Ensembles

Soit A *une partie d'un ensemble* E*, on notera* $\overline{\mathrm{A}}$*, le complémentaire de* A *dans* E.

I/ Ensembles

Exercice 1 : Montrer que $\{x^2+x+1\,/\,x\in\mathbb{R}\}\subset\left[\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

Exercice 2 : On considère les ensembles A et B définis respectivement par les propriétés $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ ci dessous. Quelles sont les inclusions possibles ?

1. $\mathscr{P}:\ y=x^2$ et $\mathscr{Q}:\ y^2=x^4$.
2. $\mathscr{R}:\ 0\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}$ et $\mathscr{S}:\ y^2\leqslant 1-x^2$.

Exercice 3 : Montrer que les ensembles $\mathrm{A}=\mathbb{R}\_$ et $\mathrm{B}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,\forall\,y\in\mathbb{R}_+,\ y\geqslant x\}$ sont égaux.

Exercice 4 : Soient E un ensemble et $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}\in\mathscr{P}(\mathrm{E})$. Montrer que

1. $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}\iff\overline{\mathrm{B}}\subset\overline{\mathrm{A}}\iff\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\mathrm{B}\iff\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\mathrm{A}\iff\overline{\mathrm{A}}\cup\mathrm{B}=\mathrm{E}\iff\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}}=\varnothing$.
2. $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\mathrm{A}\cap\mathrm{C}\quad\iff\quad\mathrm{B}\subset\mathrm{A}\subset\mathrm{C}$.
3. $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\iff\mathrm{A}=\mathrm{B}$.
4. $(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\mathrm{A}\cap\mathrm{C})$ et $(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\mathrm{A}\cup\mathrm{C})\iff\mathrm{B}=\mathrm{C}$.

Correction :

1. $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}\implies\overline{\mathrm{B}}\subset\overline{\mathrm{A}}$ **:** Supposons $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$.

   Soit $x\notin\mathrm{B}$. Alors x ne peut appartenir à A *i.e.* $x\in\overline{\mathrm{A}}$ et $\overline{\mathrm{B}}\subset\overline{\mathrm{A}}$.

   $\overline{\mathrm{B}}\subset\overline{\mathrm{A}}\implies\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$ **:** Supposons $\overline{\mathrm{B}}\subset\overline{\mathrm{A}}$. En passant au complémentaire, l'implication précédente s'écrit :

   $$\overline{\overline{\mathrm{A}}}\subset\overline{\overline{\mathrm{B}}}\iff\mathrm{A}\subset\mathrm{B}.$$

   Donc,

   $$\boxed{\mathrm{A}\subset\mathrm{B}\iff\overline{\mathrm{B}}\subset\overline{\mathrm{A}}.}$$

   $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}\implies\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\mathrm{B}$ **:** Supposons $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$.

   Par définition, $\mathrm{B}\subset\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$. Pour l'inclusion contraire, si $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$, tout élément de $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ est élément de B donc $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\subset\mathrm{B}$ et l'égalité.

Ensembles

$A \cup B = B \implies A \cap B = A$ **:** Supposons que $A \cup B = B$.

Il est toujours vraie que $A \cap B \subset A$. De même, $A \subset A \cup B = B$ entraîne $A \subset A \cap B$ et l'égalité.

$A \cap B = A \implies A \subset B$ **:** Supposons $A \cap B = A$.

Par définition de l'intersection, $A \cap B \subset B$ donc $A \subset B$.

Donc,

$$\boxed{A \subset B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A.}$$

$A \subset B \implies \overline{A} \cup B = E$ **:** Supposons $A \subset B$. Il est déjà clair que $\overline{A} \cup B \subset E$.

Remarque : Comme $(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \iff (\rceil\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$ alors $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \iff (\rceil\mathcal{P} \implies \mathcal{Q})$.

Soit $x \in E$. Pour montrer que $x \in\subset \overline{A} \cup B$, il suffit de montrer que si $x \notin \overline{A}$ alors $x \in B$.

Par hypothèse, $x \notin \overline{A} \implies x \in A \subset B$ et le résultat.

$\overline{A} \cup B = E \implies A \cap \overline{B} = \varnothing$ **:** Si $\overline{A} \cup B = E$ alors, en passant au complémentaire,

$$\overline{\overline{A} \cup B} = \overline{E} \iff A \cap \overline{B} = \varnothing.$$

$A \cap \overline{B} = \varnothing \implies A \subset B$ **:** Supposons $A \cap \overline{B} = \varnothing$ et soit $x \in A$.

Alors $x \notin \overline{B}$ *i.e.* $x \in B$ et $A \subset B$. Donc,

$$\boxed{A \subset B \iff \overline{A} \cup B = E \iff A \cap \overline{B} = \varnothing.}$$

On conclut avec la transitivité de l'équivalence.

2. Supposons $A \cup B = A \cap C$. Alors $B \subset A \cup B = A \cap C \subset A$ puis $A \subset A \cup B = A \cap C \subset C$. On conclut par transitivité de l'inclusion.

   La réciproque est claire.

3. Montrons la contraposée en supposant A et B distincts. Il existe alors $a \in A \setminus B$.

   Il en vient que $a \in A \cup B$ et $a \notin A \cap B$. Ces deux ensembles sont distincts.

   Commentaires : *De manière directe, $A \subset A \cup B = A \cap B \subset B$ et l'inclusion contraire par symétrie des rôles de A et B.*

4. De la même manière, soit $B \neq C$ et $b \in B \setminus C$.

   Par disjonction de cas, si $b \in A$ alors $b \in A \cap B$ mais $b \notin A \cap C$ *i.e.* $A \cap B \neq A \cap C$.

   Si $b \notin A$ alors $b \in A \cup B$ mais $b \notin A \cup C$ *i.e.* $A \cup B \neq A \cup C$.

   On vient bien de montrer que :

$$B \neq C \implies (A \cap B \neq A \cap C) \text{ ou } (A \cup B \neq A \cup C).$$

Exercice 5 : Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

1. Montrer que $\begin{cases} A \cup B = A \cap C \\ B \cup C = B \cap A \\ C \cup A = C \cap B \end{cases} \implies A = B = C$

2. Montrer que : $\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{B}\setminus\mathrm{C})\subset\mathrm{A}\\(\mathrm{C}\setminus\mathrm{D})\subset\mathrm{A}\end{array}\right.\implies(\mathrm{B}\setminus\mathrm{D})\subset\mathrm{A}$

Correction :

1. (a) Soit $x\in\mathrm{A}$.

   Alors $x\in\mathrm{A}\cup\mathrm{C}=\mathrm{C}\cap\mathrm{B}\subset\mathrm{B}$ donc $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$.

   (b) Soit $x\in\mathrm{B}$.

   Alors $x\in\mathrm{B}\cup\mathrm{A}=\mathrm{A}\cap\mathrm{C}\subset\mathrm{C}$ donc $\mathrm{B}\subset\mathrm{C}$.

   (c) Soit $x\in\mathrm{C}$.

   Alors $x\in\mathrm{B}\cup\mathrm{C}=\mathrm{B}\cap\mathrm{A}\subset\mathrm{A}$ donc $\mathrm{C}\subset\mathrm{A}$.

   On a donc montré successivement $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}\subset\mathrm{C}\subset\mathrm{A}$ *i.e.* $\mathrm{A}=\mathrm{B}=\mathrm{C}$ par transitivité et double inclusion.

2. Par la contraposée, supposons qu'il existe $x\in\mathrm{B}\setminus\mathrm{D}$ et $x\notin\mathrm{A}$. En particulier $x\in\mathrm{B}$.

   (a) Si $x\notin\mathrm{C}$ alors $x\in\mathrm{B}\setminus\mathrm{C}$ et $(\mathrm{B}\setminus\mathrm{C})\not\subset\mathrm{A}$.

   (b) Si $x\in\mathrm{C}$ alors $x\in\mathrm{C}\setminus\mathrm{D}$ et $(\mathrm{C}\setminus\mathrm{D})\not\subset\mathrm{A}$.

   On a donc prouvé que $\mathrm{B}\setminus\mathrm{D}\not\subset\mathrm{A}\implies(\mathrm{B}\setminus\mathrm{C})\not\subset\mathrm{A}$ ou $(\mathrm{C}\setminus\mathrm{D})\not\subset\mathrm{A}$. C'est bien la contraposée de ce qui était demandé.

Exercice 6 : Soient $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une partition d'un ensemble E et $\mathrm{B}\subset\mathrm{E}$ un sous-ensemble non-vide de E.

Montrer que $(\mathrm{B}\cap\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ forme une partition de B.

Exercice 7 : Soient E un ensemble, $n\geqslant 1$ un entier et A_1, ..., A_n des parties de E telles que :

- $\mathrm{A}_1=\varnothing$
- $\mathrm{A}_n=\mathrm{E}$.
- $\mathrm{A}_1\subsetneq\mathrm{A}_2\subsetneq\ldots\subsetneq\mathrm{A}_n$.

On pose, $\forall\,k\in[\![1\,;n-1]\!]$, $\mathrm{B}_k=\mathrm{A}_{k+1}\setminus\mathrm{A}_k$.

Montrer que $(\mathrm{B}_k)_{1\leqslant k\leqslant n-1}$ forme une partition de E.

Correction : Par construction, $\forall\,k\in[\![1\,;n-1]\!]$, $\mathrm{B}_k\neq\varnothing$. Pour montrer que $(\mathrm{B}_k)_{1\leqslant k\leqslant n-1}$ forme une partition de E, il suffit donc de vérifier deux conditions : l'union des B_k est égale à E, et les B_k sont deux à deux sont disjoints.

Montrons d'abord que $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n-1}\mathrm{B}_k=\mathrm{E}$:

Pour tout $k\in[\![1\,;n-1]\!]$, et tout $x\in\mathrm{B}_k$, $x\in\mathrm{A}_k\subset\mathrm{A}_n=\mathrm{E}$ donc l'inclusion $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n-1}\mathrm{B}_k\subset\mathrm{E}$ est claire.

Réciproquement soit $x \in \mathrm{E}$ et posons $\mathrm{K}_x = \{k \in [\![1\,;n-1]\!]\,, x \in \mathrm{A}_{k+1}\}$.

Comme $\mathrm{A}_n = \mathrm{E}$, $x \in \mathrm{A}_n$ *i.e.* $n \in \mathrm{K}_x$ qui est donc une partie non vide et majorée (par $n-1$) de $\mathbb{N}$. Elle possède donc un plus petit élément k_0.

Par définition, $x \in \mathrm{A}_{k_0+1}$ et $x \notin \mathrm{A}_{k_0}$ *i.e.* $x \in \mathrm{B}_{k_0}$. L'inclusion réciproque est donc prouvée d'où l'égalité.

Remarque : Comme $\mathrm{A}_1 = \varnothing$ et $\mathrm{A}_n = \mathrm{E}$, une autre méthode serait de montrer, par récurrence (itération ici plutôt), que

$$\mathrm{E} = \mathrm{A}_n \setminus \mathrm{A}_1 = (\mathrm{A}_n \setminus \mathrm{A}_{n-1}) \cup (\mathrm{A}_{n-1} \setminus \mathrm{A}_1) = \ldots = \bigcup_{k=1}^{n-1} (\mathrm{A}_{k+1} \setminus \mathrm{A}_k) = \bigcup_{k=1}^{n-1} \mathrm{B}_k.$$

Ensuite, montrons que les B_k sont disjoints deux à deux :

Supposons qu'il existe $i, j \in 1, 2, \ldots, n-1$ tels que $i \neq j$ et $\mathrm{B}_i \cap \mathrm{B}_j \neq \varnothing$. Cela signifie que B_i et B_j partagent au moins un élément x.

Sans perte de généralité, supposons que $i < j \iff i+1 \leqslant j$.

Comme $x \in \mathrm{B}_i$ alors $x \in \mathrm{A}_{i+1} \subset \mathrm{A}_j$. Mais $x \in \mathrm{B}_j \implies x \notin \mathrm{A}_j$.

D'où la contradiction si les B_k ne sont pas disjoints deux à deux.

La famille $(\mathrm{B}_k)_{1 \leqslant k \leqslant n-1}$ forme donc une partition de E.

Exercice 8 : Soit E un ensemble et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$. On dit que $\mathcal{A}$ est une *algèbre de parties* E si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $\mathcal{A}$ n'est pas vide.
- Si $\mathrm{X} \in \mathcal{A}$, alors $\mathrm{E} \setminus \mathrm{X}$ aussi.
- $\mathcal{A}$ est stable par union finie, autrement dit : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute famille U_1, ..., U_n d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{U}_i \in \mathcal{A}$.

1. Montrer que $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ est une algèbre de parties de E.
2. Montrer qu'une algèbre de parties de E est stable par intersection finie.
3. Combien d'algèbres de parties y a-t-il si E a exactement trois éléments ?

II/ Applications

Exercice 9 : Déterminer l'ensemble image de chacune des fonctions suivantes :

1. $g_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$
2. $g_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$
3. $g_3 : \begin{array}{ccc} [0\,;\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$
4. $g_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+3x+5 \end{array}$
5. $g_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x-1}{x-1} \end{array}$
6. $g_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2+1} \end{array}$
7. $g_7 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x+1| \end{array}$
8. $g_8 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x+2|+|x-3| \end{array}$
9. $g_9 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x+2|-|x-3| \end{array}$
10. $g_{10} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+\cos x \end{array}$

Exercice 10 : Soit f une fonction de domaine de définition $\mathcal{D}_f$.

Exprimer celui de e^f, $\cos(f)$, $\sqrt{f}$, $\ln(f)$ et $\dfrac{1}{1-f}$ en fonction de $\mathcal{D}_f$.

Correction :

f	e^f	$\cos(f)$	$\sqrt{f}$	$\ln(f)$	$\dfrac{1}{1-f}$
$\mathcal{D}_f$	$\mathcal{D}_f$	$\mathcal{D}_f$	$\mathcal{D}_f \cap f^{-1}(\mathbb{R}_+)$	$\mathcal{D}_f \cap f^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$	$\mathcal{D}_f \cap f^{-1}(\{1\})$

Exercice 11 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

Déterminer les images directe et réciproque des parties suivantes :

1. $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R}_+$.
3. $\{3\}$.
4. $\{-7\}$.
5. $[-2\,;0[$.
6. $[-1\,;4]$.
7. $]-4\,;-2[\cup[1\,;3]$.

Ensembles

Correction :

D	$f(\mathrm{D})$	$f^{-1}(\mathrm{D})$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}$
$\{3\}$	9	$\left\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right\}$
$\{-7\}$	49	$\varnothing$
$[-2\,;0[$	$]0\,;4]$	$\varnothing$
$[-1\,;4]$	$[0\,;16]$	$[-2\,;2]$
$]-4\,;-2[\cup[1\,;3]$	$[1\,;16[$	$\left[-\sqrt{3}\,;-1\right] \cup \left[1\,;\sqrt{3}\right]$

Exercice 12 :

1. $f : x \longmapsto x\,\mathrm{e}^x$ est-elle injective sur $\mathbb{R}$? Déterminer son image $f(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\operatorname{Im} g$ pour $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \ln x \end{array}$.

Exercice 13 : Soient f une application de E dans F ainsi que deux parties A, B telles que $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{E}$ et $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{F}$. Montrer que :

1. $f\left(\mathrm{A} \cap f^{-1}(\mathrm{B})\right) = f(\mathrm{A}) \cap \mathrm{B}$.
2. $f^{-1}(\mathrm{F} \setminus \mathrm{B}) = \mathrm{E} \setminus f^{-1}(\mathrm{B})$.

Correction : Par équivalence, on a :

1.
$$\begin{aligned} y \in f\left(\mathrm{A} \cap f^{-1}(\mathrm{B})\right) &\iff \exists x \in \mathrm{A} \cap f^{-1}(\mathrm{B}),\ y = f(x) \\ &\iff x \in \mathrm{A} \ \text{ et } \ f(x) \in \mathrm{B},\ y = f(x) \\ &\iff y \in f(\mathrm{A}) \cap \mathrm{B}. \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\mathrm{F} \setminus \mathrm{A}) &\iff f(x) \in \mathrm{F} \setminus \mathrm{A} \iff f(x) \in \mathrm{F} \ \text{ et } \ f(x) \notin \mathrm{A} \\ &\iff x \in f^{-1}(\mathrm{F}) = \mathrm{E} \ \text{ et } \ x \notin f^{-1}(\mathrm{A}) \iff x \in \mathrm{E} \setminus f^{-1}(\mathrm{A}). \end{aligned}$$

Exercice 14 : Montrer que l'inclusion $f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \subset f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{B})$ est une égalité si, et seulement si f est injective.

Exercice 15 : Soit f une application sur un ensemble E.

1. Montrer que f est injective si, et seulement si pour toute partie A de E, $f(\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}) \subset \complement_{\mathrm{E}} f(\mathrm{A})$.
2. Montrer que f est surjective si, et seulement si pour toute partie A de E, $\complement_{\mathrm{E}} f(\mathrm{A}) \subset f(\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A})$.
3. Cas d'égalité ?

Correction :

1. Pour le sens direct, supposons f injective sur E et considérons une partie A quelconque de E.

   Pour tout $y \in f(\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A})$ *i.e.* $\exists\, x \notin \mathrm{A},\ y = f(x)$.

   Si $y \in f(\mathrm{A})$ alors il existe $x' \in \mathrm{A}$ tel que $y = f(x')$.

   L'injectivité de f entraînerait alors que $x = x'$ et la contradiction.

   Donc $y \notin f(\mathrm{A})$ et $f(\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}) \subset \complement_{\mathrm{E}} f(\mathrm{A})$.

   Réciproquement, considérons deux éléments x, x' de E distincts *i.e.* $x' \notin \{x\}$.

   Par hypothèse, $f(x') \notin f(\{x\}) \iff f(x) \neq f(x')$ et l'injectivité de f sur E
2. De la même manière, supposons f surjective sur E et considérons une partie A quelconque de E.

   Soit $y \notin f(\mathrm{A})$. Comme f est surjective, y admet un antécédent $x \in \mathrm{E}$ par f.

   Comme $y \notin f(\mathrm{A})$, x ne peut appartenir à A *i.e.* $y \in f(\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A})$ et le résultat.

   Réciproquement, si f n'est pas surjective sur E, $\complement_{\mathrm{E}} f(\mathrm{E}) \neq \varnothing$ et $f(\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{E})$ qui le contient non plus. Ce qui est impossible.

   Donc f est surjective sur E.
3. D'après les questions précédentes, f est bijective sur E si, et seulement si $\complement_{\mathrm{E}} f(\mathrm{A}) = f(\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A})$.