

Ensembles

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 2



- 1 Notions sur les ensembles
- 2 Ensembles et fonctions
- 3 Opérations sur les ensembles
- 4 Famille d'ensembles
- 5 Produit cartésien



I. Notions sur les ensembles

1 Notions sur les ensembles

- Généralités
- Inclusion d'ensembles
- Égalité d'ensembles
- Ensemble des parties d'un ensemble

2 Ensembles et fonctions

3 Opérations sur les ensembles

4 Famille d'ensembles

5 Produit cartésien



I. Notions sur les ensembles

1. Généralités

Définition I :

On appelle **ensemble** toute collection d'objets, appelés ses **éléments**, considérés sans ordre, ni répétition possible.

- « x est élément de l'ensemble E » se dit aussi « x **appartient** à E » et se note $x \in E$.

Dans le cas contraire, on écrira $x \notin E$ et on lira « x n'appartient pas à E ».



I. Notions sur les ensembles

1. Généralités

Définition 1 :

On appelle **ensemble** toute collection d'objets, appelés ses **éléments**, considérés sans ordre, ni répétition possible.

- « x est élément de l'ensemble E » se dit aussi « x **appartient** à E » et se note $x \in E$.
Dans le cas contraire, on écrira $x \notin E$ et on lira « x n'appartient pas à E ».
- Si E n'a pas d'éléments, on dira que c'est l'ensemble vide et on le notera \emptyset .



I. Notions sur les ensembles

1. Généralités

Définition 1 :

On appelle **ensemble** toute collection d'objets, appelés ses **éléments**, considérés sans ordre, ni répétition possible.

- « x est élément de l'ensemble E » se dit aussi « x **appartient** à E » et se note $x \in E$.
Dans le cas contraire, on écrira $x \notin E$ et on lira « x n'appartient pas à E ».
- Si E n'a pas d'éléments, on dira que c'est l'ensemble vide et on le notera \emptyset .

Un ensemble à un seul élément est appelé un **singleton**, noté avec des $\{ \}$, un ensemble à deux éléments, une **paire**. Il n'y pas d'ordre dans l'écriture.

ATTENTION

L'ensemble $\{\emptyset\}$ N'EST PAS VIDE ! il a un élément qui est l'ensemble vide contrairement à l'ensemble \emptyset qui n'a pas d'éléments.



I. Notions sur les ensembles

1. Généralités

Exemples I :

- Les faces d'un dé : $F = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = \{1; 6; 2; 4; 5; 3\} = \{1; 1; 1; 2; 3; 3; 4; 5; 6\}$.



I. Notions sur les ensembles

1. Généralités

Exemples I :

- Les faces d'un dé : $F = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = \{1; 6; 2; 4; 5; 3\} = \{1; 1; 1; 2; 3; 3; 4; 5; 6\}$.
- L'alphabet usuel : $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f, \dots, x, y, z\}$.



I. Notions sur les ensembles

1. Généralités

Exemples I :

- Les faces d'un dé : $F = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = \{1; 6; 2; 4; 5; 3\} = \{1; 1; 1; 2; 3; 3; 4; 5; 6\}$.
- L'alphabet usuel : $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f, \dots, x, y, z\}$.
- Les couleurs d'un jeu de 32 cartes : $\mathcal{C} = \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$.



I. Notions sur les ensembles

1. Généralités

Définition 2 (Ensemble de nombres) :

- On appelle ensemble des **entiers naturels**, l'ensemble \mathbb{N} des nombres positifs permettant de dénombrer :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots\}.$$



I. Notions sur les ensembles

1. Généralités

Définition 2 (Ensemble de nombres) :

- On appelle ensemble des **entiers naturels**, l'ensemble \mathbb{N} des nombres positifs permettant de dénombrer :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots\}.$$

- On appelle ensemble des **entiers relatifs**, l'ensemble \mathbb{Z} constitué des entiers naturels et de leur opposé :

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \left\{ -n / n \in \mathbb{N} \right\}.$$



I. Notions sur les ensembles

1. Généralités

Définition 2 (Ensemble de nombres) :

- On appelle ensemble des **entiers naturels**, l'ensemble \mathbb{N} des nombres positifs permettant de dénombrer :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots\}.$$

- On appelle ensemble des **entiers relatifs**, l'ensemble \mathbb{Z} constitué des entiers naturels et de leur opposé :

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \left\{ -n / n \in \mathbb{N} \right\}.$$

- On appelle **nombre décimal**, un nombre admettant un nombre fini de chiffres après la virgule, *i.e.* un nombre de la forme $\frac{a}{10^n}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^k} / a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

On note \mathbb{D} l'ensemble des nombres décimaux.



I. Notions sur les ensembles

1. Généralités

Remarque : $\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{2^p 5^q} / a \in \mathbb{Z}, (p; q) \in \mathbb{N}^2 \right\}$.



I. Notions sur les ensembles

1. Généralités

Définition 2 (Ensemble de nombres) :

- On appelle **nombre rationnel** un quotient d'entiers relatifs, c'est-à-dire un nombre de la forme $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On note \mathbb{Q} leur ensemble :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / (p; q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\}.$$



I. Notions sur les ensembles

1. Généralités

Définition 2 (Ensemble de nombres) :

- On appelle **nombre rationnel** un quotient d'entiers relatifs, c'est-à-dire un nombre de la forme $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On note \mathbb{Q} leur ensemble :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / (p; q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\}.$$

- On appelle ensemble des **nombres réels**, l'ensemble \mathbb{R} dont l'écriture, en notation décimale, est une suite décimale illimitée, périodique ou non.



I. Notions sur les ensembles

1. Généralités

Définition 2 (Ensemble de nombres) :

- On appelle **nombre rationnel** un quotient d'entiers relatifs, c'est-à-dire un nombre de la forme $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On note \mathbb{Q} leur ensemble :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / (p; q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\}.$$

- On appelle ensemble des **nombres réels**, l'ensemble \mathbb{R} dont l'écriture, en notation décimale, est une suite décimale illimitée, périodique ou non.
- On appelle ensemble des **nombres complexes**, l'ensemble \mathbb{C} des couples de réels muni d'une multiplication particulière :

$$\mathbb{C} = \left\{ z = a + ib / (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1 \right\}.$$



I. Notions sur les ensembles

1. Généralités

On peut définir des ensembles par :

① Extension :

$E = \{1; 8; 6; 2\} = \{1; 1; 1; 8; 6; 6; 2\}$ (éléments non ordonnés et devant apparaître une seule fois dans la liste).

$I = \{1; 3; 5; 7; 9\}$: l'ensemble des dix premiers nombres impairs.

$B = \{\textit{valet}; \textit{dame}; \textit{roi}\}$: l'ensemble des figures d'un jeu de cartes.

$D = \{1; 2; 8; 16, \dots\} = \{2^i\}_{i \in \mathbb{N}}$: l'ensemble des puissances de 2.

Lorsque le nombre des éléments d'un ensemble devient trop important ou qu'il y a un nombre infini d'éléments, on ne peut le définir que par compréhension.



I. Notions sur les ensembles

1. Généralités

On peut définir des ensembles par :

② Compréhension :

$I = \{p \in \mathbb{N} / p \text{ est impair}\} = \{2k + 1 / k \in \mathbb{N}\}$ *i.e.* la donnée d'une propriété \mathcal{P} caractérisant les éléments de E (parmi les éléments d'un ensemble plus gros, ici \mathbb{N}).

Étant donné un ensemble E et une propriété \mathcal{P} , on définit F comme sous-ensemble de E :

$$F = \{x \in E / \mathcal{P}(x)\}.$$

Par conséquent,

$$\forall x \in E, x \in F \iff \mathcal{P}(x).$$

Exemple 2 :

L'ensemble des naturels pairs peut être défini par extension $\mathcal{P} = \{0; 2; 4; 6; 8; \dots\}$ et par compréhension $\mathcal{P} = \{n \in \mathbb{N} / \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p\}$.



I. Notions sur les ensembles

1. Généralités

Exercice 1 :

Donner une définition formelle par compréhension des ensembles suivants :

- 1 l'ensemble des naturels impairs,



I. Notions sur les ensembles

1. Généralités

Exercice 1 :

Donner une définition formelle par compréhension des ensembles suivants :

- 1 l'ensemble des naturels impairs,
- 2 la courbe d'une fonction f (ensemble des points $M(x; y)$ du plan (\mathcal{P}) vérifiant $y = f(x)$),



I. Notions sur les ensembles

1. Généralités

Exercice 1 :

Donner une définition formelle par compréhension des ensembles suivants :

- 1 l'ensemble des naturels impairs,
- 2 la courbe d'une fonction f (ensemble des points $M(x; y)$ du plan (\mathcal{P}) vérifiant $y = f(x)$),
- 3 la courbe d'équation $x^2 - xy + y^3 = 0$.



I. Notions sur les ensembles

1. Généralités

On peut définir des ensembles par :

③ Induction structurelle :

C'est se donner un certain nombre d'éléments de E , et d'une façon de construire, étape par étape les autres éléments de E à partir de ceux donnés.

Exemple 3 :

L'ensemble E tel que 2, 3 sont dans E et si p et q sont dans E , pq est dans E .

Exemple 4 :

Pour $a \in \mathbb{Z}$, on note \mathcal{D}_a l'ensemble des diviseurs de a .

Alors, pour tous entiers a et b , $\mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_b$ est l'ensemble des diviseurs de a et b .



I. Notions sur les ensembles

1. Généralités

On peut définir des ensembles par :

③ Induction structurelle :

C'est se donner un certain nombre d'éléments de E , et d'une façon de construire, étape par étape les autres éléments de E à partir de ceux donnés.

Exemple 3 :

L'ensemble E tel que 2, 3 sont dans E et si p et q sont dans E , pq est dans E .

④ Construction : Unions, intersections d'ensembles. Nous reverrons ce principe.

Exemple 4 :

Pour $a \in \mathbb{Z}$, on note \mathcal{D}_a l'ensemble des diviseurs de a .

Alors, pour tous entiers a et b , $\mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_b$ est l'ensemble des diviseurs de a et b .



I. Notions sur les ensembles

2. Inclusion d'ensembles

Définition 3 :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

Un ensemble A est dit **inclus** dans un ensemble B , noté $A \subset B$, si tout élément de A est aussi un élément de B .

On dit aussi que A est un **sous-ensemble** de B ou une **partie** de B .

$$A \subset B \iff \forall x \in A, x \in B.$$

Exemple 5 :

$$\{-2, 5\} \subset \mathbb{Z} \text{ et } \{1, \pi\} \not\subset \mathbb{Q}.$$

Remarque : La notion de singleton nous donne un lien entre appartenance et inclusion :

Soit E un ensemble et a un objet. Alors :

$$a \in E \iff \{a\} \subset E.$$



I. Notions sur les ensembles

2. Inclusion d'ensembles

Au bon usage des symboles \in et \subset :

- Un élément x appartient à un ensemble E : $x \in E$.

ATTENTION



I. Notions sur les ensembles

2. Inclusion d'ensembles

ATTENTION

Au bon usage des symboles \in et \subset :

- Un élément x appartient à un ensemble E : $x \in E$.
- Un sous-ensemble F est contenu dans un ensemble plus grand E : $F \subset E$.



I. Notions sur les ensembles

2. Inclusion d'ensembles

ATTENTION

Au bon usage des symboles \in et \subset :

- Un élément x appartient à un ensemble E : $x \in E$.
- Un sous-ensemble F est contenu dans un ensemble plus grand E : $F \subset E$.
- MAIS un ensemble n'appartient pas à un autre ensemble : $F \notin E$.



I. Notions sur les ensembles

2. Inclusion d'ensembles

ATTENTION

Au bon usage des symboles \in et \subset :

- Un élément x appartient à un ensemble E : $x \in E$.
- Un sous-ensemble F est contenu dans un ensemble plus grand E : $F \subset E$.
- MAIS un ensemble n'appartient pas à un autre ensemble : $F \notin E$.
- ET un élément n'est pas inclut dans un ensemble : $x \notin E$.



I. Notions sur les ensembles

2. Inclusion d'ensembles

Remarques : Pour tous ensembles A, B et C :

- $\emptyset \subset A$.



I. Notions sur les ensembles

2. Inclusion d'ensembles

Remarques : Pour tous ensembles A , B et C :

- $\emptyset \subset A$.
- $A \subset A$ (et $A=A!$).



I. Notions sur les ensembles

2. Inclusion d'ensembles

Remarques : Pour tous ensembles A , B et C :

- $\emptyset \subset A$.
- $A \subset A$ (et $A=A!$).
- $(A \subset B \text{ et } B \subset C) \implies A \subset C$.

On dit que l'inclusion est **transitive**.



I. Notions sur les ensembles

2. Inclusion d'ensembles

Remarques : Pour tous ensembles A, B et C :

- $\emptyset \subset A$.
- $A \subset A$ (et $A=A!$).
- $(A \subset B \text{ et } B \subset C) \implies A \subset C$. On dit que l'inclusion est **transitive**.

Exercice 2 :

Compléter les propositions suivantes avec le symbole \in ou \subset .

④ $\emptyset \dots \{1, 2, 3, 4\}$



I. Notions sur les ensembles

2. Inclusion d'ensembles

Remarques : Pour tous ensembles A, B et C :

- $\emptyset \subset A$.
- $A \subset A$ (et $A=A!$).
- $(A \subset B \text{ et } B \subset C) \implies A \subset C$. On dit que l'inclusion est **transitive**.

Exercice 2 :

Compléter les propositions suivantes avec le symbole \in ou \subset .

① $\emptyset \dots \{1, 2, 3, 4\}$

② $1 \dots \{1, 2, 3, 4\}$



I. Notions sur les ensembles

2. Inclusion d'ensembles

Remarques : Pour tous ensembles A , B et C :

- $\emptyset \subset A$.
- $A \subset A$ (et $A=A!$).
- $(A \subset B \text{ et } B \subset C) \implies A \subset C$. On dit que l'inclusion est **transitive**.

Exercice 2 :

Compléter les propositions suivantes avec le symbole \in ou \subset .

① $\emptyset \dots \{1, 2, 3, 4\}$

② $1 \dots \{1, 2, 3, 4\}$

③ $\{1\} \dots \{1, 2, 3, 4\}$



I. Notions sur les ensembles

2. Inclusion d'ensembles

Proposition 1 :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E respectivement définis par les propriétés \mathcal{P} et \mathcal{Q} .

L'inclusion de A dans B équivaut à l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

$$A \subset B \iff \left(\forall x \in E, \mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x) \right).$$



I. Notions sur les ensembles

2. Inclusion d'ensembles

Proposition 1 :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E respectivement définis par les propriétés \mathcal{P} et \mathcal{Q} .

L'inclusion de A dans B équivaut à l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

$$A \subset B \iff \left(\forall x \in E, \mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x) \right).$$

Méthode 1 :

Pour montrer que $A \subset B$:

- On considère un élément quelconque de A , par exemple, vérifiant une certaine propriété \mathcal{P} et on montre qu'il appartient à B , par exemple, en montrant qu'il vérifie une propriété \mathcal{Q} .



I. Notions sur les ensembles

2. Inclusion d'ensembles

Proposition 1 :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E respectivement définis par les propriétés \mathcal{P} et \mathcal{Q} .

L'inclusion de A dans B équivaut à l'implication $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$.

$$A \subset B \iff \left(\forall x \in E, \mathcal{P}(x) \implies \mathcal{Q}(x) \right).$$

Méthode 1 :

Pour montrer que $A \subset B$:

- On considère un élément quelconque de A , par exemple, vérifiant une certaine propriété \mathcal{P} et on montre qu'il appartient à B , par exemple, en montrant qu'il vérifie une propriété \mathcal{Q} .
- ou
- Par la contraposée, on considère un élément n'appartenant pas à B et on montre qu'il ne peut appartenir à A .

I. Notions sur les ensembles

2. Inclusion d'ensembles

Exercice 3 :

Montrer que $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 4\} \subset [-2; 2]^2$.



I. Notions sur les ensembles

3. Égalité d'ensembles

Définition 4 :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

On dit que les ensembles A et B sont **égaux**, noté $A = B$, s'ils ont exactement les mêmes éléments.

L'égalité équivaut donc à la double inclusion :

$$\begin{aligned} A = B &\iff (A \subset B \text{ et } B \subset A) \\ &\iff (\forall x, x \in E \iff x \in F). \end{aligned}$$

Méthode 2 :

Pour démontrer une égalité d'ensembles, on procèdera donc par double inclusion ou directement par équivalence.



I. Notions sur les ensembles

3. Égalité d'ensembles

Exercice 4 :

Soient $a \leq b$ deux réels. Montrer que $[a; b] = \{(1-t)a + tb / t \in [0; 1]\}$.



I. Notions sur les ensembles

3. Égalité d'ensembles

Proposition 2 (Négation de l'inclusion et de l'égalité) :

$$\blacksquare A \not\subset B \iff \exists x \in A / x \notin B \iff \exists x \in A / x \in \bar{B}.$$



I. Notions sur les ensembles

3. Égalité d'ensembles

Proposition 2 (Négation de l'inclusion et de l'égalité) :

- $A \not\subset B \iff \exists x \in A / x \notin B \iff \exists x \in A / x \in \bar{B}$.
- $A \neq B \iff A \not\subset B \text{ ou } B \not\subset A \iff \exists x \in A / x \notin B \text{ ou } \exists x \in B / x \notin A$.

Exemple 6 :

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ mais $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$ car $-1 \in \mathbb{Z}$ mais $-1 \notin \mathbb{N}$.



I. Notions sur les ensembles

3. Égalité d'ensembles

Proposition 2 (Négation de l'inclusion et de l'égalité) :

- $A \not\subset B \iff \exists x \in A / x \notin B \iff \exists x \in A / x \in \bar{B}$.
- $A \neq B \iff A \not\subset B \text{ ou } B \not\subset A \iff \exists x \in A / x \notin B \text{ ou } \exists x \in B / x \notin A$.

Exemple 6 :

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ mais $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$ car $-1 \in \mathbb{Z}$ mais $-1 \notin \mathbb{N}$.

Proposition 3 :

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$



I. Notions sur les ensembles

3. Égalité d'ensembles

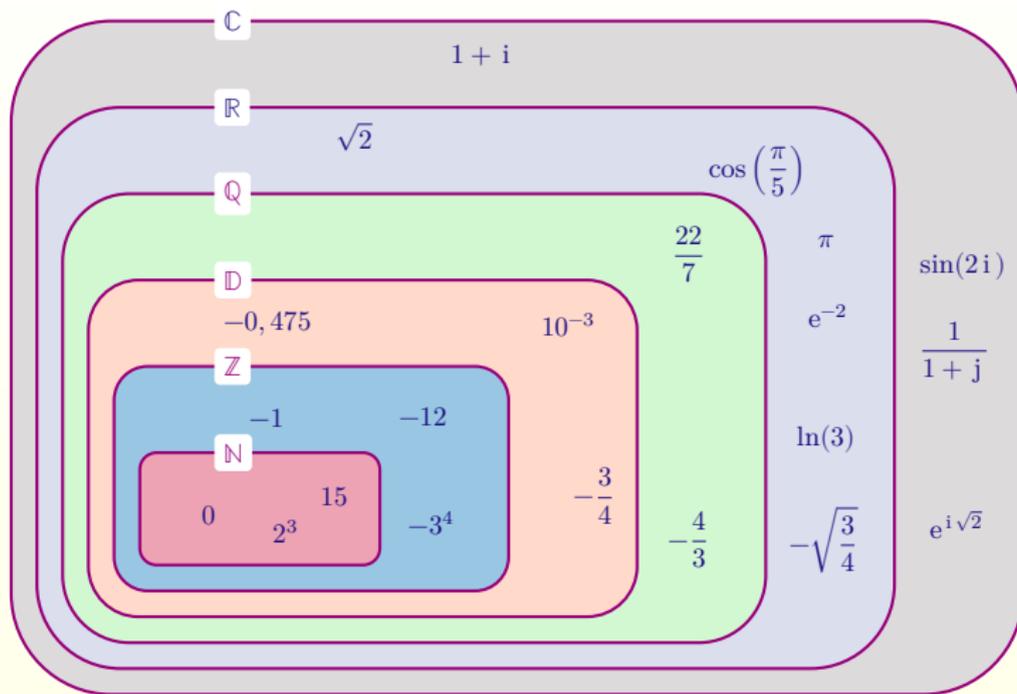


Figure 1 – Les ensembles de nombres usuels



I. Notions sur les ensembles

3. Égalité d'ensembles

Exercice 5 (Vrai ou Faux?) :

- 1 La somme de deux rationnels est un rationnel.



I. Notions sur les ensembles

3. Égalité d'ensembles

Exercice 5 (Vrai ou Faux?) :

- ① La somme de deux rationnels est un rationnel.
- ② Le produit de deux rationnels est un rationnel.



I. Notions sur les ensembles

3. Égalité d'ensembles

Exercice 5 (Vrai ou Faux?) :

- 1 La somme de deux rationnels est un rationnel.
- 2 Le produit de deux rationnels est un rationnel.
- 3 La somme de deux irrationnels est un irrationnel.



I. Notions sur les ensembles

3. Égalité d'ensembles

Exercice 5 (Vrai ou Faux ?) :

- 1 La somme de deux rationnels est un rationnel.
- 2 Le produit de deux rationnels est un rationnel.
- 3 La somme de deux irrationnels est un irrationnel.
- 4 Le produit de deux irrationnels est un irrationnel.



I. Notions sur les ensembles

3. Égalité d'ensembles

Exercice 5 (Vrai ou Faux?) :

- 1 La somme de deux rationnels est un rationnel.
- 2 Le produit de deux rationnels est un rationnel.
- 3 La somme de deux irrationnels est un irrationnel.
- 4 Le produit de deux irrationnels est un irrationnel.
- 5 La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.



I. Notions sur les ensembles

4. Ensemble des parties d'un ensemble

Définition 5 :

Si A est inclus dans un ensemble E , on dit que A est une partie de E .

L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.



I. Notions sur les ensembles

4. Ensemble des parties d'un ensemble

Définition 5 :

Si A est inclus dans un ensemble E , on dit que A est une partie de E .

L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

On a donc l'équivalence importante :

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E.$$

Il contient en particulier la partie vide \emptyset et la partie **pleine** E donc $\mathcal{P}(E)$ n'est jamais vide. Les autres parties sont dites **propres** ou **strictes**.



I. Notions sur les ensembles

4. Ensemble des parties d'un ensemble

Définition 5 :

Si A est inclus dans un ensemble E , on dit que A est une partie de E .

L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

On a donc l'équivalence importante :

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E.$$

Il contient en particulier la partie vide \emptyset et la partie **pleine** E donc $\mathcal{P}(E)$ n'est jamais vide. Les autres parties sont dites **propres** ou **strictes**.

ATTENTION

Si A est un élément de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ dont l'appartenance est notée avec le symbole \in , A est un sous-ensemble de E marqué par le symbole \subset .



I. Notions sur les ensembles

4. Ensemble des parties d'un ensemble

Exemples 1 :

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$



I. Notions sur les ensembles

4. Ensemble des parties d'un ensemble

Exemples 1 :

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}.$



I. Notions sur les ensembles

4. Ensemble des parties d'un ensemble

Exemples 1 :

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$.
- $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.



I. Notions sur les ensembles

4. Ensemble des parties d'un ensemble

Exemples 7 :

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$.
- $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Exercice 6 :

Décrire $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ et $\mathcal{P}([a; b])$.



I. Notions sur les ensembles

4. Ensemble des parties d'un ensemble

En résumé et du bon usage des notations : Étant donné un ensemble E , on considérera souvent 3 niveaux :

- celui des éléments de E , notés par des petites lettres x, y, a, \dots



I. Notions sur les ensembles

4. Ensemble des parties d'un ensemble

En résumé et du bon usage des notations : Étant donné un ensemble E , on considérera souvent 3 niveaux :

- celui des éléments de E , notés par des petites lettres x, y, a, \dots
- celui des parties de E incluses dans E *i.e.* éléments de $\mathcal{P}(E)$, notées par des majuscules droites : $A = \{x, y\}, \dots$



I. Notions sur les ensembles

4. Ensemble des parties d'un ensemble

En résumé et du bon usage des notations : Étant donné un ensemble E , on considérera souvent 3 niveaux :

- celui des éléments de E , notés par des petites lettres x, y, a, \dots
- celui des parties de E incluses dans E *i.e.* éléments de $\mathcal{P}(E)$, notées par des majuscules droites : $A = \{x, y\}, \dots$
- celui des ensembles de parties de E , inclus dans $\mathcal{P}(E)$ *i.e.* éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, notés par des majuscules cursives : $\mathcal{A} = \{\{x, y\}, \{x\}\}, \dots$



II. Ensembles et fonctions

1 Notions sur les ensembles

2 Ensembles et fonctions

- Vocabulaire usuel
- Image directe par une application
- Image réciproque par une application

3 Opérations sur les ensembles

4 Famille d'ensembles

5 Produit cartésien



II. Ensembles et fonctions

1. Vocabulaire usuel

Définition \hookrightarrow (Ensemble de définition, image et antécédents) :

Soit $f : E \mapsto F$ une application entre deux ensembles E et F .

L'ensemble E est appelé l'**ensemble de définition** de f et tout réel $f(x)$ avec $x \in E$ est appelé une valeur de f .

Pour tous $x \in E$ et $y \in F$, si $y = f(x)$, on dit que y est l'**image** de x par f et que x est un **antécédent** de y par f .



II. Ensembles et fonctions

1. Vocabulaire usuel

Définition 6 (Ensemble de définition, image et antécédents) :

Soit $f : E \mapsto F$ une application entre deux ensembles E et F .

L'ensemble E est appelé l'**ensemble de définition** de f et tout réel $f(x)$ avec $x \in E$ est appelé une valeur de f .

Pour tous $x \in E$ et $y \in F$, si $y = f(x)$, on dit que y est l'**image** de x par f et que x est un **antécédent** de y par f .

On dira souvent que $f : E \mapsto F$ est à valeurs dans F mais sans suggérer que tous les éléments de F sont atteints.



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Définition 1 :

Soient $f : E \mapsto F$ une application entre deux ensembles E et F et A une partie de E .

On appelle **image** (directe) de A par f l'ensemble des images par f des éléments de A :

$$f(A) = \{y \in F / \exists x_y \in A, f(x_y) = y\} \subset F.$$

Si $f(A) \subset A$, on dit que A est **stable** par f .



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

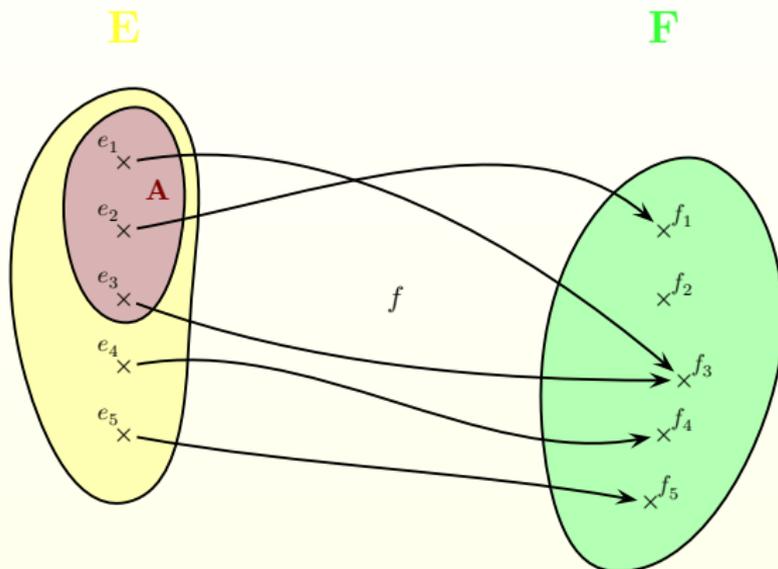


Figure 2 – Image directe d'une partie par une application

$$f(A) = \{f_1, f_3\}.$$

Remarque : On parle ici de **diagramme sagittal**.



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Vocabulaire Soit $f : E \mapsto F$ une application.

On appelle **ensemble image** de f , noté imf ou $f(E)$, l'ensemble de toutes les images de E par f .

C'est donc une partie de F et plus précisément c'est l'ensemble des éléments de F qui ont au moins un antécédent par f dans E *i.e.*

$$imf = f(E) = \{y \in F / \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

On fera attention à ne pas confondre l'ensemble d'arrivée F et l'ensemble image $f(E) \subset F$.



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Exemples 8 :

- L'ensemble image de la fonction \cos est $[-1; 1]$.



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Exemples 8 :

- L'ensemble image de la fonction \cos est $[-1; 1]$.
- L'image de \mathbb{R}_+ par la fonction exponentielle est $[1; +\infty[$.
Celle de \mathbb{R}_- est $]0; 1]$.



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Exemples 8 :

- L'ensemble image de la fonction \cos est $[-1; 1]$.
- L'image de \mathbb{R}_+ par la fonction exponentielle est $[1; +\infty[$.
Celle de \mathbb{R}_- est $]0; 1]$.
- Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ alors $f(]-3; 2]) = [0; 9[$. L'intervalle $[-1; 1]$ est stable par f .
$$x \mapsto x^2$$

 $[-1; 0]$ ne l'est pas.



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Exemples 8 :

- L'ensemble image de la fonction \cos est $[-1; 1]$.
- L'image de \mathbb{R}_+ par la fonction exponentielle est $[1; +\infty[$.
Celle de \mathbb{R}_- est $]0; 1]$.
- Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ alors $f(]-3; 2]) = [0; 9[$. L'intervalle $[-1; 1]$ est stable par f .
$$x \mapsto x^2$$

 $[-1; 0]$ ne l'est pas.
- Par la fonction \sin :



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Exemples 8 :

- L'ensemble image de la fonction \cos est $[-1; 1]$.
- L'image de \mathbb{R}_+ par la fonction exponentielle est $[1; +\infty[$.
Celle de \mathbb{R}_- est $]0; 1]$.
- Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ alors $f(]-3; 2]) = [0; 9[$. L'intervalle $[-1; 1]$ est stable par f .
$$x \mapsto x^2$$

 $[-1; 0]$ ne l'est pas.
- Par la fonction \sin :
 - l'image de $[0; \pi]$ est $[0; 1]$,



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Exemples 8 :

- L'ensemble image de la fonction \cos est $[-1; 1]$.
- L'image de \mathbb{R}_+ par la fonction exponentielle est $[1; +\infty[$.
Celle de \mathbb{R}_- est $]0; 1]$.
- Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ alors $f(]-3; 2]) = [0; 9[$. L'intervalle $[-1; 1]$ est stable par f .
$$x \mapsto x^2$$

 $[-1; 0]$ ne l'est pas.
- Par la fonction \sin :
 - l'image de $[0; \pi]$ est $[0; 1]$,
 - l'image de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ est $[-1; 1]$,



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Exemples 8 :

- L'ensemble image de la fonction \cos est $[-1; 1]$.
- L'image de \mathbb{R}_+ par la fonction exponentielle est $[1; +\infty[$.
Celle de \mathbb{R}_- est $]0; 1]$.
- Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ alors $f(]-3; 2]) = [0; 9[$. L'intervalle $[-1; 1]$ est stable par f .
$$x \mapsto x^2$$

 $[-1; 0]$ ne l'est pas.
- Par la fonction \sin :
 - l'image de $[0; \pi]$ est $[0; 1]$,
 - l'image de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ est $[-1; 1]$,
 - et l'image de $[0; 2\pi]$ est aussi $[-1; 1]$.



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Exemples 8 :

- L'ensemble image de la fonction \cos est $[-1; 1]$.
- L'image de \mathbb{R}_+ par la fonction exponentielle est $[1; +\infty[$.
Celle de \mathbb{R}_- est $]0; 1]$.
- Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ alors $f(]-3; 2]) = [0; 9[$. L'intervalle $[-1; 1]$ est stable par f .
$$x \mapsto x^2$$

 $[-1; 0]$ ne l'est pas.
- Par la fonction \sin :
 - l'image de $[0; \pi]$ est $[0; 1]$,
 - l'image de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ est $[-1; 1]$,
 - et l'image de $[0; 2\pi]$ est aussi $[-1; 1]$.
 - l'image de $\pi\mathbb{Z}$ est $\{0\}$.



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Exemples 8 :

- L'ensemble image de la fonction \cos est $[-1; 1]$.
- L'image de \mathbb{R}_+ par la fonction exponentielle est $[1; +\infty[$.
Celle de \mathbb{R}_- est $]0; 1]$.
- Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ alors $f(]-3; 2[) = [0; 9[$. L'intervalle $[-1; 1]$ est stable par f .
$$x \mapsto x^2$$

 $[-1; 0]$ ne l'est pas.
- Par la fonction \sin :
 - l'image de $[0; \pi]$ est $[0; 1]$,
 - l'image de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ est $[-1; 1]$,
 - et l'image de $[0; 2\pi]$ est aussi $[-1; 1]$.
 - l'image de $\pi\mathbb{Z}$ est $\{0\}$.
- Plus généralement, pour déterminer l'ensemble image d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle de \mathbb{R} , on étudie les variations de f .



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

ATTENTION

\sin est à valeurs dans \mathbb{R} mais $\sin(\mathbb{R}) = [-1; 1] \neq \mathbb{R}$.

L'exponentielle est aussi à valeurs dans \mathbb{R} voire \mathbb{R}_+ mais $\exp(\mathbb{R}) =]0; +\infty[\neq \mathbb{R}_+$ ou \mathbb{R} .

D'une manière générale, $f(E) \neq F$.



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

ATTENTION

\sin est à valeurs dans \mathbb{R} mais $\sin(\mathbb{R}) = [-1; 1] \neq \mathbb{R}$.

L'exponentielle est aussi à valeurs dans \mathbb{R} voire \mathbb{R}_+ mais $\exp(\mathbb{R}) =]0; +\infty[\neq \mathbb{R}_+$ ou \mathbb{R} .

D'une manière générale, $f(E) \neq F$.

Exercice 7 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Déterminer :
 $x \mapsto \cos x$

① $f(\mathbb{R})$.

II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

ATTENTION

\sin est à valeurs dans \mathbb{R} mais $\sin(\mathbb{R}) = [-1; 1] \neq \mathbb{R}$.

L'exponentielle est aussi à valeurs dans \mathbb{R} voire \mathbb{R}_+ mais $\exp(\mathbb{R}) =]0; +\infty[\neq \mathbb{R}_+$ ou \mathbb{R} .

D'une manière générale, $f(E) \neq F$.

Exercice 7 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Déterminer :
 $x \mapsto \cos x$

- 1 $f(\mathbb{R})$.
- 2 $f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

ATTENTION

\sin est à valeurs dans \mathbb{R} mais $\sin(\mathbb{R}) = [-1; 1] \neq \mathbb{R}$.

L'exponentielle est aussi à valeurs dans \mathbb{R} voire \mathbb{R}_+ mais $\exp(\mathbb{R}) =]0; +\infty[\neq \mathbb{R}_+$ ou \mathbb{R} .

D'une manière générale, $f(E) \neq F$.

Exercice 7 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Déterminer :
 $x \mapsto \cos x$

❶ $f(\mathbb{R})$.

❷ $f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

❸ $f([0; \pi])$.

II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Définition 8 (Surjection) :

Soit $f : E \mapsto F$ une application.

On dit que f est une **surjection** ou f est surjective) de E sur F lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent dans l'ensemble de départ.



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Définition 8 (Surjection) :

Soit $f : E \mapsto F$ une application.

On dit que f est une **surjection** ou f est surjective) de E sur F lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent dans l'ensemble de départ.

Ceci revient à dire que pour tout élément y de F , l'équation $y = f(x)$ a au moins une solution x dans E , ou encore

$$\forall y \in F, \exists x \in E / y = f(x).$$



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Définition 8 (Surjection) :

Soit $f : E \mapsto F$ une application.

On dit que f est une **surjection** ou f est surjective) de E sur F lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent dans l'ensemble de départ.

Ceci revient à dire que pour tout élément y de F , l'équation $y = f(x)$ a au moins une solution x dans E , ou encore

$$\forall y \in F, \exists x \in E / y = f(x).$$

Et d'une manière générale très importante :

$$f \text{ est surjective de } E \text{ dans } F \iff \text{im}f = F \iff f(E) = F.$$



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

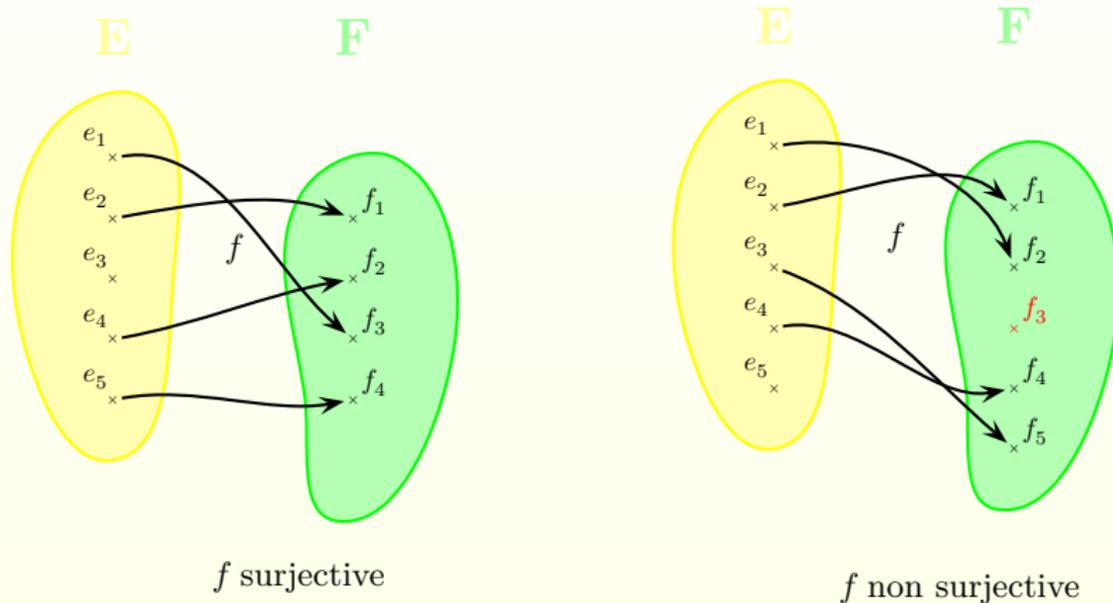


Figure 3 – Diagramme sagittal d'une fonction surjective.



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Exemples 9 (Important) :

- Si E est un ensemble non vide, id_E est surjective sur E .



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Exemples 9 (Important) :

- Si E est un ensemble non vide, id_E est surjective sur E .
- $h : \mathbb{R} \setminus \{1\} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ n'est pas surjective.



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Exemples 9 (Important) :

- Si E est un ensemble non vide, id_E est surjective sur E .
- $h : \mathbb{R} \setminus \{1\} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ n'est pas surjective.
- Si $f : E \mapsto F$ est une application, alors f induit une surjection entre E et $im f$ qui est l'application :

$$g : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & im f \\ x & & g(x) = f(x). \end{array}$$

Toute « corestriction » d'une application à son ensemble image est donc surjective.



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Exemples 9 (Important) :

- Si E est un ensemble non vide, id_E est surjective sur E .
- $h : \mathbb{R} \setminus \{1\} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ n'est pas surjective.
- Si $f : E \mapsto F$ est une application, alors f induit une surjection entre E et $im f$ qui est l'application :

$$g : \begin{array}{ccc} E & \twoheadrightarrow & im f \\ x & & g(x) = f(x). \end{array}$$

Toute « corestriction » d'une application à son ensemble image est donc surjective.

- La projection $p_E : E \times F \longrightarrow E$ est surjective.

$$(x; y) \mapsto x$$



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Méthode 3 :

Soit $f : E \mapsto F$ une fonction entre deux ensembles E et F .

Pour montrer que f est surjective de E sur F , on considère un élément $y \in F$ et on trouve, construit, exhibe un antécédent $x \in E$ de y par f .



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Méthode 3 :

Soit $f : E \mapsto F$ une fonction entre deux ensembles E et F .

Pour montrer que f est surjective de E sur F , on considère un élément $y \in F$ et on trouve, construit, exhibe un antécédent $x \in E$ de y par f .

Exercice 8 :

Les fonctions suivantes sont-elles surjectives ?

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Méthode 3 :

Soit $f : E \mapsto F$ une fonction entre deux ensembles E et F .

Pour montrer que f est surjective de E sur F , on considère un élément $y \in F$ et on trouve, construit, exhibe un antécédent $x \in E$ de y par f .

Exercice 8 :

Les fonctions suivantes sont-elles surjectives ?

$$\textcircled{1} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

$$\textcircled{2} g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \longmapsto x^2$$



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Méthode 3 :

Soit $f : E \mapsto F$ une fonction entre deux ensembles E et F .

Pour montrer que f est surjective de E sur F , on considère un élément $y \in F$ et on trouve, construit, exhibe un antécédent $x \in E$ de y par f .

Exercice 8 :

Les fonctions suivantes sont-elles surjectives ?

$$\textcircled{1} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2$$

$$\textcircled{3} h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x$$

$$\textcircled{2} g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto x^2$$

II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Méthode 3 :

Soit $f : E \mapsto F$ une fonction entre deux ensembles E et F .

Pour montrer que f est surjective de E sur F , on considère un élément $y \in F$ et on trouve, construit, exhibe un antécédent $x \in E$ de y par f .

Exercice 8 :

Les fonctions suivantes sont-elles surjectives ?

❶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2$$

❸ $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 2x$$

❷ $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$x \mapsto x^2$$

❹ $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$n \mapsto 2n$$

II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Définition 9 (Injection) :

Soit $f : E \mapsto F$ une application.

On dit que f est une **injection** (ou f est injective) sur E lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent dans l'ensemble de départ.



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Définition 9 (Injection) :

Soit $f : E \mapsto F$ une application.

On dit que f est une **injection** (ou f est injective) sur E lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent dans l'ensemble de départ.

Ceci revient à dire que pour tout élément y de F , l'équation $y = f(x)$ a au plus une solution x dans E .



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

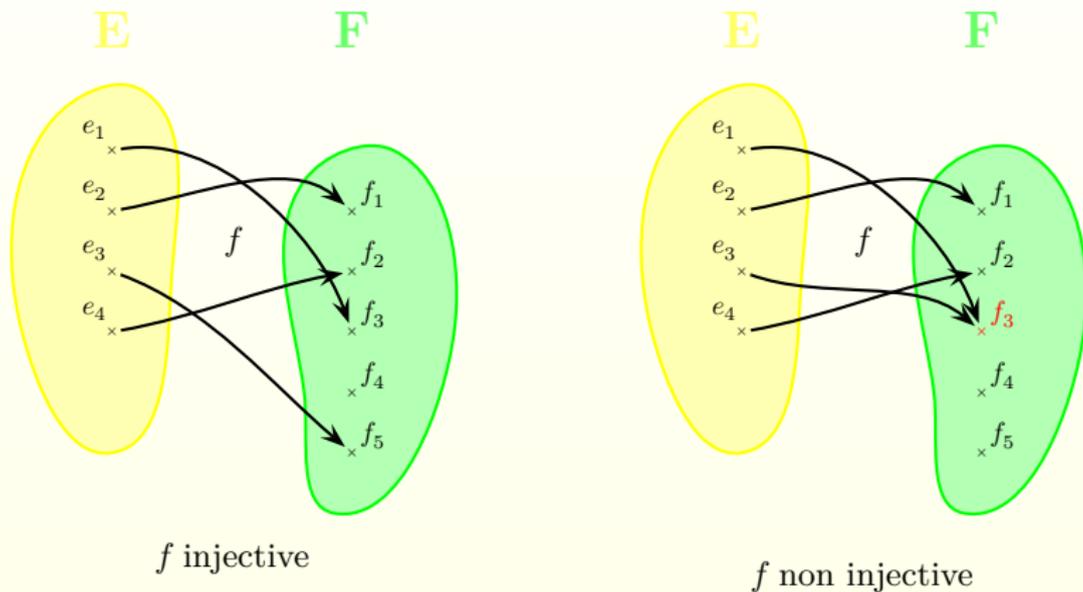


Figure 4 – Diagramme sagittal d'une fonction injective.



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Exemples 10 :

- Si E est un ensemble non vide, id_E est injective.



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Exemples 10 :

- Si E est un ensemble non vide, id_E est injective.
- Soit A une partie non vide de E , l'application $i : A \rightarrow E$ est injective d'où
$$x \mapsto x$$

son nom d'**injection canonique** de A dans E .



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Exemples 10 :

- Si E est un ensemble non vide, id_E est injective.
- Soit A une partie non vide de E , l'application $i : A \rightarrow E$ est injective d'où
$$x \mapsto x$$
son nom d'**injection canonique** de A dans E .
- La fonction \ln est une injection de $]0; +\infty[$ dans \mathbb{R} de même que sa fonction réciproque \exp qui l'est de \mathbb{R} dans $]0; +\infty[$.



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Exemples 10 :

- Si E est un ensemble non vide, id_E est injective.
- Soit A une partie non vide de E , l'application $i : A \rightarrow E$ est injective d'où
$$x \mapsto x$$
son nom d'**injection canonique** de A dans E .
- La fonction \ln est une injection de $]0; +\infty[$ dans \mathbb{R} de même que sa fonction réciproque \exp qui l'est de \mathbb{R} dans $]0; +\infty[$.
- La fonction carrée $x \mapsto x^2$ n'est pas une injection de \mathbb{R} .



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Théorème 4 :

$f : E \mapsto F$ est injective sur E si, et seulement si

$$\forall (x; y) \in E^2, f(x) = f(y) \implies x = y.$$

Ce qui équivaut encore par contraposition à :

$$\forall (x; y) \in E^2, x \neq y \implies f(x) \neq f(y).$$



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Théorème 4 :

$f : E \mapsto F$ est injective sur E si, et seulement si

$$\forall (x; y) \in E^2, f(x) = f(y) \implies x = y.$$

Ce qui équivaut encore par contraposition à :

$$\forall (x; y) \in E^2, x \neq y \implies f(x) \neq f(y).$$

D'un point de vue calculatoire, une fonction injective est une fonction que l'on peut « simplifier » en cours de calcul *i.e.* si $f(x) = f(y)$, alors $x = y$ après « simplification ».



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Théorème 4 :

$f : E \mapsto F$ est injective sur E si, et seulement si

$$\forall (x; y) \in E^2, f(x) = f(y) \implies x = y.$$

Ce qui équivaut encore par contraposition à :

$$\forall (x; y) \in E^2, x \neq y \implies f(x) \neq f(y).$$

D'un point de vue calculatoire, une fonction injective est une fonction que l'on peut « simplifier » en cours de calcul *i.e.* si $f(x) = f(y)$, alors $x = y$ après « simplification ».

La fonction f est injective lorsqu'elle donne des valeurs différentes à des points différents et, en particulier,

Corollaire 1 :

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une application.

Si f est strictement monotone sur I alors f est injective.

II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Exemple II :

La fonction $x \mapsto x^2$ est injective sur \mathbb{R}_+ mais pas sur \mathbb{R} .



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Exemple II :

La fonction $x \mapsto x^2$ est injective sur \mathbb{R}_+ mais pas sur \mathbb{R} .

Méthode 4 :

Soit $f : E \mapsto F$ une fonction entre deux ensembles E et F .

Pour montrer que f est injective sur E , on considère deux éléments x et y de E tels que $f(x) = f(y)$ et on montre que $x = y$.



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Exercice 9 :

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ?

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos(x) \end{aligned}$$



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Exercice 9 :

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ?

$$\textcircled{1} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \cos(x)$$

$$\textcircled{2} g: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \cos(x)$$



II. Ensembles et fonctions

2. Image directe par une application

Exercice 9 :

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ?

$$\textcircled{1} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \cos(x)$$

$$\textcircled{3} k:]-\pi; 0] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \cos(x)$$

$$\textcircled{2} g: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \cos(x)$$



II. Ensembles et fonctions

3. Image réciproque par une application

Définition 10 :

Soient $f : E \mapsto F$ une application entre deux ensembles E et F et B une partie de F .

On appelle **image réciproque** de B par f l'ensemble des antécédents de B :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\} \subset E.$$



II. Ensembles et fonctions

3. Image réciproque par une application

Définition 10 :

Soient $f : E \mapsto F$ une application entre deux ensembles E et F et B une partie de F .

On appelle **image réciproque** de B par f l'ensemble des antécédents de B :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\} \subset E.$$

ATTENTION

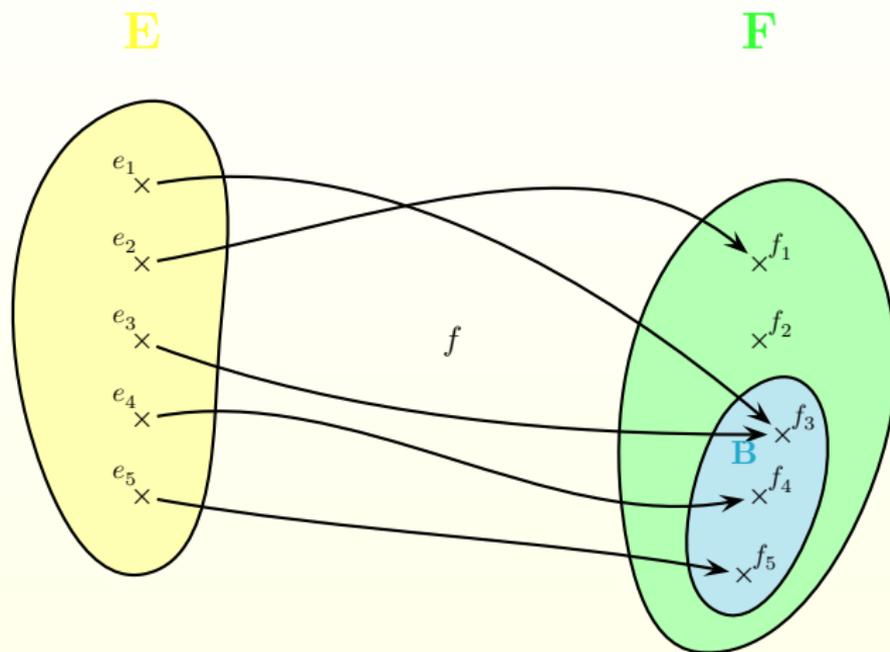
La notation f^{-1} peut porter à confusion avec la fonction réciproque d'une fonction bijective f .

On ne suppose nullement ici que f est bijective dans la définition de $f^{-1}(B)$ mais lorsque f le sera on pourra ultérieurement vérifier que l'image réciproque de B par f correspond à l'image directe de B par f^{-1} .



II. Ensembles et fonctions

3. Image réciproque par une application



$$f^{-1}(B) = \{e_1, e_3, e_4, e_5\}.$$

Figure 5 – Image réciproque d'une partie par une application.



II. Ensembles et fonctions

3. Image réciproque par une application

Exemple 12 :

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ alors $f^{-1}(]1;3]) = [-\sqrt{3}; -1[\cup]1; \sqrt{3}]$.

$$x \mapsto x^2$$



II. Ensembles et fonctions

3. Image réciproque par une application

Exemple 12 :

$$\begin{aligned} \text{Si } f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{alors } f^{-1}(]1;3]) = [-\sqrt{3}; -1[\cup]1; \sqrt{3}]. \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Exercice 10 :

$$\begin{aligned} \text{Soit } f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos x. \end{aligned}$$

Déterminer :

① $f(\mathbb{R})$.

II. Ensembles et fonctions

3. Image réciproque par une application

Exemple 12 :

$$\begin{aligned} \text{Si } f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{alors } f^{-1}([1;3]) &= [-\sqrt{3}; -1[\cup]1; \sqrt{3}]. \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Exercice 10 :

$$\begin{aligned} \text{Soit } f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos x. \end{aligned}$$

Déterminer :

- 1 $f(\mathbb{R})$.
- 2 $f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

II. Ensembles et fonctions

3. Image réciproque par une application

Exemple 12 :

$$\begin{aligned} \text{Si } f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{alors } f^{-1}([1;3]) &= [-\sqrt{3}; -1[\cup]1; \sqrt{3}]. \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Exercice 10 :

$$\begin{aligned} \text{Soit } f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos x. \end{aligned}$$

Déterminer :

- 1 $f(\mathbb{R})$.
- 2 $f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$.
- 3 $f^{-1}(\mathbb{R})$.

II. Ensembles et fonctions

3. Image réciproque par une application

Exemple 12 :

$$\begin{aligned} \text{Si } f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{ alors } f^{-1}([1;3]) &= [-\sqrt{3}; -1[\cup]1; \sqrt{3}]. \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Exercice 10 :

$$\begin{aligned} \text{Soit } f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos x. \end{aligned}$$

Déterminer :

- ① $f(\mathbb{R})$.
- ② $f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$.
- ③ $f^{-1}(\mathbb{R})$.
- ④ $f^{-1}(\{1\})$.

II. Ensembles et fonctions

3. Image réciproque par une application

Exemple 12 :

$$\begin{aligned} \text{Si } f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{ alors } f^{-1}(]1;3]) &= [-\sqrt{3}; -1[\cup]1; \sqrt{3}]. \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Exercice 10 :

$$\begin{aligned} \text{Soit } f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos x. \end{aligned}$$

Déterminer :

- 1 $f(\mathbb{R})$.
- 2 $f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$.
- 3 $f^{-1}(\mathbb{R})$.
- 4 $f^{-1}(\{1\})$.
- 5 $f^{-1}(]-1; 2])$.

II. Ensembles et fonctions

3. Image réciproque par une application

Exemple 12 :

$$\begin{aligned} \text{Si } f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{ alors } f^{-1}([1;3]) &= [-\sqrt{3}; -1[\cup]1; \sqrt{3}]. \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Exercice 10 :

$$\begin{aligned} \text{Soit } f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos x. \end{aligned}$$

Déterminer :

- ❶ $f(\mathbb{R})$.
- ❷ $f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$.
- ❸ $f^{-1}(\mathbb{R})$.
- ❹ $f^{-1}(\{1\})$.
- ❺ $f^{-1}([-1; 2])$.
- ❻ $f^{-1}([0; \pi])$.

II. Ensembles et fonctions

3. Image réciproque par une application

Exemple 12 :

$$\begin{aligned} \text{Si } f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{alors } f^{-1}([1;3]) &= [-\sqrt{3}; -1[\cup]1; \sqrt{3}]. \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Exercice 10 :

$$\begin{aligned} \text{Soit } f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos x. \end{aligned}$$

Déterminer :

- ❶ $f(\mathbb{R})$.
- ❷ $f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$.
- ❸ $f^{-1}(\mathbb{R})$.
- ❹ $f^{-1}(\{1\})$.
- ❺ $f^{-1}([-1; 2])$.
- ❻ $f^{-1}([0; \pi])$.
- ❼ $f(f^{-1}([0; 1]))$.

II. Ensembles et fonctions

3. Image réciproque par une application

Exemple 12 :

$$\begin{aligned} \text{Si } f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{ alors } f^{-1}([1;3]) &= [-\sqrt{3}; -1[\cup]1; \sqrt{3}]. \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Exercice 10 :

$$\begin{aligned} \text{Soit } f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos x. \end{aligned}$$

Déterminer :

- ❶ $f(\mathbb{R})$.
- ❷ $f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$.
- ❸ $f^{-1}(\mathbb{R})$.
- ❹ $f^{-1}(\{1\})$.
- ❺ $f^{-1}([-1; 2])$.
- ❻ $f^{-1}([0; \pi])$.
- ❼ $f(f^{-1}([0; 1]))$.
- ❽ $f^{-1}\left(f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)\right)$.

II. Ensembles et fonctions

3. Image réciproque par une application

Théorème 5 (Stabilité par image directe) :

Soit $f : E \mapsto F$ une application. Pour toutes parties A et B de E , on a :

$$\bullet A \subset f^{-1}(f(A)).$$



II. Ensembles et fonctions

3. Image réciproque par une application

Théorème 5 (Stabilité par image directe) :

Soit $f : E \mapsto F$ une application. Pour toutes parties A et B de E , on a :

- ① $A \subset f^{-1}(f(A))$.
- ② $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$.



II. Ensembles et fonctions

3. Image réciproque par une application

Théorème 5 (Stabilité par image directe) :

Soit $f : E \mapsto F$ une application. Pour toutes parties A et B de E , on a :

- ❶ $A \subset f^{-1}(f(A))$.
- ❷ $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$.

Théorème 6 (Stabilité par image réciproque) :

Soit $f : E \mapsto F$ une application. Pour toute parties A et B de F , on a :

- ❶ $f(f^{-1}(B)) \subset B$.



II. Ensembles et fonctions

3. Image réciproque par une application

Théorème 5 (Stabilité par image directe) :

Soit $f : E \mapsto F$ une application. Pour toutes parties A et B de E , on a :

- ❶ $A \subset f^{-1}(f(A))$.
- ❷ $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$.

Théorème 6 (Stabilité par image réciproque) :

Soit $f : E \mapsto F$ une application. Pour toute parties A et B de F , on a :

- ❶ $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
- ❷ $A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.



III. Opérations sur les ensembles

- 1 Notions sur les ensembles
- 2 Ensembles et fonctions
- 3 Opérations sur les ensembles**
 - Complémentarisation
 - Intersection
 - Réunion
 - Différence
- 4 Famille d'ensembles
- 5 Produit cartésien



III. Opérations sur les ensembles

Les ensembles ici considérés sont supposés être inclus dans un ensemble dit de référence E .



III. Opérations sur les ensembles

1. Complémentarisation

Définition II :

Le **complémentaire** d'un ensemble A (dans E), noté $C_E A$, est l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A .

$$C_E A = E \setminus A = \{x \in E / x \notin A\}$$



Figure 6 – Complémentaire d'une partie.



III. Opérations sur les ensembles

1. Complémentarisation

Définition II :

Le **complémentaire** d'un ensemble A (dans E), noté $C_E A$, est l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A .

$$C_E A = E \setminus A = \{x \in E / x \notin A\}$$



Figure 6 – Complémentaire d'une partie.

Par conséquent,

$$\forall x \in E, x \in C_E A \iff x \notin A.$$

La complémentarisation est aux ensembles ce que la négation est aux propriétés.



III. Opérations sur les ensembles

1. Complémentarisation

Exercice II :

Soient $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

On considère $A = \{1, 2\}$. Déterminer $C_E A$ et $C_F A$.



III. Opérations sur les ensembles

1. Complémentarisation

Proposition 1 :

■ $C_E E = \emptyset.$



III. Opérations sur les ensembles

1. Complémentarisation

Proposition 1 :

- $C_E E = \emptyset$.
- $C_E \emptyset = E$.



III. Opérations sur les ensembles

1. Complémentarisation

Proposition 1 :

- $C_E E = \emptyset$.
- $C_E \emptyset = E$.
- $\forall A \subset E, C_E(C_E A) = A$.



III. Opérations sur les ensembles

1. Complémentarisation

Proposition 1 :

- $C_E E = \emptyset$.
- $C_E \emptyset = E$.
- $\forall A \subset E, C_E(C_E A) = A$.

La dernière propriété se dit, que la complémentarisation est une opération involutive.



III. Opérations sur les ensembles

2. Intersection

Définition 12 :

L'**intersection** de deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E, noté $A \cap B$, est l'ensemble des éléments (de E) appartenant à la fois à A et à B :

$$A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

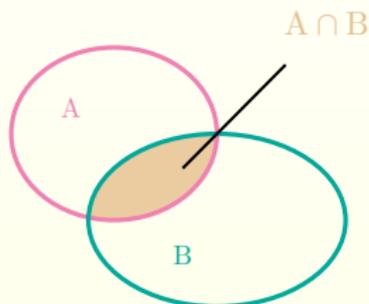


Figure 7 – Intersection d'ensembles.



III. Opérations sur les ensembles

2. Intersection

Définition 12 :

L'**intersection** de deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E, noté $A \cap B$, est l'ensemble des éléments (de E) appartenant à la fois à A et à B :

$$A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

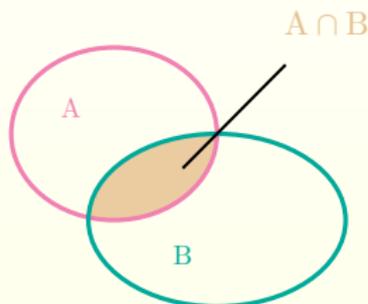


Figure 7 – Intersection d'ensembles.

Par conséquent, $\forall x \in E, x \in A \cap B \iff (x \in A) \wedge (x \in B).$

L'intersection est aux ensembles ce que la **conjonction** est aux propriétés.



III. Opérations sur les ensembles

2. Intersection

Exemples B :

$$\{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 4, 5\} = \{1, 4\} \text{ et } [1;3] \cap]2;4] =]2;3].$$



III. Opérations sur les ensembles

2. Intersection

Exemples 13 :

$$\{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 4, 5\} = \{1, 4\} \text{ et } [1;3] \cap]2;4] =]2;3].$$

Proposition 8 (Propriétés algébriques) :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

- $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.



III. Opérations sur les ensembles

2. Intersection

Exemples 13 :

$$\{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 4, 5\} = \{1, 4\} \text{ et } [1;3] \cap]2;4] =]2;3].$$

Proposition 8 (Propriétés algébriques) :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

- $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.
- $A \cap \emptyset = \emptyset$.

(\emptyset est absorbant pour \cap)



III. Opérations sur les ensembles

2. Intersection

Exemples 13 :

$$\{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 4, 5\} = \{1, 4\} \text{ et } [1;3] \cap]2;4] =]2;3].$$

Proposition 8 (Propriétés algébriques) :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

- $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.
- $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- $A \cap E = A$.

(\emptyset est absorbant pour \cap)

(E est élément neutre pour \cap)



III. Opérations sur les ensembles

2. Intersection

Exemples 13 :

$$\{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 4, 5\} = \{1, 4\} \text{ et } [1;3] \cap]2;4] =]2;3].$$

Proposition 8 (Propriétés algébriques) :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

- $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.
- $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- $A \cap E = A$.
- $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

(\emptyset est absorbant pour \cap)

(E est élément neutre pour \cap)

(A et \bar{A} sont disjoints dans E)



III. Opérations sur les ensembles

2. Intersection

Définition 13 (Ensembles disjoints) :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

- On dit que A et B sont **disjoints** ou incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.



III. Opérations sur les ensembles

2. Intersection

Définition 13 (Ensembles disjoints) :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

- On dit que A et B sont **disjoints** ou incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
- On dit que A et B sont **distincts** lorsqu'ils ne sont pas égaux.



III. Opérations sur les ensembles

2. Intersection

Définition 13 (Ensembles disjoints) :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

- On dit que A et B sont **disjoints** ou incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
- On dit que A et B sont **distincts** lorsqu'ils ne sont pas égaux.

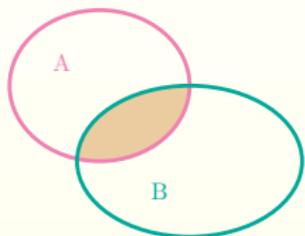
Comme on l'a vu, un sous-ensemble et son complémentaire dans E sont toujours disjoints.

Remarque : \emptyset est disjoint de lui-même, mais n'en est pas distinct ! À part ça, disjoint implique distinct.

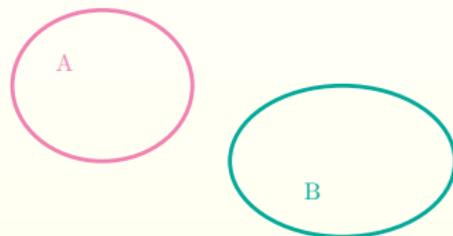


III. Opérations sur les ensembles

2. Intersection



A et B ne sont pas disjoints



A et B sont disjoints

A et B sont distincts.

Figure 8 – Ensembles disjoints et distincts.



III. Opérations sur les ensembles

2. Intersection

Proposition 9 :

Soient A et B deux sous-ensembles de E .

A et B sont disjoints $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset C_E B \Leftrightarrow B \subset C_E A$.

A et B sont distincts $\Leftrightarrow A \not\subset B$ ou $B \not\subset A$

\Leftrightarrow il existe un élément appartenant à l'un des ensembles et pas à l'autre.



III. Opérations sur les ensembles

2. Intersection

Proposition 9 :

Soient A et B deux sous-ensembles de E .

$$A \text{ et } B \text{ sont disjoints} \iff A \cap B = \emptyset \iff A \subset C_E B \iff B \subset C_E A.$$

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ sont distincts} &\iff A \not\subset B \text{ ou } B \not\subset A \\ &\iff \text{il existe un élément appartenant à l'un des} \\ &\quad \text{ensembles et pas à l'autre.} \end{aligned}$$

Théorème 10 (Stabilité par image directe et réciproque) :

Soit $f : E \mapsto F$ une application. Pour toute parties A et B de E , on a :

$$\bullet f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$



III. Opérations sur les ensembles

2. Intersection

Proposition 9 :

Soient A et B deux sous-ensembles de E .

A et B sont disjoints $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset C_E B \Leftrightarrow B \subset C_E A$.

A et B sont distincts $\Leftrightarrow A \not\subset B$ ou $B \not\subset A$

\Leftrightarrow il existe un élément appartenant à l'un des ensembles et pas à l'autre.

Théorème 10 (Stabilité par image directe et réciproque) :

Soit $f : E \mapsto F$ une application. Pour toute parties A et B de E , on a :

- ❶ $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
- ❷ $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.



III. Opérations sur les ensembles

2. Intersection

Contre-Exemple 14 :

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto x^2$$

Alors $f(\mathbb{R}_+) \cap f(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+ \neq f(\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_-) = f(\{0\}) = \{0\}$.



III. Opérations sur les ensembles

3. Réunion

Définition 14 :

La **réunion** de deux ensembles A et B, noté $A \cup B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B :

$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$



III. Opérations sur les ensembles

3. Réunion

Définition 14 :

La **réunion** de deux ensembles A et B, noté $A \cup B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B :

$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Par conséquent, $\forall x \in E, x \in A \cup B \iff (x \in A) \vee (x \in B).$

La réunion est aux ensembles ce que la **disjonction** est aux propriétés.



III. Opérations sur les ensembles

3. Réunion

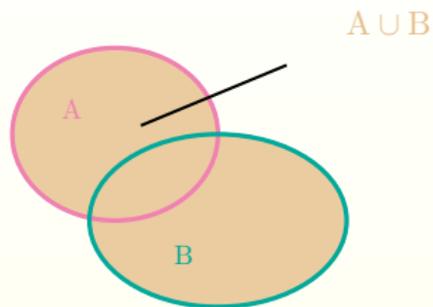


Figure 9 – Réunion d'ensembles.

Proposition II (Propriétés algébriques) :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

- $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$.

III. Opérations sur les ensembles

3. Réunion

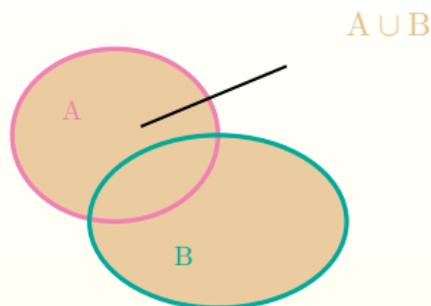


Figure 9 – Réunion d'ensembles.

Proposition II (Propriétés algébriques) :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

- $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$.
- $A \cup \emptyset = A$.

(\emptyset est neutre pour \cup)

III. Opérations sur les ensembles

3. Réunion

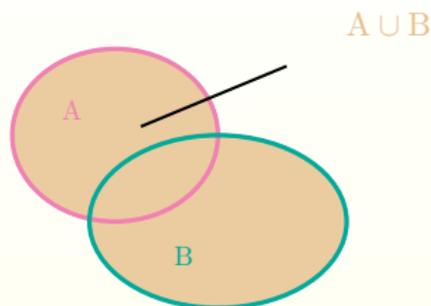


Figure 9 – Réunion d'ensembles.

Proposition II (Propriétés algébriques) :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

■ $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$.

■ $A \cup \emptyset = A$.

(\emptyset est neutre pour \cup)

■ $A \cup E = E$.

(E est élément absorbant pour \cup)

III. Opérations sur les ensembles

3. Réunion

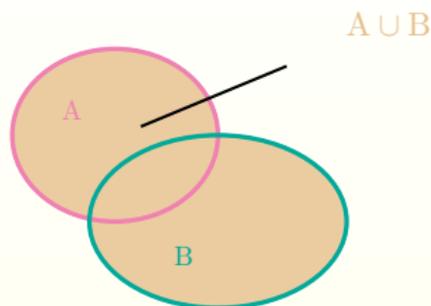


Figure 9 – Réunion d'ensembles.

Proposition II (Propriétés algébriques) :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

- $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$.
- $A \cup \emptyset = A$. (\emptyset est neutre pour \cup)
- $A \cup E = E$. (E est élément absorbant pour \cup)
- $A \cup \bar{A} = E$. (A et \bar{A} recouvrent E)

III. Opérations sur les ensembles

3. Réunion

Exercice 12 :

① Simplifier $[1; 3] \cup]2; 4]$.



III. Opérations sur les ensembles

3. Réunion

Exercice 12 :

❶ Simplifier $[1; 3] \cup]2; 4]$.

❷ Résoudre, dans \mathbb{R} , l'inéquation $\frac{-x^2 - x + 2}{x^2 - 4x + 3} \geq 0$.



III. Opérations sur les ensembles

3. Réunion

Théorème 12 (Stabilité par image directe et réciproque) :

Soit $f : E \mapsto F$ une application. Pour toute parties A et B de E , on a :

① $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$



III. Opérations sur les ensembles

3. Réunion

Théorème 12 (Stabilité par image directe et réciproque) :

Soit $f : E \mapsto F$ une application. Pour toute parties A et B de E , on a :

- ❶ $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- ❷ $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.



III. Opérations sur les ensembles

3. Réunion

Proposition 13 (Propriétés algébriques de \cap et \cup) :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

Commutativité

- $A \cup B = B \cup A$.
- $A \cap B = B \cap A$.



III. Opérations sur les ensembles

3. Réunion

Proposition 13 (Propriétés algébriques de \cap et \cup) :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

Commutativité

- $A \cup B = B \cup A$.
- $A \cap B = B \cap A$.

Lois de Morgan

- $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$.
- $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$.



III. Opérations sur les ensembles

3. Réunion

Proposition 13 (Propriétés algébriques de \cap et \cup) :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

Commutativité

- $A \cup B = B \cup A$.
- $A \cap B = B \cap A$.

Lois de Morgan

- $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$.
- $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$.

Associativité

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.



III. Opérations sur les ensembles

3. Réunion

Proposition 13 (Propriétés algébriques de \cap et \cup) :

Distributivité mutuelle

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.



III. Opérations sur les ensembles

3. Réunion

Proposition 13 (Propriétés algébriques de \cap et \cup) :

Distributivité mutuelle

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Sous-ensemble

- $C_E(E) = \emptyset$ et $C_E(\emptyset) = E$
- $C_E C_E A = A$ et $A \cup C_E A = E$.
- $A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B$
 $\iff C_E B \subset C_E A$.



III. Opérations sur les ensembles

3. Réunion

Proposition 13 (Propriétés algébriques de \cap et \cup) :

Distributivité mutuelle

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Sous-ensemble

- $C_E(E) = \emptyset$ et $C_E(\emptyset) = E$
- $C_E C_E A = A$ et $A \cup C_E A = E$.
- $A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B$
 $\iff C_E B \subset C_E A$.

L'équivalence $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$ est aux ensembles ce qu'est aux propriétés l'équivalence entre une propriété et sa contraposée.



III. Opérations sur les ensembles

4. Différence

Définition 15 :

La **différence** des ensembles A et B, notée $A \setminus B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A et pas à B.

$$A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \complement_E B.$$

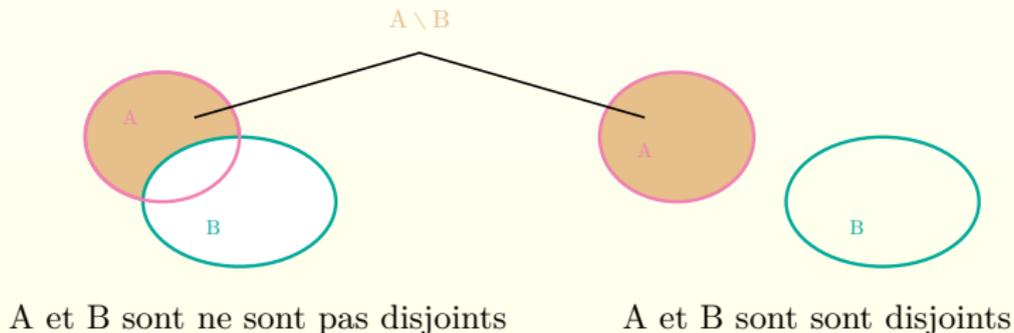


Figure 10 – Différence de deux ensembles.



III. Opérations sur les ensembles

4. Différence

Exemples 15 :

- $\mathbb{R}_+ = \mathbb{R} \setminus]-\infty; 0[.$



III. Opérations sur les ensembles

4. Différence

Exemples 15 :

- $\mathbb{R}_+ = \mathbb{R} \setminus]-\infty; 0[.$
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est l'ensemble des irrationnels.



III. Opérations sur les ensembles

4. Différence

Exemples 15 :

- $\mathbb{R}_+ = \mathbb{R} \setminus]-\infty; 0[$.
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est l'ensemble des irrationnels.
- $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres complexes non réels.
Cet ensemble contient strictement l'ensemble des imaginaires purs non nuls $i\mathbb{R}^*$.



III. Opérations sur les ensembles

4. Différence

Il faut bien garder en tête la correspondance entre opérations ensemblistes et connecteurs logiques :

Résumé et analogie :

$\cup \equiv \vee$	$x \in A \cup B \iff (x \in A) \vee (x \in B)$
$\cap \equiv \wedge$	$x \in A \cap B \iff (x \in A) \wedge (x \in B)$
$\complement \equiv \neg$	$x \in \complement B \iff \neg(x \in B)$
$\subset \equiv \implies$	$A \subset B \iff (x \in A \implies x \in B)$
$= \equiv \iff$	$A = B \iff (x \in A \iff x \in B)$



IV. Famille d'ensembles

- 1 Notions sur les ensembles
- 2 Ensembles et fonctions
- 3 Opérations sur les ensembles
- 4 Famille d'ensembles**
 - Réunion et intersection
 - Notion de partition
- 5 Produit cartésien



IV. Famille d'ensembles

1. Réunion et intersection

Définition 16 (Unions et intersections quelconques) :

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E , indexée par un ensemble I quelconque.

- La **réunion** des ensembles de la famille (A_i) est l'ensemble des éléments appartenant à l'un des A_i :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E / \exists i_x \in I, x \in A_{i_x}\}.$$



IV. Famille d'ensembles

1. Réunion et intersection

Définition 16 (Unions et intersections quelconques) :

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E , indexée par un ensemble I quelconque.

- La **réunion** des ensembles de la famille (A_i) est l'ensemble des éléments appartenant à l'un des A_i :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E / \exists i_x \in I, x \in A_{i_x}\}.$$

- L'**intersection** des ensembles de la famille (A_i) est l'ensemble des éléments appartenant à tous les A_i :

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E / \forall i \in I, x \in A_i\}.$$



IV. Famille d'ensembles

1. Réunion et intersection

Définition 16 (Unions et intersections quelconques) :

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E , indexée par un ensemble I quelconque.

- La **réunion** des ensembles de la famille (A_i) est l'ensemble des éléments appartenant à l'un des A_i :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E / \exists i_x \in I, x \in A_{i_x}\}.$$

- L'**intersection** des ensembles de la famille (A_i) est l'ensemble des éléments appartenant à tous les A_i :

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E / \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

Remarque : L'existence de tels ensembles est un axiome de la théorie des ensembles.



IV. Famille d'ensembles

1. Réunion et intersection

Exemples 16 :

$$\blacksquare D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right[.$$



IV. Famille d'ensembles

1. Réunion et intersection

Exemples \aleph :

- $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right[.$
- Soit f la fonction sin, on a $f^{-1}([0; 1]) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [2n\pi; (2n+1)\pi].$

On montrera plus tard que :

- $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1[= \mathbb{R}$
- $\bigcup_{n \geq 1} \left[\frac{1}{n}, 1 \right] =]0; 1].$



IV. Famille d'ensembles

1. Réunion et intersection

Exemples \aleph :

- $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right[.$
- Soit f la fonction sin, on a $f^{-1}([0; 1]) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [2n\pi; (2n+1)\pi].$

On montrera plus tard que :

- $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1[= \mathbb{R}$
- $\bigcap_{n \geq 1} \left] -\frac{1}{n}, 1 \right] = [0; 1].$
- $\bigcup_{n \geq 1} \left[\frac{1}{n}, 1 \right] =]0; 1].$



IV. Famille d'ensembles

1. Réunion et intersection

Exemples 16 :

- $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right[.$
- Soit f la fonction sin, on a $f^{-1}([0; 1]) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [2n\pi; (2n+1)\pi].$

On montrera plus tard que :

- $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1[= \mathbb{R}$
- $\bigcap_{n \geq 1} \left] -\frac{1}{n}, 1 \right] = [0; 1].$
- $\bigcup_{n \geq 1} \left[\frac{1}{n}, 1 \right] =]0; 1].$
- $\bigcap_{n \geq 1} \left[1 - \frac{1}{n}, 1 \right] = \{1\}.$



IV. Famille d'ensembles

1. Réunion et intersection

Un certain nombre de propriétés vues dans les paragraphes précédents se généralisent aux unions et intersections quelconques :

Proposition 14 :

Étant donné $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles, et B un ensemble, tous inclus dans un ensemble E .

Distributivité :

$$\blacksquare B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i).$$

$$\blacksquare B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i).$$



IV. Famille d'ensembles

1. Réunion et intersection

Un certain nombre de propriétés vues dans les paragraphes précédents se généralisent aux unions et intersections quelconques :

Proposition 14 :

Étant donné $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles, et B un ensemble, tous inclus dans un ensemble E .

Distributivité :

$$\blacksquare B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i).$$

$$\blacksquare B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i).$$

Lois de Morgan :

$$\blacksquare C_E \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (C_E A_i).$$

$$\blacksquare C_E \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (C_E A_i).$$



IV. Famille d'ensembles

1. Réunion et intersection

Exercice B :

Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E indexée par un ensemble I et $(B_j)_{j \in J}$ une famille de parties d'un ensemble F indexée par un ensemble J .

Soit f une application de E vers F .

Comparer du point de vue de l'inclusion les parties suivantes :

$$\textcircled{1} f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \text{ et } \bigcup_{i \in I} f(A_i)$$

Aide : recommencer par $f(A \cup B)$ si on n'a pas les idées claires.



IV. Famille d'ensembles

1. Réunion et intersection

Exercice B :

Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E indexée par un ensemble I et $(B_j)_{j \in J}$ une famille de parties d'un ensemble F indexée par un ensemble J .

Soit f une application de E vers F .

Comparer du point de vue de l'inclusion les parties suivantes :

- 1 $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$ et $\bigcup_{i \in I} f(A_i)$
- 2 $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$ et $\bigcap_{i \in I} f(A_i)$.

Aide : recommencer par $f(A \cup B)$ si on n'a pas les idées claires.



IV. Famille d'ensembles

1. Réunion et intersection

Exercice B :

Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E indexée par un ensemble I et $(B_j)_{j \in J}$ une famille de parties d'un ensemble F indexée par un ensemble J .

Soit f une application de E vers F .

Comparer du point de vue de l'inclusion les parties suivantes :

$$\textcircled{1} f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \text{ et } \bigcup_{i \in I} f(A_i)$$

$$\textcircled{3} f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) \text{ et } \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j).$$

$$\textcircled{2} f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \text{ et } \bigcap_{i \in I} f(A_i).$$

Aide : recommencer par $f(A \cup B)$ si on n'a pas les idées claires.



IV. Famille d'ensembles

1. Réunion et intersection

Exercice B :

Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E indexée par un ensemble I et $(B_j)_{j \in J}$ une famille de parties d'un ensemble F indexée par un ensemble J .

Soit f une application de E vers F .

Comparer du point de vue de l'inclusion les parties suivantes :

❶ $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$ et $\bigcup_{i \in I} f(A_i)$

❷ $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$ et $\bigcap_{i \in I} f(A_i)$.

❸ $f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right)$ et $\bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$.

❹ $f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)$ et $\bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j)$.

Aide : recommencer par $f(A \cup B)$ si on n'a pas les idées claires.



IV. Famille d'ensembles

1. Réunion et intersection

Exercice B :

Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E indexée par un ensemble I et $(B_j)_{j \in J}$ une famille de parties d'un ensemble F indexée par un ensemble J .

Soit f une application de E vers F .

Comparer du point de vue de l'inclusion les parties suivantes :

❶ $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$ et $\bigcup_{i \in I} f(A_i)$

❷ $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$ et $\bigcap_{i \in I} f(A_i)$.

❸ $f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right)$ et $\bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$.

❹ $f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)$ et $\bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j)$.

Aide : recommencer par $f(A \cup B)$ si on n'a pas les idées claires.

Moralité : Les assertions du **théorème (12)** et du **théorème (10)** se généralisent à une famille quelconques de parties de E .



IV. Famille d'ensembles

1. Réunion et intersection

Proposition 15 :

Soit $f : E \mapsto F$ une application entre deux ensembles E et F .

Pour tout y de F , les ensembles $f^{-1}(\{y\})$ sont deux à deux disjoints et

$$\bigcup_{y \in F} f^{-1}(\{y\}) = E.$$



IV. Famille d'ensembles

2. Notion de partition

Définition 17 :

Soient I une partie de \mathbb{N} et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E .

On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ forme une partition de E si :

- $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset,$



IV. Famille d'ensembles

2. Notion de partition

Définition 17 :

Soient I une partie de \mathbb{N} et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E .

On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ forme une partition de E si :

- $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset,$
- $\forall (i; j) \in I^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset,$



IV. Famille d'ensembles

2. Notion de partition

Définition 17 :

Soient I une partie de \mathbb{N} et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E .

On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ forme une partition de E si :

- $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset,$
- $\forall (i; j) \in I^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset,$
- et $\bigcup_{i \in I} A_i = E.$



IV. Famille d'ensembles

2. Notion de partition

Définition 17 :

Soient I une partie de \mathbb{N} et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E .

On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ forme une partition de E si :

- $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset,$
- $\forall (i; j) \in I^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset,$
- et $\bigcup_{i \in I} A_i = E.$

Les sous-ensembles A_i s'appellent les **composantes** de la partition.

Dans le cas où I est finie, on parlera de partition finie, dénombrable quand $I \subset \mathbb{N}$ et quelconque dans les autres cas.



IV. Famille d'ensembles

2. Notion de partition

Définition 17 :

Soient I une partie de \mathbb{N} et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E .

On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ forme une partition de E si :

- $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset,$
- $\forall (i; j) \in I^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset,$
- et $\bigcup_{i \in I} A_i = E.$

Les sous-ensembles A_i s'appellent les **composantes** de la partition.

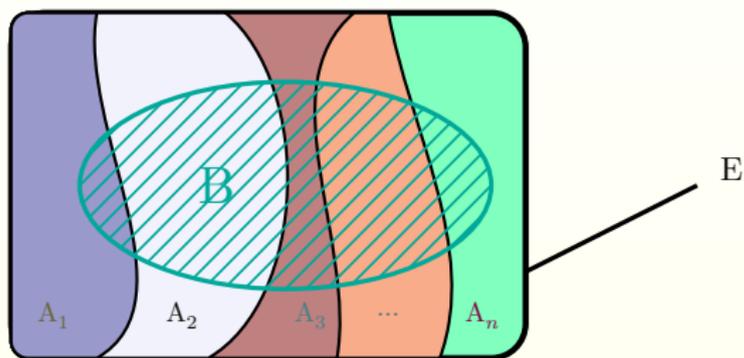
Dans le cas où I est finie, on parlera de partition finie, dénombrable quand $I \subset \mathbb{N}$ et quelconque dans les autres cas.

On note $E = \bigsqcup_{i \in I} A_i$ pour signifier la réunion disjointe.



IV. Famille d'ensembles

2. Notion de partition



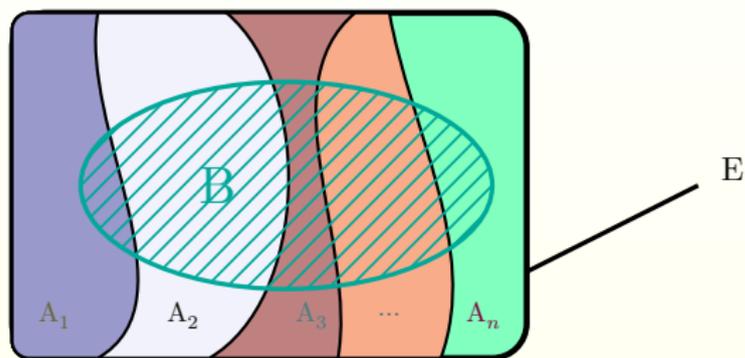
$$B = (A_1 \cap B) \sqcup (A_2 \cap B) \sqcup \dots \sqcup (A_n \cap B).$$

Figure 11 – Partie d'un ensemble vue à travers une partition de celui-ci.



IV. Famille d'ensembles

2. Notion de partition



$$B = (A_1 \cap B) \sqcup (A_2 \cap B) \sqcup \dots \sqcup (A_n \cap B).$$

Figure 11 – Partie d'un ensemble vue à travers une partition de celui-ci.

Remarque : Des ensembles d'une famille $(A_i)_{i \in I}$ tels que $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ sont dits **deux à deux disjoints**.

On a alors $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$ mais la réciproque est fausse.



IV. Famille d'ensembles

2. Notion de partition

Exemples 17 :

- Soit A un sous-ensemble de E . D'après le théorème (8) et le théorème (11), on a $A \cup \bar{A} = E$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$.
Donc, A et \bar{A} forment une partition de E .



IV. Famille d'ensembles

2. Notion de partition

Exemples 17 :

- Soit A un sous-ensemble de E . D'après le théorème (8) et le théorème (11), on a $A \cup \bar{A} = E$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$.
Donc, A et \bar{A} forment une partition de E .
- Soit $f : E \mapsto F$ une application.

D'après la proposition (15), si f est surjective, la famille $\left(f^{-1}(\{y\}) \right)_{y \in F}$ forme une partition de E .



IV. Famille d'ensembles

2. Notion de partition

Exemples 17 :

- Soit A un sous-ensemble de E . D'après le théorème (8) et le théorème (11), on a $A \cup \bar{A} = E$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

Donc, A et \bar{A} forment une partition de E .

- Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

D'après la proposition (15), si f est surjective, la famille $\left(f^{-1}(\{y\}) \right)_{y \in F}$ forme une partition de E .

- L'ensemble des entiers pairs et celui des entiers impairs forment une partition de \mathbb{Z} .



IV. Famille d'ensembles

2. Notion de partition

Exemples 17 :

- Soit A un sous-ensemble de E . D'après le théorème (8) et le théorème (11), on a $A \cup \bar{A} = E$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

Donc, A et \bar{A} forment une partition de E .

- Soit $f : E \mapsto F$ une application.

D'après la proposition (15), si f est surjective, la famille $\left(f^{-1}(\{y\}) \right)_{y \in F}$ forme une partition de E .

- L'ensemble des entiers pairs et celui des entiers impairs forment une partition de \mathbb{Z} .
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_- \sqcup \mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$ mais le deuxième recouvrement n'est pas une partition de \mathbb{R} .



IV. Famille d'ensembles

2. Notion de partition

Exemples 17 :

- Soit A un sous-ensemble de E . D'après le théorème (8) et le théorème (11), on a $A \cup \bar{A} = E$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

Donc, A et \bar{A} forment une partition de E .

- Soit $f : E \mapsto F$ une application.

D'après la proposition (15), si f est surjective, la famille $\left(f^{-1}(\{y\}) \right)_{y \in F}$ forme une partition de E .

- L'ensemble des entiers pairs et celui des entiers impairs forment une partition de \mathbb{Z} .
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_- \sqcup \mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$ mais le deuxième recouvrement n'est pas une partition de \mathbb{R} .
- Si $E \neq \emptyset$, $E = \bigsqcup_{x \in E} \{x\}$.



IV. Famille d'ensembles

2. Notion de partition

Exemples 17 :

- Soit A un sous-ensemble de E . D'après le **théorème (8)** et le **théorème (11)**, on a $A \cup \bar{A} = E$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

Donc, A et \bar{A} forment une **partition** de E .

- Soit $f : E \mapsto F$ une application.

D'après la **proposition (15)**, si f est surjective, la famille $\left(f^{-1}(\{y\}) \right)_{y \in F}$ forme une partition de E .

- L'ensemble des entiers pairs et celui des entiers impairs forment une partition de \mathbb{Z} .
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_- \sqcup \mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$ mais le deuxième recouvrement n'est pas une partition de \mathbb{R} .
- Si $E \neq \emptyset$, $E = \bigsqcup_{x \in E} \{x\}$.
- La famille d'intervalles $\{ [n; n+1[\}_{n \in \mathbb{Z}}$ forme une partition de \mathbb{R} .



IV. Famille d'ensembles

2. Notion de partition

Exercice 14 :

Soit $E = \{a, b, c\}$.

Les familles suivantes sont-elles des partitions de E ?

- 1 $\{\emptyset, \{a, c\}, \{b\}\}$



IV. Famille d'ensembles

2. Notion de partition

Exercice 14 :

Soit $E = \{a, b, c\}$.

Les familles suivantes sont-elles des partitions de E ?

- ❶ $\{\emptyset, \{a, c\}, \{b\}\}$
- ❷ $\{\{a, b\}, \{b, c\}\}$



IV. Famille d'ensembles

2. Notion de partition

Exercice 14 :

Soit $E = \{a, b, c\}$.

Les familles suivantes sont-elles des partitions de E ?

❶ $\{\emptyset, \{a, c\}, \{b\}\}$

❸ $\{\{a\}, \{c\}\}$

❷ $\{\{a, b\}, \{b, c\}\}$



IV. Famille d'ensembles

2. Notion de partition

Exercice 14 :

Soit $E = \{a, b, c\}$.

Les familles suivantes sont-elles des partitions de E ?

❶ $\{\emptyset, \{a, c\}, \{b\}\}$

❷ $\{\{a, b\}, \{b, c\}\}$

❸ $\{\{a\}, \{c\}\}$

❹ $\{\{a\}, \{b, c\}\}$



IV. Famille d'ensembles

2. Notion de partition

Exercice 14 :

Soit $E = \{a, b, c\}$.

Les familles suivantes sont-elles des partitions de E ?

❶ $\{\emptyset, \{a, c\}, \{b\}\}$

❷ $\{\{a, b\}, \{b, c\}\}$

❸ $\{\{a\}, \{c\}\}$

❹ $\{\{a\}, \{b, c\}\}$

Exercice 15 :

Quelles partitions pourrait-on envisager pour l'ensemble $E = [a; b]$?



V. Produit cartésien

- 1 Notions sur les ensembles
- 2 Ensembles et fonctions
- 3 Opérations sur les ensembles
- 4 Famille d'ensembles
- 5 Produit cartésien**



V. Produit cartésien

Définition 18 (Produit cartésien) :

Étant donnés n ensembles E_1, \dots, E_n .

On appelle **produit cartésien** des ensembles E_1, \dots, E_n , noté

$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ (ou $\prod_{i=1}^n E_i$), l'ensemble de tous les n -uplets (x_1, \dots, x_n) dont la i -ème coordonnée est un élément de E_i .

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{ (x_1, \dots, x_n) / \forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, x_i \in E_i \}.$$



V. Produit cartésien

On note $E^2 = E \times E$, et plus généralement $E^n = \overbrace{E \times E \times \dots \times E}^{n \text{ fois}}$ pour un produit cartésien à n termes.

Exemple 18 :

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1; \dots; x_n) / \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i \in \mathbb{R}\}.$$



V. Produit cartésien

On note $E^2 = E \times E$, et plus généralement $E^n = \overbrace{E \times E \times \dots \times E}^{n \text{ fois}}$ pour un produit cartésien à n termes.

Exemple 18 :

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1; \dots; x_n) / \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i \in \mathbb{R}\}.$$

D'un point de vue formel, on a donc l'équivalence :

$$\forall x \in E, \forall y \in F \iff \forall (x; y) \in E \times F.$$



V. Produit cartésien

Ne pas confondre $(x_1, \dots, x_n) \neq \{x_1, \dots, x_n\}$.

- (x_1, \dots, x_n) est une famille ordonnée d'éléments :

$$(x_1, \dots, x_n) \neq (x_n, \dots, x_1).$$

ATTENTION



V. Produit cartésien

Ne pas confondre $(x_1, \dots, x_n) \neq \{x_1, \dots, x_n\}$.

- (x_1, \dots, x_n) est une famille ordonnée d'éléments :

$$(x_1, \dots, x_n) \neq (x_n, \dots, x_1).$$

- $\{x_1, \dots, x_n\}$ est un ensemble, dans lequel

ATTENTION



Ne pas confondre $(x_1, \dots, x_n) \neq \{x_1, \dots, x_n\}$.

- (x_1, \dots, x_n) est une famille ordonnée d'éléments :

$$(x_1, \dots, x_n) \neq (x_n, \dots, x_1).$$

- $\{x_1, \dots, x_n\}$ est un ensemble, dans lequel
 - l'ordre d'apparition des éléments n'a pas d'importance :

$$\{x_1, \dots, x_n\} = \{x_n, \dots, x_1\},$$

ATTENTION



Ne pas confondre $(x_1, \dots, x_n) \neq \{x_1, \dots, x_n\}$.

- (x_1, \dots, x_n) est une famille ordonnée d'éléments :

$$(x_1, \dots, x_n) \neq (x_n, \dots, x_1).$$

- $\{x_1, \dots, x_n\}$ est un ensemble, dans lequel
 - l'ordre d'apparition des éléments n'a pas d'importance :

$$\{x_1, \dots, x_n\} = \{x_n, \dots, x_1\},$$

- le nombre d'apparitions des éléments n'a pas d'importance :

$$\{x_1, \dots, x_n\} = \{x_1, x_1, \dots, x_n\}.$$

ATTENTION



V. Produit cartésien

Exemples 19 :

- $(1; 2)$ est un couple différent de $(2; 1)$. L'ensemble $\{1, 2\}$ est égal à l'ensemble $\{2, 1\}$.



V. Produit cartésien

Exemples 19 :

- $(1; 2)$ est un couple différent de $(2; 1)$. L'ensemble $\{1, 2\}$ est égal à l'ensemble $\{2, 1\}$.
- $(1; 1)$ est un couple et $\{1, 1\} = \{1\}$ un singleton.



V. Produit cartésien

Exemples 19 :

- $(1; 2)$ est un couple différent de $(2; 1)$. L'ensemble $\{1, 2\}$ est égal à l'ensemble $\{2, 1\}$.
- $(1; 1)$ est un couple et $\{1, 1\} = \{1\}$ un singleton.
- Pour $A = \{a; b\}$ et $B = \{1; 2; 3\}$, on a :

$$A \times B = \{(a; 1); (a; 2); (a; 3); (b; 1); (b; 2); (b; 3)\}.$$

$A \times B$	1	2	3
a	$(a; 1)$	$(a; 2)$	$(a; 3)$
b	$(b; 1)$	$(b; 2)$	$(b; 3)$



V. Produit cartésien

Remarque : Dans le produit cartésien $A \times B$ de deux ensembles A et B , pour chaque élément a de A , on dispose d'une copie complète de B , identifiée au produit $\{a\} \times B$, c'est-à-dire à l'ensemble des couples $(a; b)$, pour b parcourant B .

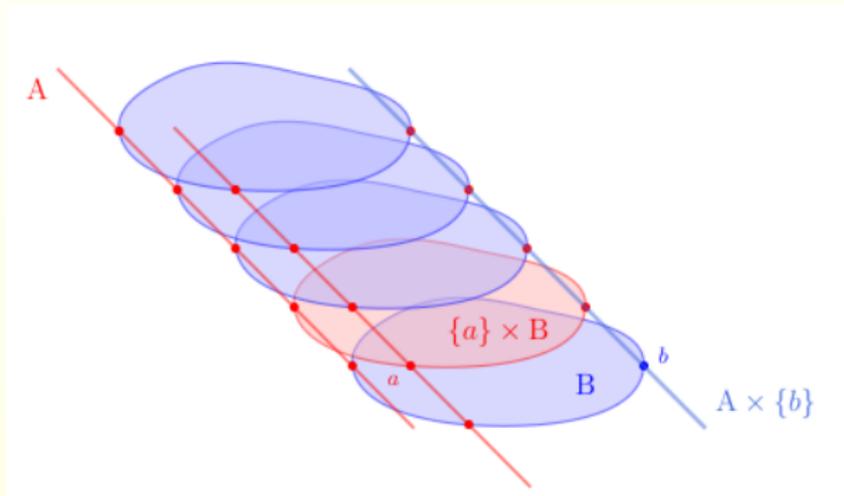


Figure 12 – Sections de $A \times B$.



V. Produit cartésien

Exemple 20 :

- L'ensemble des couples réels $(x; y)$ est noté \mathbb{R}^2 . On peut le représenter graphiquement comme le plan muni d'un repère, le couple $(x; y)$ étant alors identifié au point de coordonnées $(x; y)$.



V. Produit cartésien

Exemple 20 :

- L'ensemble des couples réels $(x; y)$ est noté \mathbb{R}^2 . On peut le représenter graphiquement comme le plan muni d'un repère, le couple $(x; y)$ étant alors identifié au point de coordonnées $(x; y)$.
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est l'ensemble des couples $(p; q)$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.



V. Produit cartésien

Exemple 20 :

- L'ensemble des couples réels $(x; y)$ est noté \mathbb{R}^2 . On peut le représenter graphiquement comme le plan muni d'un repère, le couple $(x; y)$ étant alors identifié au point de coordonnées $(x; y)$.
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est l'ensemble des couples $(p; q)$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
- Le cercle trigonométrique $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ n'est pas un produit cartésien. Il ne peut pas s'écrire sous la forme $A \times B$ où A, B sont deux parties de \mathbb{R} .



V. Produit cartésien

Proposition 16 :

Soit E , E' et F des ensembles.

Alors :

$$\blacksquare E \times F = \emptyset \iff (E = \emptyset) \vee (F = \emptyset)$$



V. Produit cartésien

Proposition 16 :

Soit E , E' et F des ensembles.

Alors :

- $E \times F = \emptyset \iff (E = \emptyset) \vee (F = \emptyset)$
- $(E \cup E') \times F = (E \times F) \cup (E' \times F)$.



V. Produit cartésien

Proposition 16 :

Soit E , E' et F des ensembles.

Alors :

- $E \times F = \emptyset \iff (E = \emptyset) \vee (F = \emptyset)$
- $(E \cup E') \times F = (E \times F) \cup (E' \times F)$.
- $(E \cap E') \times F = (E \times F) \cap (E' \times F)$.



V. Produit cartésien

ATTENTION

En général, $(A \times C) \cup (B \times D)$ n'est pas égal à $(A \cup B) \times (C \cup D)$.

Dans \mathbb{R}^2 , par exemple, $([0; 1] \times [0; 1]) \cup ([-1; 0] \times [-1; 0])$ est différent de l'ensemble $[-1; 1] \times [-1; 1]$.

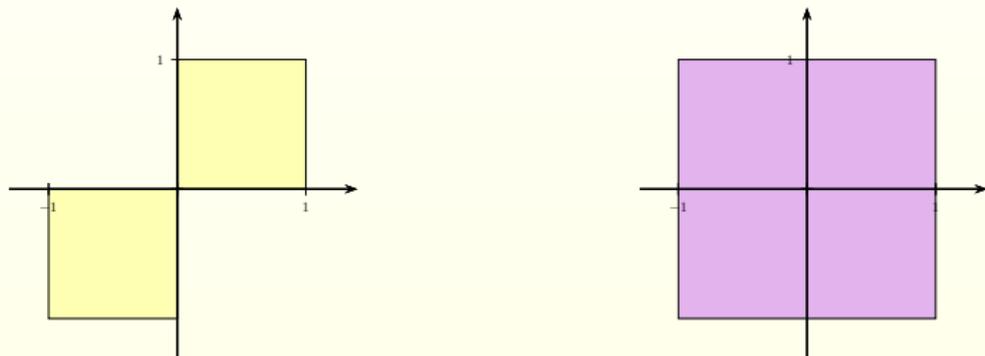


Figure 13 – $(A \times C) \cup (B \times D) \neq (A \cup B) \times (C \cup D)$.



V. Produit cartésien

Exemples 21 :

$$\blacksquare \{1\} \times \{1, 2\} \times \{1, 2, 3\} = \left\{ \begin{array}{l} (1; 1; 1); (1; 1; 2); (1; 1; 3); \\ (1; 2; 1); (1; 2; 2); (1; 2; 3) \end{array} \right\}.$$



V. Produit cartésien

Exemples 21 :

- $\{1\} \times \{1, 2\} \times \{1, 2, 3\} = \left\{ \begin{array}{l} (1; 1; 1); (1; 1; 2); (1; 1; 3); \\ (1; 2; 1); (1; 2; 2); (1; 2; 3) \end{array} \right\}$.
- Hachurer dans le plan $\left([0, 1] \cup [2, 3] \right) \times [0, 3]$.

