diagonalisation, $\boxed{f_n \text{ est diagonalisable.}}$

Exercice 2 :
Partie A – Deux équations différentielles

1. (a) (E_0) s'écrit $y'' = 0$ donc les solutions sont de la forme $\boxed{t \longmapsto at + b, \quad \text{avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2.}$

   (b) Pour $\alpha > 0, (E_\alpha)$ s'écrit $y'' + \alpha y = 0$. Les solutions de cette équation différentielle harmonique sont données par

$$\boxed{t \longmapsto a\cos t\sqrt{\alpha} + b\sin t\sqrt{\alpha}, \quad \text{avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2.}$$

2. (a) On a $u(t) = tv(t^2)$ d'où par dérivation d'un produit et des fonctions composées,

$$\boxed{u'(t) = v(t^2) + 2t^2 v'(t^2).}$$

   (b) De même, $u''(t) = 2tv'(t^2) + 4tv'(t^2) + 4t^3 v''(t^2)$ soit

$$\boxed{u''(t) = 4t^3 v''(t^2) + 6tv'(t^2).}$$

(c) u est solution de (E_α) si et seulement si $u''+\alpha u=0$, soit pour $t>0$, $4t^3v''(t^2)+6tv'(t^2)+\alpha tv(t^2)=0$ c'est-à-dire après simplification par $t\neq 0$, $\boxed{4t^2v''(t^2)+6v'(t^2)+\alpha v(t^2)=0.}$

À l'aide du changement de variable bijectif de $\mathbb{R}^{*+}$ dans $\mathbb{R}^{*+}$, $X=t^2$, cela équivaut à $4Xv''(X)+6v'(X)+\alpha v(X)=0$, soit en revenant en variable $t=X$,

$\boxed{u \text{ est solution de } (E_\alpha) \text{ si et seulement si } v \text{ est solution de } (F_\alpha).}$

3. (a) D'après la question précédente, u est solution de (E_0) si et seulement si v est solution de (F_0). Or les solutions de (E_0) sont les fonctions données par $u(t)=at+b$ et $u(t)=tv(t^2)$. D'où, comme $t>0$, $v(t^2)=a+\dfrac{b}{t}$ soit $v(t)=a+\dfrac{b}{\sqrt{t}}$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

En prenant les notations de l'énoncé, on obtient que

$\boxed{\text{les solutions de } (F_0) \text{ sont les fonctions de la forme } t\longmapsto \dfrac{C_1}{\sqrt{t}}+C_2 \text{ avec } (C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2.}$

(b) De même, on obtient $u(t)=tv(t^2)=a\cos t\sqrt{\alpha}+b\sin t\sqrt{\alpha}$ d'où, en prenant les notations de l'énoncé, on obtient pour $\alpha>0$

$\boxed{\text{les solutions de } (F_\alpha) \text{ sont les fonctions de la forme } t\longmapsto C_1\dfrac{\cos\sqrt{\alpha t}}{\sqrt{t}}+C_2\dfrac{\sin\sqrt{\alpha t}}{\sqrt{t}} \text{ avec } (C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2.}$

Partie B – Une équation aux dérivées partielles

1. $\boxed{U \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^3\text{, donc pas un fermé de } \mathbb{R}^3.}$

2. (a) La fonction $(x,y,z)\longmapsto x^2+y^2+z^2$ étant un polynôme de degré 2 en x,y,z est donc définie et de classe $\mathscr{C}^2$ sur U, d'image $]0\,;+\infty[$. Par composée avec la fonction v de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$, alors $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } U.}$

(b) Par dérivation des fonctions composées, on obtient immédiatement

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2xv'(x^2+y^2+z^2).}$$

(c) Par dérivation d'un produit et de fonctions composées, on obtient de même

$$\boxed{\forall (x,y,z)\in U,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)=4x^2v''(x^2+y^2+z^2)+2v'(x^2+y^2+z^2).}$$

Par permutation circulaire des lettres x, y et z, on obtient de même

$$\boxed{\forall (x,y,z)\in U,\quad \begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)=4y^2v''(x^2+y^2+z^2)+2v'(x^2+y^2+z^2)\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)=4z^2v''(x^2+y^2+z^2)+2v'(x^2+y^2+z^2)\end{array}}$$

(d) À l'aide des questions précédentes, on obtient

$$\boxed{\forall (x,y,z)\in U,\quad \Delta f=6v'(x^2+y^2+z^2)+4(x^2+y^2+z^2)v''(x^2+y^2+z^2).}$$

3. $\Delta f+\alpha f=0$ équivaut à $6v'(x^2+y^2+z^2)+4(x^2+y^2+z^2)v''(x^2+y^2+z^2)+\alpha v(x^2+y^2+z^2)=0$, soit en posant $t=x^2+y^2+z^2>0$, on reconnaît l'équation différentielle (F_α).

$\boxed{f \text{ est solution de } \Delta f+\alpha f=0 \text{ si et seulement si } v \text{ est solution de } (F_\alpha).}$

4. D'après la question précédente, $\Delta g=0$ équivaut à v solution de (F_0). On a $v(t)=\dfrac{C_1}{\sqrt{t}}+C_2$ d'où, par exemple en prenant $C_1=1$ et $C_2=0$

$\boxed{\text{Une solution de } \Delta g=0 \text{ est } g(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.}$

Exercice 3 :

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0.
$\forall t \in \,]-\pi\,;\pi[\,,\ -t \in \,]-\pi\,;\pi[\,,\ f(-t) = -t\cos t = -f(t)$ à l'aide de la parité de la fonction cosinus.
$f(\pi) = f(-\pi) = 0$ car f est 2π-périodique, donc f est impaire sur $[-\pi\,;\pi]$.
Grâce à la période, $\boxed{f \text{ est impaire sur } \mathbb{R}.}$

2. (a) f étant impaire, on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 0.}$

(b)

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t \quad f \text{ est impaire} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\cos t\sin t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\sin 2t\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

En posant $\begin{cases} u = t \\ v' = \sin 2t \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u' = 1 \\ v = -\dfrac{1}{2}\cos 2t \end{cases}$ avec u et v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;\pi]$, on a par intégration par parties

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} t\sin 2t\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{2}t\cos 2t\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2t\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\left[\sin 2t\right]_0^{\pi} \\
&= -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Soit $\boxed{b_1 = -\dfrac{1}{2}.}$

(c) $\forall n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t \quad f \text{ est impaire} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\cos t\sin nt\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\left(\sin(n+1)t + \sin(n-1)t\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{\pi} t\sin(n+1)t\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} t\sin(n-1)t\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

En posant $\begin{cases} u = t \\ v' = \sin(n+1)t \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u' = 1 \\ v = -\dfrac{1}{n+1}\cos(n+1)t \end{cases}$ avec u et v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;\pi]$, on a par intégration par parties

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} t\sin(n+1)t\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{t\cos(n+1)t}{n+1}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n+1}\int_0^{\pi}\cos(n+1)t\,\mathrm{d}t \\
&= -\pi\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}\left[\sin(n+1)t\right]_0^{\pi} \qquad \text{or } \cos k\pi = (-1)^k \\
&= -\pi\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + 0 \\
&= \pi\frac{(-1)^n}{n+1}
\end{aligned}$$

En changeant $n+1$ en $n-1$ dans la formule précédente, on obtient également
$\displaystyle\int_0^\pi t\sin(n-1)t\,\mathrm{d}t = \pi\frac{(-1)^n}{n-1}$.
On en déduit alors

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \quad b_n = (-1)^n\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}\right].}$$

3. (a) Par définition de la fonction, f est continue sur $]-\pi\,;\pi[$ et avec la période 2π, f est continue sur $\mathbb{R}$ privé de $t_k = \pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$.
Si $t \neq \pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$, l'égalité est vraie car f est continue en t.
Si $t = \pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$, les limites quand h tend vers 0 de $f(t+h)$ et $f(t-h)$ sont opposées et valent π ou $-\pi$.
Le membre de droite de légalité proposée vaut donc toujours 0 qui est la valeur de $f(t) = f(\pi)$.
Donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{2}\left(f(t+h)+f(t-h)\right).}$

(b) L'énoncé dit que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux.
Donc d'après le théorème de Dirichlet, le série de Fourier converge vers la fonction régularisée, qui est justement obtenue à la question précédente.
Par conséquent, $\boxed{\text{la série de Fourier } Sf \text{ converge vers } f.}$

4. (a) Pour $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}
b_n^2 &= \left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}\right]^2 \\
&= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{(n+1)(n-1)} + \frac{1}{(n-1)^2}
\end{aligned}$$

Par décomposition en éléments simples immédiate, $\dfrac{2}{(n+1)(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$. On en déduit

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ b_n^2 = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}.}$$

(b) On a vu précédemment que $\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{2}{(n+1)(n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.
Or la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, donc d'après le théorème sur les équivalents, la série à termes positifs $\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right) \text{ converge.}}$

En posant pour $N \geqslant 2$, $S_N = \displaystyle\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$, on a

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{N+1}\frac{1}{k} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{N-1}\frac{1}{k} - \left(\sum_{k=3}^{N-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{1}{N} = \lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{1}{N+1} = 0$ d'où

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right) \text{ converge et } \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3}{2}.}$$

(c) Comme $\sum \dfrac{1}{(n+1)^2}$ et $\sum \dfrac{1}{(n-1)^2}$ convergent, séries de Riemann, alors on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty} b_n^2 &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)^2} + \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= \sum_{k=3}^{+\infty}\frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} + \frac{3}{2}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} - \left(1+\frac{1}{4}\right) + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} + \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} b_n^2 = 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{4}.}$$

5. (a)

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi} t^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2t)t^2\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} t^2\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} t^2\cos 2t\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} t^2\cos 2t\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\pi^3}{6} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} t^2\cos 2t\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

En posant $\begin{cases} u = t^2 \\ v' = \cos 2t \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u' = 2t \\ v = \dfrac{1}{2}\sin 2t \end{cases}$ avec u et v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;\pi]$, on a par intégration par parties

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} t^2\cos 2t\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\left[t^2\sin 2t\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} t\sin 2t\,\mathrm{d}t\\ &= 0 - \int_0^{\pi} t\sin 2t\,\mathrm{d}t\\ &= -\pi b_1\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\int_0^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4}.}$$

(b) À l'aide de la relation de Parseval, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t &= a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)\\ &= \frac{1}{2}b_1^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} b_n^2\end{aligned}$$

Or $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t$ car f^2 est paire.

On a également $\dfrac{1}{2}b_1^2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} b_n^2 = \dfrac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$ d'où l'on tire

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Exercice 4 :

1. La fonction `calculSomme(n)` en pseudo-code et en `Scilab` :

Fonction calculSomme(n)

$s \leftarrow 0$
pour k *valant de* 1 *à* n **faire**
  $s \leftarrow s + \dfrac{1}{k^2}$
fin
retourner s

```
function s=calculSomme(n)
    s=0
    for k=1:n
        s=s+1/(k^2)
    end
endfunction
```

Quelques valeurs de `calculSomme(n)` :

```
--> calculSomme(10)
 ans  = 1.5497677
--> calculSomme(100)
 ans  = 1.6349839
--> calculSomme(1000)
 ans  = 1.6439346
```

2. La fonction `approx(eps)` en pseudo-code et en `Scilab` :

Fonction approx(eps)

$n \leftarrow 1$
tant que $\dfrac{1}{n} > eps$ **faire**
  $n \leftarrow n + 1$
fin
retourner $calculSomme(n)$

```
function s=approx(eps)
    n = 1
    while 1/n > eps
        n = n + 1
    end
    s=calculSomme(n)
endfunction
```

Remarque : il était possible de se passer de boucle `TantQue` en remarquant que $\dfrac{1}{n} \leqslant eps$ est vrai pour tout entier $n \geqslant \left\lfloor \dfrac{1}{eps} \right\rfloor + 1$. Il suffit donc pour la fonction `approx` de renvoyer $calculSomme\left(\left\lfloor \dfrac{1}{eps} \right\rfloor + 1\right)$. La valeur de $\left\lfloor \dfrac{1}{eps} \right\rfloor + 1$ s'obtient par l'instruction `ceil(1/eps)` en *Scilab*.

Quelques valeurs approchées de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$:

```
--> approx(0.1)
 ans  = 1.5497677
--> approx(0.001)
 ans  = 1.6439346
--> approx(0.00001)
```

```
 ans = 1.6449241
--> %pi^2/6
 ans = 1.6449341
```

Exercice 5 :

Partie A – Construction géométrique

1. $$z_{\overrightarrow{OM_1}} = z_{M_1} - z_O = z_1 - 0 = z^2$$

   et

   $$z_{\overrightarrow{NM_2}} = z_{M_2} - z_N = z_2 - f(z) = 2z - \left(2z - z^2\right) = z^2 = z_{\overrightarrow{OM_1}}.$$

   Donc $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{NM_2}$ et le quadrilatère OM_1M_2N est un parallélogramme.
2. $|z_1| = \left|z^2\right| = (|z|)^2 = (1)^2 = 1$ et $\operatorname{Arg}(z_1) \equiv \operatorname{Arg}\left(z^2\right)[2\pi] \equiv 2 \times \operatorname{Arg}(z)[2\pi]$.
3. (a) On commence par construire M_1 $|z_1| = 1$ et $\operatorname{Arg}(z_1) \equiv 2 \times \operatorname{Arg}(z)[2\pi]$.
   Donc M_1 est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

   (b) puis on construit M_2 :
   $z_2 = 2z$ donc M_2 est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport 2.

   (c) Enfin, on construit N comme quatrième sommet du parallélogramme OM_1M_2N.

Partie B – Tracé d'une courbe paramétrée

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

   $$z_N = f(z) = 2z - z^2 = 2 * \mathrm{e}^{it} - \left(\mathrm{e}^{it}\right)^2 = 2\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{i2t}.$$

   D'où,

   $$\begin{aligned} x(t) + iy(t) &= 2(\cos t + i\sin t) - (\cos(2t) + i\sin(2t)) \\ &= (2\cos t - \cos(2t)) + i(2\sin t - \sin(2t)). \end{aligned}$$

   Par identification des parties réelles et parties imaginaires

   $$\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$$

2. (a) Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

   $$\begin{cases} x(t+2\pi) &= 2\cos(t+2\pi) - \cos 2(t+2\pi) = 2\cos(t+2\pi) - \cos(2t+4\pi) \\ y(t+2\pi) &= 2\sin(t+2\pi) - \sin 2(t+2\pi) = 2\sin(t+2\pi) - \sin(2t+4\pi) \end{cases}$$

   donc

   $$\begin{cases} x(t+2\pi) = 2\cos t - \cos 2t = x(t) \\ y(t+2\pi) = 2\sin t - \sin 2t = y(t) \end{cases}$$

   Conclusion, les fonctions x et y sont 2π–périodiques.

   (b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

   $$\begin{cases} x(-t) = 2\cos(-t) - \cos 2(-t) = 2\cos(-t) - \cos(-2t) \\ y(-t) = 2\sin(-t) - \sin 2(-t) = 2\sin(-t) - \sin(-2t) \end{cases}$$

   donc

   $$\begin{cases} x(-t) = 2\cos t - \cos 2t = x(t) \\ y(-t) = -2\sin t - (-\sin 2t) = -(2\sin t - \sin 2t) = -y(t) \end{cases}$$

   Conclusion, le point $N(-t)$ se déduit du point $N(t)$ par la symétrie d'axe l'axe des abscisse.

(c) Nous allons étudier la courbe paramétrée sur l'intervalle $I = [0; \pi]$. Nous obtiendrons ensuite la courbe paramétrée sur l'intervalle $I = [-\pi; \pi]$ par symétrie d'axe l'axe des abscisses (voir question 2(b)) et nous aurons ainsi la totalité de la courbe paramétrée sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par périodicité de x et y (voir question 2.(a)).

3. (a) x et y sont des sommes de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
$\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x'(t) = 2(-\sin t) - (-2\sin 2t) = 2(\sin(-t) - \sin(-2t)) \\ y'(t) = 2\cos t - 2\cos 2t = 2(\cos t - \cos 2t) \end{cases}$$

ie

$$\begin{cases} x'(t) = 2\left(2\cos\dfrac{(-t)+(-2t)}{2}\sin\dfrac{(-t)-(-2t)}{2}\right) = 4\cos\dfrac{-3t}{2}\sin\dfrac{t}{2} \\ y'(t) = 2\left(-2\sin\dfrac{t+(-2t)}{2}\sin\dfrac{t-(-2t)}{2}\right) = -4\sin\dfrac{-t}{2}\sin\dfrac{3t}{2} \end{cases}$$

Conclusion,

$$\begin{cases} x'(t) = 4\cos\dfrac{3t}{2}\sin\dfrac{t}{2} \\ y'(t) = 4\sin\dfrac{t}{2}\sin\dfrac{3t}{2} \end{cases}$$

Signe de $x'(t)$

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\frac{3t}{2}$	0	$+$	$\frac{\pi}{2}$	$+$	π	$+$	0
$\cos\frac{3t}{2}$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	0
$\frac{t}{2}$	0	$+$	$\frac{\pi}{6}$	$+$	$\frac{\pi}{3}$	$+$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\frac{t}{2}$	0	$+$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	1
Signe de $x'(t)$	0	$+$	0	$-$	$-2\sqrt{3}$	$-$	0

Signe de $y'(t)$

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\frac{3t}{2}$	0	$+$	$\frac{\pi}{6}$	$+$	$\frac{\pi}{3}$	$+$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\frac{3t}{2}$	0	$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+$	1
$\frac{2t}{2}$	0	$+$	$\frac{\pi}{2}$	$+$	π	$+$	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\frac{3t}{2}$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	-1
Signe de $y'(t)$	0	$+$	2	$+$	0	$-$	-4

(b) Nous obtenons le tableau de variation :

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
Signe de $x'(t)$	0	$+$	0	$-$	$-2\sqrt{3}$	$-$	0
Variations de x	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	-3
Signe de $y'(x)$	0	$+$	2	$+$	0	$-$	-4
Variations de y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

4. Soit $t \in]0, \pi]$, $\overrightarrow{M(t)N(t)}\begin{pmatrix}(2\cos t - \cos 2t) - (\cos t)\\(2\sin t - \sin 2t) - (\sin t)\end{pmatrix}$ ie $\overrightarrow{M(t)N(t)}\begin{pmatrix}\cos t - \cos 2t\\\sin t - \sin 2t\end{pmatrix}$.

   Or la tangente à la courbe paramétrée en $N(t)$ a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{pmatrix}$ ie

$$\vec{v}\begin{pmatrix}2(-\sin t) - (-2\sin 2t)\\2\cos t - 2\cos 2t\end{pmatrix} = \vec{v}\begin{pmatrix}2(-\sin t + \sin 2t)\\2(\cos t - \cos 2t)\end{pmatrix}.$$

   Donc le produit scalaire,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M(t)N(t)} \cdot \overrightarrow{v} &= (\cos t - \cos 2t) \times 2(-\sin t + \sin 2t) + (\sin t - \sin 2t) \times 2(\cos t - \cos 2t)\\&= -2(\cos t - \cos 2t)(\sin t - \sin 2t) + 2(\cos t - \cos 2t)(\sin t - \sin 2t) = 0.\end{aligned}$$

   Donc, le vecteur $\overrightarrow{M(t)N(t)}$ est orthogonal à la tangente à la courbe paramétrée en $N(t)$.

5. **Détail des points et tangentes :** $t = 0$
   $x'(0) = y'(0) = 0$ Donc N_0 est un point singulier
   $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x''(t) = -2\cos t - (-2)(2)\cos 2t\\ y''(t) = -2\sin t - 2(-2)\sin 2t\end{cases}$$

   donc, $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x''(0) = -2\cos 0 - (-2)(2)\cos 0 = 2\\ y''(t) = -2\sin t - 2(-2)\sin 2t = 0\end{cases}$$

   Donc la courbe a pour vecteur tangent $v_0\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ en $N_0(1, 0)$.

   $t = \frac{\pi}{3}$
   $x'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ et $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$.

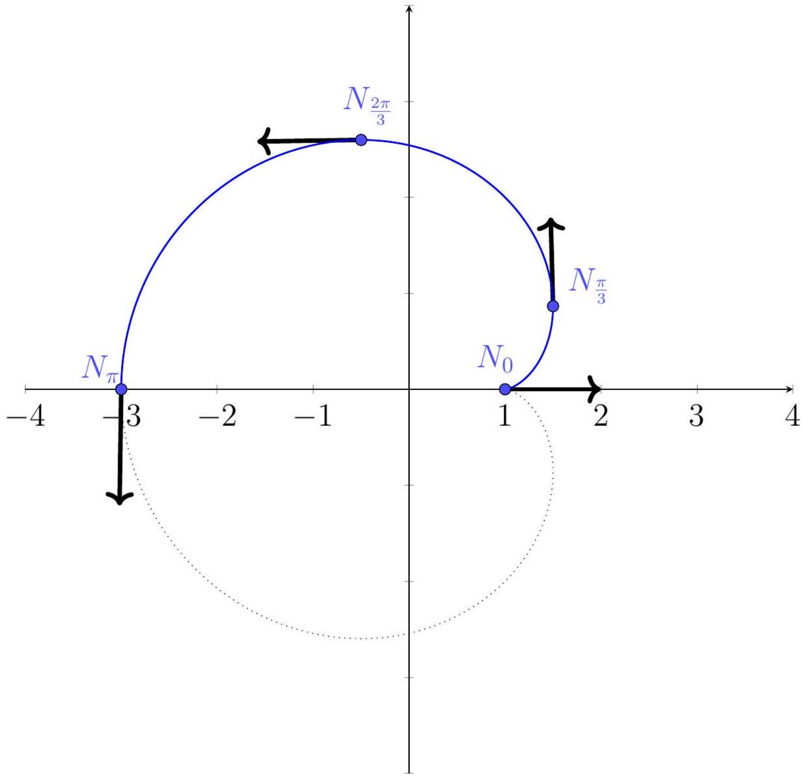
   Donc $N_{\frac{\pi}{3}}$ est un point régulier et la courbe a pour vecteur tangent $v_{\left(\frac{\pi}{3}\right)}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ en $N_{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$t = \dfrac{2\pi}{3}$
$x'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -2$ et $y'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 0.$

Donc $N_{\frac{2\pi}{3}}$ est un point régulier et la courbe a pour vecteur tangent $v_{\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ en $N_{\frac{2\pi}{3}}\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$t = \pi$
$x'(\pi) = 0$ et $y'(\pi) = -4$.

Donc N_π est un point régulier et la courbe a pour vecteur tangent $v_{(\pi)}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$ en $N_\pi\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



6. Posons

$$L = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\left(4\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}\right)^2 + \left(4\sin\frac{t}{2}\sin\frac{3t}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\left(4\sin\frac{t}{2}\right)^2\left[\left(\cos\frac{3t}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{3t}{2}\right)^2\right]}\mathrm{d}t$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\left(4\sin\frac{t}{2}\right)^2 \times 1}\,\mathrm{d}t$$
$$= 4 \times \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= 4 \times 2 \times \int_{0}^{\pi} \sqrt{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= 8 \times \int_{0}^{\pi} \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$$
$$= 8 \times \left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\pi}$$
$$= -16 \times \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right)$$
$$= -16 \times (0 - 1)$$

Donc, $L = 16$ unités de longueur.