CONCOURS BLANC
- ATS 2024-

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

<u>CALCULATRICE INTERDITE</u>

DURÉE DE L'ÉPREUVE: 3H

Exercice 1

Les parties A et B de cet exercice sont entièrement indépendantes.

Partie A — Étude d'une matrice

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (a) La matrice A est-elle symétrique ?
   (b) La matrice A est-elle inversible ? En déduire une valeur propre de A.

2. (a) Déterminer le polynôme caractéristique de A.
   (b) Montrer que la matrice A admet trois valeurs propres, que l'on notera λ_1, λ_2 et λ_3 et que l'on choisira telles que $\lambda_l < \lambda_2 < \lambda_3$. Quels sont les ordres de multiplicité de λ_1, λ_2 et λ_3 ?
   (c) En déduire que la matrice A est diagonalisable.

3. (a) Donner une base de l'espace propre de A associé à la valeur propre λ_1.
   (b) Donner une base de l'espace propre de A associé à la valeur propre λ_2.
   (c) Donner une base de l'espace propre de A associé à la valeur propre λ_3.

4. Donner une matrice diagonale D, dont les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible Q, dont les coefficients situés sur la première ligne sont tous des 1, telles que $A = QDQ^{-1}$. *On ne demande pas de calculer Q^{-1}.*

5. Notons v l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base $(X^2, X, 1)$ est A. Donner, pour un triplet (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ et le polynôme $P = aX^2 + bX + c$ de $\mathbb{R}_2[X]$, la valeur du polynôme $v(P)$ en fonction de a, b, c.

6. Montrer que la famille $\mathscr{C} = (X^2 - 2X + 1, X^2 - 1, X^2 + 2X + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

7. Donner la matrice de v dans la base $\mathscr{C}$.

Partie B - Étude d'un endomorphisme

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

1. Rappeler, sans démonstration, la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2. (a) On définit l'application f_n sur $\mathbb{R}_1[X]$ par
   $$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad f_n(P) = (n-1)XP - (X^2 - 1)P'.$$
   Montrer que f_n est linéaire.
   (b) Calculer $f_n(1), f_n(X^{n-1})$ et pour tout $k \in \{1, \cdots, n-2\}$, $f_n(X^k)$.
   (c) En déduire que f_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   (d) Dans cette question ***seulement***, on considère le cas $n = 3$. Donner la matrice représentative de f_3 dans la base $(X^2, X, 1)$.

3. On définit les polynômes $P_0, \cdots, P_{n-1}$ par
   $$P_k = (X-1)^k (X+1)^{n-1-k} \text{ pour } k \in \{1, \cdots, n-1\}.$$
   Justifier que pour tout $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, le polynôme P_k est vecteur propre de f_n et donner la valeur propre associée.

4. En déduire que f_n est diagonalisable.

Exercice 2

Les parties A et B de cet exercice sont essentiellement indépendantes. Seule la dernière question de la partie B peut éventuellement s'appuyer sur des résultats de la partie A.

Partie A — Deux équations différentielles

Soit $\alpha \geq 0$ un paramètre réel positif. On considère les deux équations différentielles suivantes

$$y'' + \alpha y = 0 \qquad (E_\alpha)$$
$$4ty''(t) + 6y'(t) + \alpha y(t) = 0 \qquad (F_\alpha)$$

Pour chacune de ces équations différentielles, l'inconnue y est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ à valeurs réelles.

1. (a) Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle (E_0).
   (b) Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle (E_α) lorsque $\alpha > 0$.

2. Soient u, v deux fonctions définies sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$, et vérifiant

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad u(t) = tv(t^2).$$

   (a) Donner, en tout point $t > 0$, une expression de $u'(t)$ en fonction de t, $v(t^2)$ et $v'(t^2)$.
   (b) Montrer que pour tout réel $t > 0$, on a $u''(t) = 4t^3v''(t^2) + 6tv'(t^2)$.
   (c) En déduire que u est solution de (E_α) si et seulement si v est solution de (F_α).

3. (a) Déduire de la question précédente que les solutions de l'équation différentielle (F_0) sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \frac{C_1}{\sqrt{t}} + C_2,$$

   où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles.
   (b) Donner de même la forme générale des solutions de (F_α) lorsque $\alpha > 0$.

Partie B — Une équation aux dérivées partielles

Dans cette partie, on note $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. On considère une fonction $v :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, puis on définit la fonction $f : U \to \mathbb{R}$ par

$$\forall (x, y, z) \in U, f(x, y, z) = v(x^2 + y^2 + z^2).$$

1. Répondre sans donner de démonstration aux questions suivantes : l'ensemble U est-il ouvert dans $\mathbb{R}^3$? Est-il fermé dans $\mathbb{R}^3$?

2. (a) Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$.
   (b) Donner, en tout point $(x, y, z) \in U$, une expression de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$ en fonction de x, y, z et de la fonction v'.
   (c) Montrer que

$$\forall (x, y, z) \in U, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = 4x^2v''(x^2 + y^2 + z^2) + 2v'(x^2 + y^2 + z^2).$$

   Donner de même une expression de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z)$.

(d) En déduire, pour tout $(x, y, z) \in U$, une expression de $\Delta f(x, y, z)$, où

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

désigne le laplacien de f.

3. Soit $\alpha \geq 0$. Montrer que f vérifie $\Delta f + \alpha f = 0$ sur U si et seulement si v est solution de l'équation (F_α) sur $]0; +\infty[$, que l'on rappelle ici

$$4ty"(t) + 6y'(t) + \alpha y(t) = 0 \qquad (F_\alpha)$$

4. Donner un exemple de fonction $g : U \to \mathbb{R}$ qui soit de classe$\mathscr{C}^2$, qui vérifie $\Delta g = 0$ sur U, et qui ne soit pas une fonction affine. *Indication : on pourra utiliser la question* $3(a)$ *de la partie A.*

Exercice 3

On considère la fonction $2\pi-$périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(-\pi) = 0$ et

$$\forall t \in]-\pi, \pi[, \quad f(t) = t \cos t$$

1. Étudier la parité de la fonction f.

2. On note

$$Sf(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$$

la série de Fourier de la fonction f.

(a) Calculer les coefficients a_n, pour $n \geq 0$.

(b) Calculer le coefficient b_1. *On rappelle que* $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$ *pour tout réel* t.

(c) Calculer les coefficients b_n pour tout entier $n \geq 2$. *On rappelle que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, \qquad \cos(x)\sin(y) = \frac{\sin(x+y) + \sin(y-x)}{2}$$

3. (a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(t) = \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} (f(t+h) + f(t-h))$

(b) Montrer que la série de Fourier Sf converge vers f. Énoncer le théorème utilisé.

4. (a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$b_n^2 = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$$

(b) Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$ est convergente de somme

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{3}{2}$$

(c) En déduire que $\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4}$.

5. (a) Calculer l'intégrale $\int_0^\pi f(t)^2 \mathrm{d}t$. *On rappelle que* $\cos^2(t) = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$ *pour tout réel* t.

(b) En appliquant le théorème de Parseval à la fonction f, trouver la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 4

1. Écrire une fonction `calculSomme`, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un entier naturel n non nul, et renvoie la valeur $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

2. On admet que
$$\forall n \geq 1, \quad \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{6} \right| \leq \frac{1}{n}$$
Écrire une fonction `approx`, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un réel `eps` strictement positif, et renvoie une approximation de $\pi^2/6$ à `eps` près.

Exercice 5

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \vec{u}; \vec{v})$. On définit l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = 2z - z^2$$

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A - Construction géométrique

Dans cette partie, on fixe un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ de module $|z| = 1$, tel que $z \neq 1$. On introduit le point M d'affixe z, le point M_1 d'affixe $z_1 = z^2$, le point M_2 d'affixe $z_2 = 2z$ et le point N d'affixe $f(z)$.

1. Montrer que le quadrilatère $\mathrm{OM}_1\mathrm{M}_2$ N est un parallélogramme.
2. Donner le module de z_1 et exprimer l'argument de z_1 en fonction de celui de z.
3. Déduire des questions précédentes une construction géométrique simple du point N .

Partie B - Tracé d'une courbe paramétrée

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{M}(t)$ le point d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ et $\mathrm{N}(t)$ le point d'affixe $f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)$. On note $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées cartésiennes du point $\mathrm{N}(t)$.

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$$

Le reste de cette partie se consacre à l'étude de la courbe paramétrée donnée par les fonctions x et y.

2. (a) Montrer que les fonctions x et y sont 2π-périodiques.
   (b) Pour tout réel $t \in \mathbb{R}$, montrer que le point $\mathrm{N}(-t)$ se déduit du point $\mathrm{N}(t)$ par une symétrie que l'on précisera.
   (c) Déduire des questions 2(a) et 2(b) un intervalle I de longueur minimale et de la forme $[0, \alpha]$ avec $\alpha > 0$ pour l'étude de la courbe paramétrée.

3. (a) Montrer que les fonctions x et y sont dérivables et déterminer les expressions de $x'(t)$ et $y'(t)$ pour tout $t \in [0, \pi]$, puis étudier leur signe. On rappelle les formules trigonométriques suivantes :

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

   (b) Dresser le tableau de variation conjoint des fonctions x et y sur l'intervalle $[0, \pi]$. On y fera apparaître les valeurs de $x(t), x'(t), y(t)$ et $y'(t)$ pour $t \in \{0, \pi/3, 2\pi/3, \pi\}$.

4. Montrer que pour tout réel $t \in]0, \pi]$, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M}(t)\mathrm{N}(t)}$ est orthogonal à la tangente à la courbe paramétrée en $\mathrm{N}(t)$.

5. Tracer la courbe paramétrée. On fera apparaître en particulier les points $\mathrm{N}(t)$ pour $t \in \{\pi/3, \pi/2, 2\pi/3, \pi\}$ ainsi que les tangentes en ces points.

6. Calculer la longueur de la courbe paramétrée, donnée par la formule

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ \mathrm{d}t$$