Planches d'oraux

1 Modalités :

À son arrivée dans la salle d'examen, un candidat reçoit une planche contenant deux exercices de mathématiques. Les jurys s'efforcent de poser des exercices balayant l'ensemble du programme de mathématiques du concours ATS. À l'issue du temps de préparation (de 30 minutes), il doit présenter les résultats des deux exercices, dans l'ordre qu'il souhaite, pour une durée totale de 25 minutes. Il était permis de refuser un des deux exercices et de s'en voir proposer un autre (dans un autre thème), mais dans ce cas la note finale du candidat était pénalisée de 25%.

2 Conseils :

Avant toute chose, tout candidat se doit de connaître le programme du concours, disponible sur le site du concours http://concours.ensea.fr. La consultation des rapports de concours des années précédentes est également vivement recommandée.

Lorsqu'une connaissance ou une idée manque à un candidat, l'examinateur cherche dans la plupart des cas à ce qu'il la (re)trouve, en posant des questions judicieuses, d'un niveau plus simple. Souvent, la maîtrise des mathématiques de secondaire est suffisante pour rebondir dans ce genre de situation. Il est également important de pouvoir calculer assez rapidement et sans erreur.

Enfin, cette épreuve, comme tout oral, ne peut se réduire à un simple « écrit debout ». Le candidat doit avoir à l'esprit les spécificités suivantes :

— Les justifications, commentaires et même certains raisonnements peuvent être donnés dans le cadre d'un dialogue avec l'examinateur. Il n'est pas nécessaire de tout écrire au tableau ;

— Le tableau peut servir de support pour l'intuition, notamment pour la visualisation géométrique ;

— Les candidats peuvent être interrogés à tout moment sur la nature des objets manipulés. Il s'agit de dire si telle quantité est un nombre, une fonction, un vecteur, une matrice, etc ;

— Les capacités de présentation, d'écoute, d'attention, de réaction sont des éléments importants d'évaluation. A contrario, la passivité et l'attentisme sont à proscrire lors de l'oral ;

— Les candidats polis, volontaires et dynamiques sont avantagés, alors que les candidats arrogants, qui mâchent un chewing gum ou manquent d'initiative sont pénalisés.

Planche 1/

Exercice 1

Soit $(n, a) \in \mathbb{N}^* \times (\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z})$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\mathrm{Y}^2 + 2\cos(a)\mathrm{Y} + 1 = 0.$$

2. Soit $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^{2n} + 2\cos(a)\mathrm{X}^n + 1$.
   Donner la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ puis dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Exercice 2

Résoudre l'équation différentielle :

$$(x^2 + 1)\, y' + 2xy + 1 = 0.$$

Planche 2/

Exercice 1

Étudier la convergence de l'intégrale suivante, puis la calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx.$$

Exercice 2

Condition d'inversibilité d'une matrice dépendant d'un paramètre.

Planche 3/

Exercice 1

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^4 + z^2 + 4 = 0$.

Exercice 2

On sait que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Calculer : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$.

Planche 4/

Exercice 1

1. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer le polynôme caractéristique de A.

   (b) Déterminer les valeurs propres de A et leur multiplicité.

   (c) A est -elle diagonalisable ?

Exercice 2

Développement limité à l'ordre 3 en 0 de : $f(x) = \dfrac{x}{1 - \sqrt{1 + 2x}}$.

Planche 5/

Exercice 1

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n^2 + 5n + 2}{n^2 - 3n + 7} \right)^n.$$

Exercice 2

Déterminer tous les complexes z tel que les points d'affixe $1, z, z^2$ soient alignés.

Planche 6/

Exercice 1

Calculer : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{(3 + e^t)\sqrt{e^t - 1}} dt$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 - 2z^2 + 5 = 0$.

Planche 7/

Exercice 1

1. Soit : $A = \begin{pmatrix} 13 & -2 & 3 \\ -2 & 10 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer : AB, AC.
   (b) A est-elle inversible ?
   (c) Déterminer toutes les matrices F tel que : $F \in M_3(\mathbb{R})$ et $AF = (0)$.

Exercice 2

Soit (u_n) une suite d'entiers relatifs.
Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si elle est constante à partir d'un certain indice.

Planche 8/

Exercice 1

Soit : $m \in \mathbb{C}$, et $A = \begin{pmatrix} 1-m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}$. A est -elle diagonalisable ?

Exercice 2

Résoudre l'équation différentielle : $\forall x \in]0,1[$, $xy'(x)+3y(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Planche 9/

Exercice 1

Déterminer les réels a, b, c, p, q, r pour que $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ soient vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & a & p \\ 1 & b & q \\ 1 & c & r \end{pmatrix}$.

Exercice 2

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x \ln(x))}{x}$.

Planche 10/

Exercice 1

Linéariser : $g(x) = \cos^2(x)\sin(3x)$.

Exercice 2

Déterminer les solutions nulles en zéro de l'équation différentielle : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + xy'(x) + 2y(x) = 0$.

On pourra chercher une solution du type : $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Planche 11/

Exercice 1

Trouver toutes les matrices qui commutent avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

DL à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $x \mapsto \dfrac{x}{1-\sqrt{1+2x}}$.

Planche 12/

Exercice 1

1. Soit x, y, et z des complexes, et $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) $\mathrm{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{X}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $\mathrm{X}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont-ils vecteurs propres de M ? M est -elle diagonalisable ?
   (b) Condition nécessaire et suffisante sur x, y, z, pour que M soit inversible.
   (c) Condition nécessaire et suffisante sur x, y, z, pour que M soit une matrice de symétrie.

Exercice 2

1. Pour quelles valeurs du réel x, la série $\sum x^n$ converge-t-elle ?
   Préciser sa fonction somme : $\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
2. Soit la suite (a_n) définie par : pour tout entier naturel n, a_n est le reste de la division euclidienne de n par 3 .
   Ainsi : $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 0, a_4 = 1, a_5 = 2, \ldots$
   Déterminer le rayon de convergence et la fonction somme de la série entière $\sum a_n x^n$.

Planche 13/

Exercice 1

1. Résoudre $\mathrm{Z}^n = 1$ dans $\mathbb{C}$.
2. En déduire tous les $\mathrm{Z} \in \mathbb{C}$ tel que $(\mathrm{Z}+1)^n = (\mathrm{Z}-1)^n$.

Exercice 2

Calculer le développement limité à l'ordre 3 de $\arctan(x)$ au voisinage de 1.

Planche 14/

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\cos^2(x)\sin^3(x) = 1.$$

Exercice 2

Étude de la courbe paramétrée :

$$t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^3}, \frac{t^2}{1+t^3}\right).$$

Planche 15/

Exercice 1

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ m & 1 & 1 \\ 0 & m+1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de m, 3 est valeur propre ?
2. Diagonaliser A avec cette valeur de m.

Exercice 2

Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \cos^3(x)\mathrm{d}x$.

Planche 16/

Exercice 1

On considère l'équation différentielle $x^2y' + y - 1 = 0$.

1. Sur quelles intervalles l'équation est-elle définie ?
2. Résoudre l'équation homogène.
3. Trouver l'ensemble des solutions de cette équation.
4. Existe-t-il des solutions globales (définie sur $\mathbb{R}$) ?

Exercice 2

Calculer les sommes :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(\alpha k) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(\alpha k).$$

Planche 17/

Exercice 1

Soit $E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, 2x+3y-5z=0\}\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x-y+z=0\}$. Prouver que E est un sous-espace vectoriel et en donner une base.

Exercice 2

Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x$.

Planche 18/

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. A est-elle inversible ? Si oui calculer A^{-1}.

Exercice 2

Soit $\displaystyle v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\forall k>2, \dfrac{1}{k^2}\leqslant\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$.
2. La suite $(v_n)_n$ est-elle convergente ?
3. Donner un encadrement de la limite.

Planche 19/

Exercice 1

Diagonalisation d'une matrice avec un paramètre a (pas plus d'information).

Exercice 2

Nature puis calcul de

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\mathrm{d}x.$$

Planche 20/

Exercice 1

Soit $E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, 2x+3y-5z=0\}\cup\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x-y+z=0\}$. E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2

Soit $F_A(x) = \dfrac{(1+x)e^{-x}-\cos(Ax)}{x^3}$.

Trouver pour quelles valeurs de A $\displaystyle\lim_{x\to 0} F_A(x)$ existe et est finie.

Planche 21/

Exercice 1

Résoudre l'équation :

$$xy'-y-(x^2+1)=0.$$

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Exercice 3

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{e}{n}\right)^n$.

Planche 22/

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^6+2z^3+4=0.$$

Exercice 2

Calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+3}{x^2+2x+2}\,dx$.

Planche 23/

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 4 & -6 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 + 4A - 12I$.
2. Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 + 4X - 12$.
3. En déduire A^n.

Exercice 2

Résoudre $xy' - y = -\ln(x)$.

Planche 24/

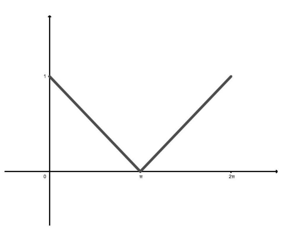
Exercice 1

Calculer les sommes suivantes pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(n\alpha) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(n\alpha).$$

Exercice 2

Soit f une fonction 2π-périodique décrivant la courbe ci-dessous.



Déterminer la série de Fourier de f.

Planche 25/

Exercice 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ d & e & f & 2 \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de a, b, c, d, e, f la matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 2

1. Étudier la série de Fourier de la fonction $2\pi-$ périodique f définie par $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi[$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$

Planche 26/

Exercice 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Étudier la diagonalisabilité de A.
2. Calculer A^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice 2

Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x\ln(x))}{x}$.

Planche 27/

Exercice 1

Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$

Exercice 2

Soit la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. M_a est-elle diagonalisable si $a \in \mathbb{R}$?
2. M_a est-elle diagonalisable si $a \in \mathbb{C}$?

Planche 28/

Exercice 1

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t}{1+\cos^2 t} dt$.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Planche 29/

Exercice 1

1. Montrer qu'une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{R}[X]$ de degrés deux à deux distincts est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer qu'une famille de $n+1$ polynômes non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$ de degrés deux à deux distincts est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

Exercice 2

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^n \sin(k)}{n}$

Planche 30/

Exercice 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$.

À quelle(s) condition(s) sur a la matrice A est-elle inversible ?

Exercice 2

$(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

On sait que $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant a \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant b \\ \lim (u_n + v_n) = a + b \end{cases}$

Démontrer que $\lim (u_n) = a$ et que $\lim (v_n) = b$.

Planche 31/

Exercice 1

1. Déterminer les racines 4-èmes de -1 et en donner une interprétation géométrique.
2. Factoriser X^4+1 dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2

Résoudre $y'' + 2y = x\cos(x)$.

Planche 32/

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{7} z^{2k} = 0$.

Exercice 2

1. Étudier la série de Fourier de la fonction 2π-périodique f définie par $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi[$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Planche 33/

Exercice 1

Étudier la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) = 3t^2 - 2 \\ y(t) = 3t - t^3 \end{cases}$

Exercice 2

Calculer $\displaystyle\int_m^n \lfloor x \rfloor dx$, avec m et $n \in \mathbb{N}, m \leqslant n$.

Planche 34/

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $y' + \cos(x).y = \sin(x)\cos(x)$.

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A \neq 0$ telle que $A^4 = 0$

1. Montrer par l'absurde que $A^3 = 0$.
   (on pourra montrer qu'il existe une matrice colonne X telle que la famille (X, AX, A^2X) soit libre.
2. Montrer que $A^2 = 0$.
3. Déterminer les matrices M telles que $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Planche 35/

Exercice 1

Soit $\varphi : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$f \mapsto f'' - 3f' + 2f.$$

Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et déterminer une base de $\ker \varphi$.

Exercice 2

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}} dx$.

Planche 36/

Exercice 1

1. Donner un équivalent à $\arctan(x)$ au voisinage de 0.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan(n) \right)^n$

Planche 37/

Exercice 1

Pour tout réel $x \geqslant 0$, on pose $\mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{(e^t + 3)\sqrt{e^t - 1}} \, \mathrm{d}t$.

Montrer que $\mathrm{I}(x)$ converge puis la calculer en effectuant un changement de variable.

Exercice 2

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(x) = (x-1)^3$ divise $\mathrm{P}_n(x) = nx^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + (n+2)x - n$.

Planche 38/

Exercice 1

Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{2 - 2\cos x}{x^2} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Exercice 2

Déterminer les racines cubiques de -1.

Exercice 3 supplémentaire

1. Étudier la série de Fourier de la fonction 2π-périodique f définie par $f(x) = x^2$ sur $[0, 2\pi[$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$

Planche 39/

Exercice 1

Résoudre $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$.

Exercice 2

Déterminer les points M d'affixe z tels que $\dfrac{z^2}{z+i}$ soit imaginaire pur.

Exercice 3 supplémentaire

1. Étudier la série de Fourier de la fonction 2π-périodique f définie par $f(x) = x^2$ sur $[0, 2\pi[$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$

Planche 40/

Exercice 1

Étudier $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t} dt$

Exercice 2

Soit la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & -1 & 1 \\ 1-\alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de a l'application linéaire associée à A est-elle bijective ?

Planche 41/

Exercice 1

$(a, b) \in \mathbb{R}^2, a \neq 0$.

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Calculer $\mathrm{A} - (b-a)\mathrm{I}_n$. En déduire une valeur propre de A.
2. Quelle est la dimension du sous-espace propre associé à cette valeur propre ?
3. Diagonaliser A.
4. Calculer le déterminant de A.

Exercice 2

1. Rappeler la formule $\tan(a+b)$.
2. Calculer $\tan(\alpha)$, avec $\alpha = \arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$.
3. En déduire α.

Planche 42/

Exercice 1

1. Déterminer les racines 4-èmes de -1 et en donner une interprétation géométrique.
2. Factoriser $\mathrm{X}^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Exercice 2

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

Planche 43/

Exercice 1

Étudier la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$

Exercice 2

Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction f, 2π-périodique, telle que :

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{sur } [0; \pi[\\ f(x) = 0 & \text{sur } [\pi; 2\pi[\end{cases}$$

Planche 44/

Exercice 1

Calculer $\lim_{x\to 0}(\cos(x)+\sin(x))^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 2

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, calculer : $\sum_{k=0}^{n-1}\cos^k(x)\cos(kx)$.

Planche 45/

Exercice 1

Pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, on définit $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, $f(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}$
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, déterminer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f.
3. Déterminer les réels x tels que $f^{(n)}(x)=0$

Exercice 2

Soit la suite (u_n) définie par $u_n=\frac{(1+i)^n+(1-i)^n}{2^{\frac{n}{2}}}$.

1. Montrer que (u_n) est à termes réels puis simplifier u_n.
2. Étudier la convergence de (u_n).

Planche 46/

Exercice 1

Donner la nature de $\sum\frac{n}{5n+5^n}$.

Exercice 2

1. Exprimer, pour tout $x\in\mathbb{R}, \cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$.
2. Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ puis déterminer $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

Planche 47/

Exercice 1

Soit $f(x,y)=x^2+y^2+xy-3x-6y$.
Trouver les extrema locaux de f.

Exercice 2

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{1+\sin(x)}$

Planche 48/

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$.

Exercice 2

Pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, on définit $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, $f(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}$
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, déterminer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f.
3. Déterminer les réels x tels que $f^{(n)}(x)=0$

Planche 49/

Exercice 1

Calculer $\lim_{x\to 0}(\cos(x)+\sin(x))^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 2

On considère $\mathrm{E}=\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Donner une base de E puis dim(E).
2. Soit $(a,b)\in\mathbb{C}^2$, on considère l'application $f_{a,b}$ définie par :
$$\forall z\in\mathrm{E}, f_{a,b}(z)=az+b\bar{z}.$$
Montrer que $f_{a,b}$ est un endomorphisme de E.
3. Calculer le déterminant et la trace de $f_{a,b}$.

Planche 50/

Exercice 1

Soit la fonction $f 2\pi$-périodique définie par $f(x) = \pi - 2x$ sur $[0, 2\pi[$.

1. déterminer la série de Fourier de f.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ puis $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 2

Donner la transformation géométrique représentée par la matrice :

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Planche 51/

Exercice 1

Résoudre $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$ la matrice associée à l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soient $e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice B représentant f dans la base $\mathcal{B}'$.
2. Calculer A^n.
3. Déterminer les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = v_0 = 1$ et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -2u_n - 4_{v_n} \\ v_{n+1} = 9u_n + 10_{v_n} \end{cases}$$

Planche 52/

Exercice 1

Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, on définit $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f.
3. Déterminer les réels x tels que $f^{(n)}(x) = 0$

Exercice 2

Soit $z = i\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$, avec $\theta \neq 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$. Démontrer que z est un réel.

Planche 53/

Exercice 1

Soit l'équation (E) d'inconnue complexe z : $z^{-2} + z^{-1} + 1 + z + z^2 = 0$.

1. En posant $x = z^{-1} + z$, résoudre (E) en donnant les solutions sous forme algébrique.
2. A l'aide d'une somme remarquable, résoudre (E) en donnant les solutions sous forme exponentielle.
3. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$

Exercice 2

Donner le rayon de convergence, puis calculer la somme des séries entières $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+1}{n!}x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n-3}{n+1}x^n$

Planche 54/

Exercice 1

Pour $z = \rho e^{i\theta}$, calculer $(z+\bar{z})(z^2+\bar{z}^2)\dots(z^n+\bar{z}^n)$.

Exercice 2

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{-x^2+2x}dx$.

Planche 55/

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(-4+3i)z^2+5(2+i)z = 3+5i(-4+3i)z^2+5(2+i)z = 3+5i$.
2. Calculer la distance entre le points d'affixes correspondant aux racines.

Exercice 2

Résoudre (E) : $y'+y = x-e^x+\cos(x)$.

Planche 56/

Exercice 1

Soit la suite $(\ a_n\ )$ définie par $a_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

1. Calculer a_n selon les valeurs de n.
2. Calculer, pour des valeurs de x à préciser $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

Exercice 2

Identifier géométriquement l'endomorphisme euclidien de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice : $\mathrm{A} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Planche 57/

Exercice 1

Soit le polynôme $\mathrm{P} = (\mathrm{X}+1)^7 - \mathrm{X}^7 - a$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer a de façon à ce que P admette une racine double réelle.

Exercice 2

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt[n]{x}}}dx.$$

1. Établir la convergence de I_n
2. À l'aide du changement de variable $y = \sqrt[n]{x}$, déterminer une relation entre I_{n+1} et I_n.

Planche 58/

Exercice 1

1. Déterminer les racines 4-èmes de -1 et en donner une interprétation géométrique.
2. Factoriser X^4+1 dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Exercice 2

Calculer $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \cos(\ln(x))dx$.

Planche 59/

Exercice 1

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(t+2)\sqrt{t+1}}$.

Exercice 2

Soit $\varphi : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

$$f \mapsto f''-3f'+2f.$$

Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et déterminer une base de $\ker\varphi$.

Planche 60/

Exercice 1

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+2x+2}dx$.

Exercice 2

Soit la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. M_a est-elle diagonalisable si $a \in \mathbb{R}$?
2. M_a est-elle diagonalisable si $a \in \mathbb{C}$?

Planche 61/

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A^2 + 10A + 21I_3$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 + 10X + 21$.
3. En déduire A^n en fonction de n.

Exercice 2

Soit $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right) \end{array}$.

Montrer que f est bijective et déterminer sa fonction réciproque.

Planche 62/

Exercice 1

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh}(x) - 2\operatorname{sh}(2x) + \operatorname{sh}(3x)}{\ln(1+x+2x^2) + \sqrt{1-2x} - 1 - x^2}$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos^k(x)\cos(kx)$.

Planche 63/

Exercice 1

Résoudre sur $]0, \pi[$, $\sin(x)y' - \cos(x)y = 1$.

Exercice 2

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & -1 & 1 \\ 1-\alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de a l'application linéaire associée à A est-elle bijective ?

Planche 64/

Exercice 1

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

Exercice 2

Soit le polynôme $P = (X+1)^7 - X^7 - a$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer a de façon à ce que P admette une racine double réelle.

Planche 65/

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
2. Est-elle inversible ?

Exercice 2

Soit $z = i\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$, avec $\theta \neq 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$. Démontrer que z est un réel.

Planche 66/

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
2. Est-elle inversible ?

Exercice 2

Donner le rayon de convergence, puis calculer la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{nx^n}{3^n}$.

Planche 67/

Exercice 1

On considère l'équation (E) : $\sin(x)y' - \cos(x)y + 1 = 0$.

1. Sur quels intervalles peut-on résoudre l'équation (E) ?
2. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
3. Résoudre l'équation (E).
4. Existe-t-il des solutions globales sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2

1. On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à f.
   Montrer que $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ et $\ker(f) = \ker(f \circ f)$

2. De manière plus générale, E un espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E. Montrer que : $\ker(f) = \ker(f \circ f) \Leftrightarrow \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$

Planche 68/

Exercice 1

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(2x)\sin^3 x dx$

Exercice 2

Soit $\varphi : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$f \mapsto f'' - 3f' + 2f.$$

Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et déterminer une base de $\ker\varphi$.

Planche 69/

Exercice 1

Soit $\varphi : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$f \mapsto f'' - 3f' + 2f$$

Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et déterminer une base de $\ker\varphi$.

Exercice 2

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (5\sqrt[n]{4} - 4\sqrt[n]{5})^n$.

Planche 70/

Exercice 1

Soient x, y et z des complexes, et $M = \begin{pmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{pmatrix}$.

1. $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont-ils des vecteurs propres de M ? M est-elle diagonalisable ?

2. Condition nécessaire et suffisante sur x, y, z pour que M soit inversible.

3. Condition nécessaire et suffisante sur x, y, z pour que M soit une matrice de symétrie.

Exercice 2

1. Étudier la série de Fourier de la fonction 2π-périodique f définie par $f(x) = x^2$ sur $[0, 2\pi[$.

2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Planche 71/

Exercice 1

Déterminer les développements en série entières des fonctions : $x \mapsto \ln(2+x)$ et $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 2

$$(a,b) \in \mathbb{R}^2, \text{ soit } \mathrm{M}_{a,b} = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad (n \geqslant 2).$$

Déterminer le rang de la matrice $\mathrm{M}_{a,b}$

Planche 72/

Exercice 1

Calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t} dt$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $(x,y,z) \mapsto (x+z, y-x, y+z, x+y+2z)$.

1. Montrer que f est une application linéaire.

2. Donner une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$. Quel est le rang de f ?

Planche 73/

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $(x,y,z) \mapsto (x+z, y-x, y+z, x+y+2z)$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$. Quel est le rang de f ?

Exercice 2

Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions :

1. $(x,y) \mapsto \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$.

2. $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$.

3. $(x,y) \mapsto y^x$.

Planche 74/

Exercice 1

1. Étudier la série de Fourier de la fonction 2π-périodique f définie par $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi[$.

2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Exercice 2

Trouver toutes les matrices qui commutent avec $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Soit $\omega \in \mathbb{R}$.
Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Planche 75/

Exercice 1

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et telle que $\Delta f = 0$ (laplacien), puis la fonction $g : (x, y) \longmapsto x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ définie sur $\mathbb{R}^2$.
Montrer que $\Delta g = 0$.

Exercice 2

Soit A et I deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les coefficients réels α et β tels que : $A^2 - \alpha A + \beta I = O$. Y a-t-il unicité de ces coefficients réels ?
2. À quelle(s) condition(s) la matrice A est-elle inversible ? Préciser (lorsqu'elle l'est) son inverse.

Planche 76/

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z+1)^4 + \left(z^2+1\right)^2 - (z+1)^4 = 0$.

Exercice 2

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction f définie par $f(x) = (1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 3

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$.

Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \geqslant 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Planche 77/

Exercice 1

Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions :

1. $(x, y) \mapsto \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$.
2. $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$.
3. $(x, y) \mapsto y^x$.

Exercice 2

Soit $P = X^6 - i$

1. Déterminer les racines carrées de $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ et $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide de la question 1 et de la division euclidienne de $X^6 - i$ par $X^2 + i$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = i$ puis factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Planche 78/

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$ la matrice associée à l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soient $e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.Déterminer la matrice B représentant f dans la base $\mathcal{B}'$.
2. Calculer A^n.
3. Déterminer les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = v_0 = 1$ et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -2u_n - 4_{v_n} \\ v_{n+1} = 9u_n + 10_{v_n} \end{cases}$$

Exercice 2

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et telle que $\Delta f = 0$ (laplacien), puis la fonction $g : (x,y) \longmapsto x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ définie sur $\mathbb{R}^2$.
Montrer que $\Delta g = 0$.

Planche 79/

Exercice 1

Soit $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}$, $P \longmapsto P(1) + P'(0)$.

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Donner une base de $\ker(u)$.
3. Déterminer un supplémentaire S de $\ker(u)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
4. On pose d l'application dérivation de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même.
5. Donner une base de $\ker(d)$.
6. Déterminer $\ker(u) \cap \ker(d)$.
7. Déterminer une base de $\ker(v)$, avec $v = u \circ d$.

Exercice 2

Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle : $y' + xy = 1$.

Planche 80/

Exercice 1

Montrer que $E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$ est un espace vectoriel.

Exercice 2

On considère la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$.

1. Montrer que f est définie sur $]0;+\infty[^2$
2. Trouver un point a en lequel f admet un extremum local.

Planche 81/

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
2. Est-elle inversible ?

Exercice 2

Résoudre l'équation différentielle $x^2y' + 2xy = x^3$.

Planche 82/

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 - 8i(1+i)z - 5 = 0$.

Exercice 2

On considère l'équation (E) : $(1+x^2)\,y'' + xy' - y = 0$

1. Résoudre l'équation (E) en utilisant le changement de variable $x = \operatorname{sh}(t)$.
2. Trouver la solution dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $(0,1)$ et dont la tangente en ce point est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

Planche 83/

Exercice 1

Soit $\mathbb{C}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n.

1. Montrer que $(1, (1+X), \cdots, (1+X)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Quelles sont les coordonnées d'un polynôme quelconque P de $\mathbb{C}_n[X]$ dans cette base.

Exercice 2

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$ et $\sum_{k=1}^{n} k^4$.

Planche 84/

Exercice 1

Soit $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}$
$$P \longmapsto P(1) + P'(0).$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Donner une base de $\ker(u)$.
3. Déterminer un supplémentaire S de $\ker(u)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
4. On pose d l'application dérivation de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même.
5. Donner une base de $\ker(d)$.
6. Déterminer $\ker(u) \cap \ker(d)$.
7. Déterminer une base de $\ker(v)$, avec $v = u \circ d$.

Exercice 2

Discuter selon la valeur de m, combien de fois se coupent les deux courbes suivantes : $f : x \mapsto e^x$ et $d : x \mapsto mx$, $\quad m \in \mathbb{R}$

Planche 85/

Exercice 1

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$.

Montrer que B est nilpotente (il existe p entier tel que B^p est la matrice nulle) et en déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de A^n.

Exercice 2

1. Rappeler la formule $\tan(a+b)$
2. Calculer $\tan(\alpha)$, avec $\alpha = \arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$
3. En déduire α.

Planche 86/

Exercice 1

Soit $u_n = \sqrt{n^3 + n + 1} - \sqrt{n^3 + an}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer la limite de la suite (u_n).

Planche 87/

Soit f une application linéaire telle que :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \mapsto (-x + y, x + 2y + z)$$

On note $u_1 = (0, -1, 3), u_2 = (1, 2, -3), u_3 = (1, 1, -3)$, trois vecteur de $\mathbb{R}^3$ et $v_1 = (-1, 1)$, $v_2 = (1, 2)$ des vecteur de $\mathbb{R}^2$.
Enfin, on note les familles de vecteurs $U = (u_1, u_2, u_3)$, $\gamma = (v_1, v_2)$, et $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que U est une base de $\mathbb{R}^3$ et γ une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2$.
3. Déterminer la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_3$ et γ.
4. Déterminer la matrice de f dans les bases U et γ.

Planche 88/

Exercice 1

Étudier la série de Fourier de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |\sin(ax)|$, avec a un réel.

Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A et B représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

Planche 89/

Exercice 1

1. Étudier la série de Fourier de la fonction 2π-périodique f définie par $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi[$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 2

Soit $\mathbb{C}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n.

1. Montrer que $(1, (1+X), \cdots, (1+X)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Quelles sont les coordonnées d'un polynôme quelconque P de $\mathbb{C}_n[X]$ dans cette base.

Planche 90/

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ On pose $N = A - 3I_3$.

1. Calculer N^n pour tout entier naturel n.
2. En déduire l'expression de A^n, pour tout entier naturel n.

Exercice 2

1. Calculer les coefficients de la série de Fourier de la fonction 2π-périodique f définie par $f(x) = x^2$ sur $[0, 2\pi[$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$

Planche 91/

Exercice 1

Résoudre l'équation suivante :

$$z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0.$$

Exercice 2

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int x^3 e^{-x/2}.$$

Planche 92/

Exercice 1

Calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+3}{x^2+2x+2}\,dx$.

Exercice 2

Soit $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.
Déterminer les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$ (les éventuels points critiques + leur nature).

Planche 93/

Exercice 1

On se place dans $\mathbb{R}^n$. $B_1 = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
On pose $B_2 = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ avec pour tout $i \in [|1; n|]$, $d_i = e_1 + e_2 + \ldots + e_i$.

1. Montrer que B_2 est une base de $\mathbb{R}^n$.
2. Exprimer un vecteur de B_1 dans B_2.

Exercice 2

Soient u et v deux suites définies par :

$u_0 = a$ et $v_0 = b$ avec $0 < a < b$ $\quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

1. Monter que $\sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$.
2. Montrer que $b > \dfrac{a+b}{2}$ et $a < \sqrt{ab}$.
3. Montrer que ces suites convergence vers une même limite l

Planche 94/

Exercice 1

Soit f une fonction à deux variables définie par

$$f(x;y) = \frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{x^2+y^2}.$$

Étudier la continuité et la classe $\mathcal{C}^1$ de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathrm{B} = (\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)$

1. Montrer que A est nilpotente. Précisez son ordre de nilpotence.
2. Exprimez B^n en fonction de n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Planche 95/

Exercice 1

Résoudre $y'' + 3y' + y = (1-x^2)\,\mathrm{e}^{(-x)}$.

Exercice 2

Soit la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ 1-\alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de a l'application linéaire associée à A est-elle bijective ?

Planche 96/

Exercice 1

On considère l'équation différentielle suivante

$$\sin(x)y' + \cos(x)y + 1 = 0.$$

1. Trouver sur quels intervalles peut on définir cette équation différentielle linéaire du premier ordre.
2. Résoudre l'équation homogène associée.
3. Résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre.

Exercice 2

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les réels α et β tels que $\mathrm{A}^2 + \beta\mathrm{A} + \alpha\mathrm{I} = 0$
2. Ces réels sont ils uniques ?
3. La matrice A est elle inversible ?

Planche 97/

Exercice 1

Trouver l'ensemble des points M d'affixe z tels que 1, z, z^2 soient alignés.

Exercice 2

Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{2-2\cos x}{x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Exercice 3

On considère un espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathbb{C}$.

1. Donner la base de E. Puis donner dim(E).
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $f_{a,b} : z \longmapsto az + b\bar{z}$ est un endomorphisme de E.
3. Donner le determinant et la trace de $f_{a,b}$.

Planche 98/

Exercice 1

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
2. Calculer A^n.
3. Déterminer les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2, v_0 = 1$ et $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 8v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$

Exercice 2

Déterminer les racines cubiques de $-i$.

Planche 99/

Exercice 1

Soit $(n, a) \in \mathbb{N}_+^* \times (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\quad \mathrm{Y}^2 - 2\cos(a)\mathrm{Y} + 1 = 0$.
2. Soit $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^{2n} - 2\cos(na)\mathrm{X}^n + 1$.

Donner la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Que pouvez dire dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$?

Exercice 2

Résoudre l'équation différentielle : $\quad (x^2+1)\,y' + 2xy + 1 = 0$.

Planche 100/

Exercice 1

Résoudre : $\operatorname{ch}(x) = 2$.

Exercice 2

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & -6 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A possède deux valeurs propres λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 < \lambda_2$.
2. Chercher des vecteurs propres u_1 et u_2 associés à λ_1 et λ_2.
3. A est-elle diagonalisable ?
4. Soit $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Est-ce que (u_1, u_2, u_3) forme une base ?
5. Donner la matrice équivalente trigonalisée.

Planche 101/

Exercice 1

On considère $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$.

1. Soit f l'endomorphisme de E canoniquement associé à $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

   Montrer que $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ et que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(f \circ f)$.
2. Montrer que pour tout endomorphisme f et E, on a l'équivalence :

$$\mathrm{E} = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(f \circ f).$$

Exercice 2

On considère pour $x > 1$ la fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{(x-1)\sqrt{x}}$.

1. Étudier la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{\sqrt{\ln(3)}}{\sqrt{2}}$.

Planche 102/

Exercice 1

Résoudre $\quad z^4 - 4(1+\mathrm{i})z^3 + 12\mathrm{i}z^2 - 8\mathrm{i}(1+\mathrm{i})z - 5 = 0$.
Indications : penser à chercher des racines évidentes : réelles ou complexes).

Exercice 2

On pose $f(x) = \displaystyle\int_1^{1+x^2} \ln(t)\mathrm{d}t$.

1. Domaine de définition de f ?
2. Domaine de dérivabilité ? Calculer f'.

Planche 103/

Exercice 1

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soient $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq b$.

1. Soit R le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$. exprimer R en fonction de $P(a)$ et de $P(b)$
2. Soit R le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$. exprimer R en fonction de $P(a)$ et de $P'(a)$
3. Déterminer le reste de la division X^4+5X^2+X-1 par $(X-1)^2$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.
Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Planche 104/

Exercice 1

On considère l'équation différentielle réelle suivante : $y' + \alpha(x)y = x$.

1. L'ensemble des solutions de l'équation homogène associé H est-il un espace vectoriel ?
2. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle E est-il un espace vectoriel ?

Exercice 2

Pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ la fonction

$$f_k : x \mapsto \begin{cases} x^k \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est-elle continue ? dérivable ?

Planche 105/

Exercice 1

Déterminer tous les complexes z tel que que les points d'affixe 1, z, z^2 soient alignés.

Exercice 2

Déterminer les solutions nulles en zéro de l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'' + xy' + 2y = 0.$$

On pourra chercher les solutions du type : $y(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$.

Planche 106/

Exercice 1

Calculer $\int_0^\pi \cos^2(x)\sin(3x)\mathrm{d}x$.

Planche 107/

1. Étudier la série de Fourier de la fonction 2π-périodique f définie par $f(x) = x^2$ sur $[0, 2\pi[$.
2. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Planche 108/

Exercice 1

On considère $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n, calculer A^n.

Exercice 2

Étudier la série de terme général $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ pour $n \geqslant 2$.

Planche 109/

Exercice 1

Donner les séries entières associés aux fonctions suivantes : $x \mapsto \frac{1}{2-x}$ et $x \mapsto \frac{x}{x^2-3x+2}$.

Exercice 2

1. En utilisant la Formule de Moivre. Déterminer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
2. On donne $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, calculer $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

Planche 110/

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ m & 1 & 1 \\ 0 & 1+m & 3 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelle valeur de m, le nombre 3 est il valeur propre de A ?
2. Diagonaliser A avec cette valeur de m.

Exercice 2

Résoudre l'équation différentielle $(1+x)y' + y = 1 - \ln(1+x)$ pour $x > -1$.

Planche 111/

Exercice 1

Donner la forme algébrique de $(1+i\sqrt{3})^{17}$.

Exercice 2

Déterminer la nature de la suite $u_n = \left(\frac{n}{n+2}\right)^n$.

Planche 112/

Exercice 1

On considère la famille libre $(e_1, \dots, e_p)$ et $a \notin \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Montrer que $(e_1 + a, \dots, e_p + a)$ est aussi une famille libre.

Exercice 2

Étudier la nature de la suite $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ en fonction de α.

Planche 113/

Exercice 1

On considère $z = i\left(\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)$.

Démontrer que z est réel.

Exercice 2

Calculer $I_n = \int_0^2 x^n\sqrt{2-x}\,dx$ avec $n \geqslant 0$.

Planche 114/

Exercice 1

Calculer la puissance n-ième de la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Calculer $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ en faisant apparaître un télescopage.

Planche 115/

Exercice 1

1. Vrai ou Faux ? Une matrice carrée qui admet 0 comme valeur propre est toujours inversible.
2. Montrer que les valeurs propres d'une matrice carrée d'ordre 3 triangulaire sont les coefficients de sa diagonale.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A sont racines du polynôme $P(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)$.

Exercice 2

Déterminer $\displaystyle\lim_{X\to 0} \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-\sqrt{x^2+x}}$.

Planche 116/

Exercice 1

Soit $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.
Déterminer les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$ (les éventuels points critiques + leur nature).

Exercice 2

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

Planche 117/

Exercice 1

Résoudre $xy' - y + \ln(x) = 0$ sur un intervalle de $\mathbb{R}$ que vous préciserez.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^3 + z^2(-4+4i) + z(6-8i) - 12 = 0$.

Planche 118/

Exercice 1

1. Donner le DL en 0 à l'ordre 2 de $f(x) = \arctan(x)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\arctan(n) + \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2}$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{\pi}\arctan(n)\right)^n$.

Exercice 2

1. Déterminer les racines carrées de $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$.
2. Résoudre $z^6 - i = 0$.
3. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Planche 119/

Exercice 1

Trouver l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{z^2}{z+i}$ est un imaginaire pur .

Exercice 2

Résoudre $(x-x^2)\, y' + (x-1)y = x+1$ sur $]0,1[$.

Planche 120/

Exercice 1

Factoriser $1 - X^n$ pour tout entier naturel n.

Exercice 2

Calculer $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{2x^2}{1-x^4}\, \mathrm{d}x$.

Planche 121/

Exercice 1

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) \mapsto (x+z, y-x, y-z, y+2z) \end{cases}$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f), \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{rg}(f)$.

Exercice 2

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \mathrm{e}^{1-\sqrt{1+2x}}$.
2. Soit $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.
   Déterminer la nature de $\sum u_n$

Planche 122/

Exercice 1

Résoudre $z^4 - 4(1+\mathrm{i})z^3 + 12\mathrm{i}z^2 - 8\mathrm{i}(1+\mathrm{i})z - 5 = 0$.
Indications : penser à chercher des racines évidentes : réelles ou complexes).

Exercice 2

On pose $f(x) = \displaystyle\int_1^{1+x^2} \ln(t)\mathrm{d}t$.

1. Domaine de définition de f ?
2. Domaine de dérivabilité ? Calculer f'.

Planche 123/

Exercice 1

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Soient $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq b$.

1. Soit R le reste de la division euclidienne de P par $(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)$. exprimer R en fonction de $\mathrm{P}(a)$ et de $\mathrm{P}(b)$.
2. Soit R le reste de la division euclidienne de P par $(\mathrm{X}-a)^2$. exprimer R en fonction de $\mathrm{P}(a)$ et de $\mathrm{P}'(a)$.
3. Déterminer le reste de la division $\mathrm{X}^4+5\mathrm{X}^2+\mathrm{X}-1$ par $(\mathrm{X}-1)^2$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.
Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Planche 124/

Exercice 1

On considère l'équation différentielle réelle suivante : $y' + \alpha(x)y = x$.

1. L'ensemble des solutions de l'équation homogène associé H est-il un espace vectoriel ?
2. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle E est-il un espace vectoriel ?

Exercice 2

Pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ la fonction

$$f_k : x \mapsto \begin{cases} x^k \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est-elle continue ? dérivable ?

Planche 125/

Exercice 1

Déterminer tous les complexes z tel que que les points d'affixe $1, z, z^2$ soient alignés.

Exercice 2

Déterminer les solutions nulles en zéro de l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'' + xy' + 2y = 0.$$

On pourra chercher les solutions du type : $y(x) = \displaystyle\sum_{n>0} a_n x^n$.

Planche 126/

Exercice 1

On note E l'ensemble des solutions de l'équation différentielle réelle

$$y' + \alpha(x)y = x.$$

L'ensemble E est-il un espace vectoriel ?

Exercice 2

Pour $\alpha \in \{0,1,2,3\}$ la fonction

$$f_\alpha : x \longmapsto \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

est-elle continue ? dérivable ?

Planche 127/

Exercice 1

Soit f une application linéaire telle que :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -x+y \\ x+2y+z \end{pmatrix}$$

On note $u_1 = (0,-1,3)$, $u_2 = (1,2,-3)$, $u_3 = (1,1,-3)$, trois vecteur de $\mathbb{R}^3$ et $v_1 = (-1,1)$, $v_2 = (1,2)$ des vecteur de $\mathbb{R}^2$.
Enfin, on note les familles de vecteurs $\mathrm{U} = (u_1,u_2,u_3)$, $\gamma = (v_1,v_2)$, et $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que U est une base de $\mathbb{R}^3$ et γ une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2$.
3. Déterminer la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_3$ et γ.
4. Déterminer la matrice de f dans les bases U et γ.

Exercice 2

Discuter selon la valeur de m les solution de

$$y'' + my' + y = x$$

Planche 128/

Exercice 1

On considère $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \mathrm{A} - \mathrm{I}$.

1. Calculer B^n.
2. En déduire A^n.

Exercice 2

On considère

$$xy' - 2y - x^5 = 0.$$

1. Résoudre.
2. Existe-t-il une solution réelle ?

Planche 129/

Exercice 1

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $f \circ g = g \circ f$.
Montrer que

$$\forall x \in \mathrm{Ker}(f), \quad g(x) \in \mathrm{Ker}(f).$$

et que

$$\forall x \in \mathrm{Im}(f), \quad g(x) \in \mathrm{Im}(f).$$

Planche 130/

Exercice 1

On note $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$.

1. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}.
2. Déterminer I_{2k+1}.
3. Déterminer I_0 et en déduire I_{2k}.

Exercice 2

Géométrie ...

Planche 131/

Exercice 1

À l'aide d'un changement de variable, calculer $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{(3+\mathrm{e}^t)\sqrt{\mathrm{e}^t - 1}}\, \mathrm{d}t$.

Exercice 2

Soit $A = (\dots) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer $A^2 + 4A - 12I_3$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 + 4X - 12$.
3. En déduire A^n.

Planche 132/

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Calculer $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{2x^2}{x^4 - 1}\,dx$.

Planche 133/

Exercice 1

Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $(1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 2

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\alpha)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\alpha)$.

Exercice 3 Supplémentaire

$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{e}{n}\right)^n$.

Planche 134/

Exercice 1

On considère $y' \sin(x) - y\cos(x) + 1 = 0$.

1. Dans quels intervalles peut-on résoudre cette équation ?
2. Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène.
3. Ensemble des solutions.
4. Y a-t-il des solutions globales (sur $\mathbb{R}$) ?

Exercice 2

Résoudre ces équations d'inconnue complexe z :

1. $z^2 + \bar{z} - 1 = 0$.
2. $z^2 - 2\bar{z} - 1 = 0$.

Planche 135/

Exercice 1

Étudier $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t}\,dt$ pour $x > 0$.

Exercice 2

1. Racines quatrièmes de -1 ; qu'est-ce que cela représente géométriquement ?
2. En déduire une factorisation du polynôme $X^4 + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

Planche 136/

Exercice 1

1. Racines quatrièmes de -1 ; qu'est-ce que cela représente géométriquement ?
2. En déduire une factorisation du polynôme $X^4 + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 2

Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $f 2\pi$-périodique définie par $f(x) = x^2$ pour tout $x \in [-\pi; \pi]$.
Comparer ces coefficients de Fourier à deux suites (que l'étudiant a oubliées, et il n'a pas traité cette partie de l'exercice).

Planche 137/

Exercice 1

Résoudre ces équations d'inconnue complexe z :

1. $z^2 + \bar{z} - 1 = 0$.
2. $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$.

Exercice 2

Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{-\frac{x}{2}}\, dx$.

Planche 138/

Exercice 1

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{e}{n}\right)^n$.

Exercice 2

Résoudre ces équations d'inconnue complexe z :

1. $z^2 + \bar{z} - 1 = 0$.
2. $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$.

Planche 139/

Exercice 1

Calculer : $\displaystyle\int_n^m \lfloor x \rfloor dx$.

Exercice 2

Mettre sous forme algébrique : $(1-i\sqrt{3})^{17}$.

Planche 140/

Exercice 1

Mettre sous forme algébrique : $(1-i\sqrt{3})^{17}$.

Exercice 2

Résoudre $(1+x)y' + y = 1 - \ln(1+x)$.

Planche 141/

Exercice 1

Soit $z = i\left(\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)$. Démontrer que z est réel.

Exercice 2

Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^2 x^n\sqrt{2-x}\, dx$, où $n \geqslant 0$.

Planche 142/

Exercice 1

Soit $P(X) = (X+1)^7 - X^7 - a$.
Déterminer les valeurs réelles de a telles que $P(X)$ admette une racine multiple.

Exercice 2

Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f(x) = (1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}$.

Planche 143/

Exercice 1

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)} dx$.

Exercice 2

f_α est l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ ayant comme matrice dans la base canonique $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & \alpha-1 \\ 0 & -1 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$.
Donner, en fonction de α, $\mathrm{rg}(f_\alpha)$, une base de $\mathrm{Im}(f_\alpha)$ et de $\mathrm{Ker}(f_\alpha)$.

Planche 144/

Exercice 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\operatorname{ch}(x) = 2.$$

Exercice 2

Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-2\cos x}{x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Planche 145/

Exercice 1

On nous donne les vecteurs propres associés à la matrice A : $vp_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $vp_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $vp_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Déterminer les inconnues de la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix}1 & a & b\\ 1 & c & d\\ 1 & e & f\end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles vérifiant

$$\begin{cases} u_n \leqslant a, v_n \leqslant b \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}(u_n+v_n) = a+b. \end{cases}$$

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = a$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} v_n = b$.

Planche 146/

Exercice 1

Donner la décomposition en série entière (vous précisez le rayon de convergence) des séries suivantes :

$$\frac{1}{2+x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^2-3x+2}.$$

Exercice 2

Soit θ et λ réels et soit z complexe. On considère l'équation :

$$z^2 - 2(\cos(\theta) + i\sin(\theta))z + (\lambda^2 - 1) = 0.$$

Donner le module et l'argument des solutions.

Planche 147/

Exercice 1

Dire pour quelles valeurs de a la limite suivante existe.

$$\frac{a^x - x^x}{(a-x)^2}.$$

Exercice 2

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int x^3 \mathrm{e}^{-x/2}.$$