Ensembles

Soit A *une partie d'un ensemble* E*, on notera* $\overline{\mathrm{A}}$*, le complémentaire de* A *dans* E.

I/ Ensembles

Exercice 1 : Montrer que $\{x^2+x+1 \,/\, x \in \mathbb{R}\} \subset \left[\dfrac{1}{2} \,; +\infty\right[$.

Exercice 2 : On considère les ensembles A et B définis respectivement par les propriétés $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ ci dessous. Quelles sont les inclusions possibles ?

1. $\mathscr{P}:\ y = x^2$ et $\mathscr{Q}:\ y^2 = x^4$.
2. $\mathscr{R}:\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}$ et $\mathscr{S}:\ y^2 \leqslant 1 - x^2$.

Exercice 3 : Montrer que les ensembles $\mathrm{A} = \mathbb{R}_-$ et $\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \forall\, y \in \mathbb{R}_+,\ y \geqslant x\}$ sont égaux.

Exercice 4 : Soient E un ensemble et $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$. Montrer que

1. $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \iff \overline{\mathrm{B}} \subset \overline{\mathrm{A}} \iff \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B} \iff \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \iff \overline{\mathrm{A}} \cup \mathrm{B} = \mathrm{E} \iff \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}} = \varnothing$.
2. $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{C} \quad \iff \quad \mathrm{B} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{C}$.
3. $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \iff \mathrm{A} = \mathrm{B}$.
4. $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{C})$ et $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{C}) \iff \mathrm{B} = \mathrm{C}$.

Exercice 5 : Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

1. Montrer que $\begin{cases} \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{C} \\ \mathrm{B} \cup \mathrm{C} = \mathrm{B} \cap \mathrm{A} \\ \mathrm{C} \cup \mathrm{A} = \mathrm{C} \cap \mathrm{B} \end{cases} \implies \mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{C}$
2. Montrer que : $\begin{cases} (\mathrm{B} \setminus \mathrm{C}) \subset \mathrm{A} \\ (\mathrm{C} \setminus \mathrm{D}) \subset \mathrm{A} \end{cases} \implies (\mathrm{B} \setminus \mathrm{D}) \subset \mathrm{A}$

Exercice 6 : Soient $(\mathrm{A}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une partition d'un ensemble E et $\mathrm{B} \subset \mathrm{E}$ un sous-ensemble non-vide de E.

Montrer que $(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ forme une partition de B.

Exercice 7 : Soient E un ensemble, $n \geqslant 1$ un entier et A_1, ..., A_n des parties de E telles que :

- $A_1 = \varnothing$
- $A_n = E$.
- $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \dots \subsetneq A_n$.

On pose, $\forall\, k \in [\![1\,;n-1]\!]$, $B_k = A_{k+1} \setminus A_k$.

Montrer que $(B_k)_{1 \leqslant k \leqslant n-1}$ forme une partition de E.

Exercice 8 : Soit E un ensemble et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. On dit que $\mathcal{A}$ est une *algèbre de parties* E si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $\mathcal{A}$ n'est pas vide.
- Si $X \in \mathcal{A}$, alors $E \setminus X$ aussi.
- $\mathcal{A}$ est stable par union finie, autrement dit : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute famille U_1, ..., U_n d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{A}$.

1. Montrer que $\mathcal{P}(E)$ est une algèbre de parties de E.
2. Montrer qu'une algèbre de parties de E est stable par intersection finie.
3. Combien d'algèbres de parties y a-t-il si E a exactement trois éléments ?

II/ Applications

Exercice 9 : Déterminer l'ensemble image de chacune des fonctions suivantes :

1. $g_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$
2. $g_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$
3. $g_3 : \begin{array}{ccc} [0\,;\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$
4. $g_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+3x+5 \end{array}$
5. $g_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x-1}{x-1} \end{array}$
6. $g_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2+1} \end{array}$
7. $g_7 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x+1| \end{array}$
8. $g_8 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x+2|+|x-3| \end{array}$
9. $g_9 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x+2|-|x-3| \end{array}$
10. $g_{10} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+\cos x \end{array}$

Exercice 10 : Soit f une fonction de domaine de définition $\mathcal{D}_f$.

Exprimer celui de e^f, $\cos(f)$, $\sqrt{f}$, $\ln(f)$ et $\dfrac{1}{1-f}$ en fonction de $\mathcal{D}_f$.

Ensembles

Exercice 11 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

Déterminer les images directe et réciproque des parties suivantes :

1. $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R}_+$.
3. $\{3\}$.
4. $\{-7\}$.
5. $[-2\,;0[$.
6. $[-1\,;4]$.
7. $]-4\,;-2[\cup[1\,;3]$.

Exercice 12 :

1. $f : x \longmapsto x\,\mathrm{e}^x$ est-elle injective sur $\mathbb{R}$? Déterminer son image $f(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\operatorname{Im} g$ pour $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \ln x \end{array}$.

Exercice 13 : Soient f une application de E dans F ainsi que deux parties A, B telles que $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{E}$ et $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{F}$. Montrer que :

1. $f\left(\mathrm{A} \cap f^{-1}(\mathrm{B})\right) = f(\mathrm{A}) \cap \mathrm{B}$.
2. $f^{-1}(\mathrm{F} \setminus \mathrm{B}) = \mathrm{E} \setminus f^{-1}(\mathrm{B})$.

Exercice 14 : Montrer que l'inclusion $f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \subset f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{B})$ est une égalité si, et seulement si f est injective.

Exercice 15 : Soit f une application sur un ensemble E.

1. Montrer que f est injective si, et seulement si pour toute partie A de E, $f(\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}) \subset \complement_{\mathrm{E}} f(\mathrm{A})$.
2. Montrer que f est surjective si, et seulement si pour toute partie A de E, $\complement_{\mathrm{E}} f(\mathrm{A}) \subset f(\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A})$.
3. Cas d'égalité ?