Ensembles

Exercice 1 (Fonction indicatrice) – Soit E un ensemble.

Pour toute partie A de E, on appelle fonction indicatrice de A, notée $\mathbb{1}_A$, l'application définie par :

$$\mathbb{1}_A : \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{, si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que pour toutes partie A et B de E, on a :

   (a) $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \iff A = B$.

   (b) $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.

   (c) $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

   (d) $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

   (e) $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

   (f) $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$.

2. En déduire que pour toutes parties A, B et C de E :

   (a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

   (b) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Exercice 2 (Une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$) –

1. Justifier que $\forall\, x, y \in \mathbb{N}$, $\dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

On considère alors l'application $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (x,y) & \longmapsto & y + \dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2}. \end{array}$

2. Calculer $f(x,y)$ pour $(x,y) \in [\![0\,;4]\!] \times [\![0\,;4]\!]$.

   On donnera la réponse dans un tableau.

3. (a) Étant donnés (x,y) et (x',y') dans $\mathbb{N}^2$ tels que $x+y \geqslant x'+y'+1$.

   En étudiant le signe de $f(x,y) - f(x',y')$, montrer que $f(x,y) > f(x',y')$.

   Comment se traduit ce résultat sur le tableau de valeurs de la question 2. ?

   (b) En déduire que $f(x,y) = f(x',y') \implies x+y = x'+y'$, puis que :

   $$f(x,y) = f(x',y') \implies (x,y) = (x',y').$$

   Quelle propriété en déduire pour la fonction f.

4. (a) Étant donné (x,y) dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Trouver une relation entre $f(x-1,y+1)$ et $f(x,y)$.

   (b) Pour $y \in \mathbb{N}$, montrer, de même, que $f(y+1,0) = f(0,y)+1$.

   Comment se traduisent ces résultats sur le tableau de valeurs de la question 2. ?

   (c) Montrer par récurrence la fonction f est surjective.

5. Que peut-on en conclure pour la fonction f ? Et pour les ensembles $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$?

6. **Question de recherche :** déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.