Ensembles

Commentaires : *Cessez d'écrire le résultat à montrer sans mentionner que c'est ce que vous allez faire !*

Correction de l'exercice 1 – Soit E un ensemble.

Pour toute partie A de E, on appelle fonction indicatrice de A, notée $\mathbb{1}_A$, l'application définie par :

$$\begin{array}{rrcl} \mathbb{1}_A : & E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & x & \longmapsto & \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{, si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que pour toutes partie A et B de E, on a :

(a) Par double implication, supposons que $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$ et montrons que $A = B$ par double inclusion.

Si $x \in A$ alors $\mathbb{1}_B(x) = \mathbb{1}_A(x) = 1$ et $x \in B$. Donc $A \subset B$.

De même, si $x \in B$ alors $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x) = 1$ et $x \in A$. Donc $B \subset A$.

Finalement, $A = B$.

Réciproquement, si $A = B$ alors $\forall\, x \in E$, $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x)$ *i.e.* $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

Conclusion, $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \iff A = B$.

La fonction indicatrice caractérise donc l'ensemble *i.e.* deux ensembles ont les mêmes fonctions caractéristiques si, et seulement si ils sont égaux.

Commentaires : *Il était important de remarquer au moins une fois que la fonction indicatrice caractérisait l'ensemble. C'est ce qui permettait de conclure aux questions d'après.*

Les autres questions se résolvent par un simple tableau par disjonction de cas

(b)

$x \in E$	$\mathbb{1}_{\overline{A}}$	$1 - \mathbb{1}_A$
$x \in A$	0	0
$x \notin A$	1	1

Donc, $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.

(c)

$x \in E$	$\mathbb{1}_{A\cap B}$	$\mathbb{1}_A$	$\mathbb{1}_B$	$\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$
$x \in A$ et $x \in B$	1	1	1	1
$x \in A$ et $x \notin B$	0	1	0	0
$x \notin A$ et $x \in B$	0	0	1	0
$x \notin A$ et $x \notin B$	0	0	0	0

Donc, $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.

(d)

$x \in \mathrm{E}$	$\mathbb{1}_{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}$	$\mathbb{1}_{\mathrm{A}}$	$\mathbb{1}_{\mathrm{B}}$	$\mathbb{1}_{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}}$	$\mathbb{1}_{\mathrm{A}}+\mathbb{1}_{\mathrm{B}}-\mathbb{1}_{\mathrm{A}}\mathbb{1}_{\mathrm{B}}$
$x \in \mathrm{A}$ et $x \in \mathrm{B}$	1	1	1	1	1
$x \in \mathrm{A}$ et $x \notin \mathrm{B}$	1	1	0	0	1
$x \notin \mathrm{A}$ et $x \in \mathrm{B}$	1	0	1	0	1
$x \notin \mathrm{A}$ et $x \notin \mathrm{B}$	0	0	0	0	0

Donc, $\mathbb{1}_{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}} = \mathbb{1}_{\mathrm{A}}+\mathbb{1}_{\mathrm{B}}-\mathbb{1}_{\mathrm{A}}\mathbb{1}_{\mathrm{B}}$.

Commentaires : *Avec les questions précédentes,* $\mathbb{1}_{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}} = 1-\mathbb{1}_{\overline{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}} = 1-\mathbb{1}_{\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}}} = 1-\mathbb{1}_{\overline{\mathrm{A}}}\mathbb{1}_{\overline{\mathrm{B}}}$.
$= 1-(1-\mathbb{1}_{\mathrm{A}})(1-\mathbb{1}_{\mathrm{B}}) = \mathbb{1}_{\mathrm{A}}+\mathbb{1}_{\mathrm{B}}-\mathbb{1}_{\mathrm{A}}\mathbb{1}_{\mathrm{B}}$.

(e)

$x \in \mathrm{E}$	$\mathbb{1}_{\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}}$	$\mathbb{1}_{\mathrm{A}}$	$\mathbb{1}_{\mathrm{B}}$	$\mathbb{1}_{\mathrm{A}}\mathbb{1}_{\mathrm{B}}$	$\mathbb{1}_{\mathrm{A}}-\mathbb{1}_{\mathrm{A}}\mathbb{1}_{\mathrm{B}}$
$x \in \mathrm{A}$ et $x \in \mathrm{B}$	0	1	1	1	0
$x \in \mathrm{A}$ et $x \notin \mathrm{B}$	1	1	0	0	1
$x \notin \mathrm{A}$ et $x \in \mathrm{B}$	0	0	1	0	0
$x \notin \mathrm{A}$ et $x \notin \mathrm{B}$	0	0	0	0	0

Donc, $\mathbb{1}_{\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}} = \mathbb{1}_{\mathrm{A}}-\mathbb{1}_{\mathrm{A}}\mathbb{1}_{\mathrm{B}}$.

Commentaires : *Avec les questions précédentes,* $\mathbb{1}_{\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}} = \mathbb{1}_{\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}}} = \mathbb{1}_{\mathrm{A}}\mathbb{1}_{\overline{\mathrm{B}}} = \mathbb{1}_{\mathrm{A}}(1-\mathbb{1}_{\mathrm{B}})$.
$= \mathbb{1}_{\mathrm{A}}-\mathbb{1}_{\mathrm{A}}\mathbb{1}_{\mathrm{B}}$.

(f)

$x \in \mathrm{E}$	$\mathbb{1}_{\mathrm{A}}$	$\mathbb{1}_{\mathrm{A}}^2$
$x \in \mathrm{A}$	0	0
$x \notin \mathrm{A}$	1	1

Donc, $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}^2 = \mathbb{1}_{\mathrm{A}}$.

Commentaires : *On dit que l'application* $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}$ *est idem-potente.*

Avec les questions précédentes, $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}^2 = \mathbb{1}_{\mathrm{A}}\mathbb{1}_{\mathrm{A}} = \mathbb{1}_{\mathrm{A}\cap\mathrm{A}} = \mathbb{1}_{\mathrm{A}}$.

Commentaires : *Vos croyez vraiment que je vous demandais de faire 5 fois la même chose ? Vous avez quand même le droit de reconnaître quand on applique le même raisonnement.*

2. (a) On pourrait également faire un tableau de valeurs mais il est plus rapide d'utiliser les questions précédentes :

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\cap\mathrm{C}} &= \mathbb{1}_{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}\mathbb{1}_{\mathrm{C}}\\ &= (\mathbb{1}_{\mathrm{A}}+\mathbb{1}_{\mathrm{B}}-\mathbb{1}_{\mathrm{A}}\mathbb{1}_{\mathrm{B}})\,\mathbb{1}_{\mathrm{C}}\\ &= \mathbb{1}_{\mathrm{A}}\mathbb{1}_{\mathrm{C}}+\mathbb{1}_{\mathrm{B}}\mathbb{1}_{\mathrm{C}}-\mathbb{1}_{\mathrm{A}}\mathbb{1}_{\mathrm{B}}\mathbb{1}_{\mathrm{C}}\end{aligned}$$

Or, $\mathbb{1}_{\mathrm{C}}^2 = \mathbb{1}_{\mathrm{C}}$,

$$\begin{aligned}&= \mathbb{1}_{\mathrm{A}}\mathbb{1}_{\mathrm{C}}+\mathbb{1}_{\mathrm{B}}\mathbb{1}_{\mathrm{C}}-(\mathbb{1}_{\mathrm{A}}\mathbb{1}_{\mathrm{C}})(\mathbb{1}_{\mathrm{B}}\mathbb{1}_{\mathrm{C}})\\ &= \mathbb{1}_{(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})\cup(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})}.\end{aligned}$$

Donc, $(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\cap\mathrm{C} = (\mathrm{A}\cap\mathrm{C})\cup(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})$.

Commentaires : *L'intersection est distributive sur la réunion.*

(b) Par le même raisonnement, en partant du membre de droite :

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{(A\cup C)\cap(B\cup C)} &= \mathbb{1}_{A\cup C}\mathbb{1}_{B\cup C}\\ &(\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_C-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C)(\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_C-\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C)\\ &= \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C+\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C+\mathbb{1}_C^2-\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C^2-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C^2+\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C^2\end{aligned}$$

Or, $\mathbb{1}_C^2=\mathbb{1}_C$,

$$\begin{aligned}&= \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_C-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C\\ &= \mathbb{1}_{A\cap B}+\mathbb{1}_C+\mathbb{1}_{A\cap B}\mathbb{1}_C\\ &= \mathbb{1}_{(A\cap B)\cup C}.\end{aligned}$$

Donc, $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

Commentaires : *La réunion est distributive sur l'intersection.*

Correction de l'exercice 2 –

1. Soient $x, y\in\mathbb{N}$.

— Si $x+y$ est pair, alors $\dfrac{x+y}{2}$ est entier, donc $\dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2}=\dfrac{x+y}{2}(x+y+1)\in\mathbb{N}$.

— Si $x+y$ est impair, alors $x+y+1$ est pair donc $\dfrac{x+y+1}{2}$ est entier donc $\dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2}\in\mathbb{N}$.

Conclusion,

$$\forall (x,y)\in\mathbb{N}^2,\ \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}\in\mathbb{N}.$$

Commentaires : *L'application* $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{N}\times\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}\\ (x,y) & \longmapsto & y+\dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2}\end{array}$ *est donc bien définie.*

2. Les valeurs de $f(x,y)$ pour les premiers couples sont :

$x\setminus y$	0	1	2	3	4
0	0	2	5	9	14
1	1	4	8	13	19
2	3	7	12	18	25
3	6	11	17	24	32
4	10	16	23	31	40

3. (a) Considérons (x,y) et (x',y') dans $\mathbb{N}^2$ tels que

$$x+y\geqslant x'+y'+1.$$

En ajoutant 1 aux deux membres de l'inéquation,

$$(x+y+1)\geqslant x'+y'+2.$$

En multipliant ces quantités (positives) membre à membre,

$$(x+y)(x+y+1)\geqslant(x'+y'+1)(x'+y')+2(x'+y'+1).$$

Ensembles

D'où,

$$\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} - \frac{(x'+y')(x'+y'+1)}{2} \geqslant x'+y'+1.$$

Or,

$$\begin{aligned} f(x,y)-f(x',y') &= \left[y+\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}\right] - \left[y'+\frac{(x'+y')(x'+y'+1)}{2}\right] \\ &= y-y'+\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} - \frac{(x'+y')(x'+y'+1)}{2} \\ &\geqslant y-y'+(x'+y'+1) \\ &\geqslant y+x'+1 \geqslant 1 > 0. \end{aligned}$$

Donc, $x+y \geqslant x'+y'+1 \implies f(x,y) > f(x',y')$.

Les couples (x,y) tels que $x+y$ est une constante occupent une diagonale dans le tableau. Par exemple les couples $(0,2)$, $(1,1)$ et $(2,0)$ occupent la diagonale n^{o}2, et les couples $(0,3)$, $(1,2)$, $(2,1)$ et $(3,0)$ occupent la diagonale n^{o}3.

On vient de démontrer que si $p \geqslant n$, tous les couples de la diagonale n$^o p$ ont des images par f supérieures à celles des couples de la diagonale n$^o n$.

(b) Montrons ce résultat par sa contraposition *i.e.* $x+y \neq x'+y' \implies f(x,y) \neq f(x',y')$.
- Si $x+y < x'+y'+1 \iff x+y \leqslant x'+y'+1$ alors, par la question précédente, $f(x,y) > f(x',y')$ et en particulier $f(x,y) \neq f(x',y')$.
- Si $x'+y' < x+y+1 \iff x'+y' \leqslant x+y+1$ alors, par la question précédente et la symétrie des rôles de x et y, $f(x',y') > f(x,y)$ et encore $f(x,y) \neq f(x',y')$.

La contraposition est donc prouvée et le résultat demandé.

Conclusion, $f(x,y) = f(x',y') \implies x+y = x'+y'$.

Commentaires : *si deux couples ont la même image alors ils doivent être sur la même diagonale.*

On en déduit aisément que $\dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2} = \dfrac{(x'+y')(x'+y'+1)}{2}$ et l'égalité $f(x,y) = f(x',y')$ permet de conclure à $y = y'$.

Enfin, $x+y = x'+y'$ entraîne $x = x'$.

Conclusion, $f(x,y) = f(x',y') \implies (x,y) = (x',y')$. La fonction f est injective.

4. (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Il suffit d'écrire :

$$f(x-1,y+1) = y+1+\frac{(x-1+y+1)(x-1+y+1+1)}{2} = 1+f(x,y).$$

Donc,

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N},\ f(x-1,y+1) = f(x,y)+1.$$

Dans le tableau, cela signifie que lorsque l'on se déplace suivant une diagonale de vecteur $-\vec{i}+\vec{j}$, les valeurs de $f(x,y)$ augmentent de 1

	y	$y+1$
$x-1$	$\cdot$	$f(x,y)+1$
x	$f(x,y)$	

Ensembles

(b) Soit $y \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} f(y+1,0) - f(0,y) &= \left[0 + \frac{(y+1)(y+2)}{2}\right] - \left[y + \frac{y(y+1)}{2}\right] \\ &= \left[\frac{y(y+1)}{2} + (y+1)\right] - \left[y + \frac{y(y+1)}{2}\right] = 1. \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall\, y \in \mathbb{N}, \quad f(y+1,0) = f(0,y) + 1.$$

Dans le tableau, cela signifie que lorsque l'on effectue une symétrie par rapport à la bissectrice de la première ligne et qu'on se déplace suivant le vecteur $\vec{j}$ (dans la première colonne donc), les valeurs de $f(x,y)$ augmentent de 1.

	0	y
0		$f(0,y)$
y	$f(y,0)$	
$y+1$	$f(0,y)+1$	

Commentaires : *Développer est rarement une bonne idée. Très très rarement et souvent la pire idée.*

(c) Montrons par récurrence que tout entier naturel p admet au moins un antécédent par f.

— Si $p = 0$, on a $f(0,0) = 0$, donc 0 admet bien un couple antécédent par f.

— Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que p admette un antécédent (x,y) par f. Montrons que $p+1$ admet encore un antécédent par f.

  — Si $x \neq 0$, alors on a vu que $f(x-1,y+1) = f(x,y)+1$, donc $f(x-1,y+1) = p+1$, et donc $p+1$ admet le couple $(x-1,y+1) \in \mathbb{N}^2$ pour antécédent.

  — Si $x = 0$, on a donc $f(0,y) = p$. Mais alors, on vu que $f(y+1,0) = f(0,y)+1 = p+1$. Cette fois $p+1$ admet le couple $(y+1,0) \in \mathbb{N}^2$ pour antécédent.

  Dans tous les cas, $p+1$ admet un couple antécédent.

— Vérifiée pour $p = 0$ et héréditaire, la propriété est dnc vraie pour tout entier $p \in \mathbb{N}$:

$$\forall\, p \in \mathbb{N},\, \exists (x,y) \in \mathbb{N}^2, \quad f(x,y) = p.$$

La fonction f est surjective.

5. On vient de voir que f était injective et surjective.

En d'autres termes, tous les entiers de $\mathbb{N}$ admettent un (question 4) et un seul (question 3) antécédent par f dans $\mathbb{N}^2$ *i.e.* $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ est bijective.

Les ensembles $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$ sont équipotents.

Commentaires : *$\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$ ont donc le même nombre d'éléments !*

6. On peut vérifier que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$ est bijective.

Les premières valeurs sont

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
$f(n)$	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	$\cdots$

Par conséquent, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont équipotents.