Ensembles

1. Compléter :

Définition 7 : Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application entre deux ensembles E et F et A une partie de E.

On appelle *image* (directe) de A par f l'ensemble des images par f des éléments de A :

$$f(\mathrm{A}) = \{y \in \mathrm{F} \,/\, \exists x_y \in \mathrm{A},\ f(x_y) = y\} \subset \mathrm{F}.$$

$$\boxed{y \in f(\mathrm{A}) \iff y \in \mathrm{F} \text{ et } \exists x_y \in \mathrm{A},\ f(x_y) = y.}$$

$$\boxed{f \text{ est surjective sur F} \iff f(\mathrm{E}) = \mathrm{F}.}$$

Théorème 6 (Stabilité par image réciproque) :
Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application. Pour toutes parties A et B de E, on a :

(a) $\mathrm{A} \subset f^{-1}(f(\mathrm{A}))$.

(b) $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \implies f^{-1}(\mathrm{A}) \subset f^{-1}(\mathrm{B})$.

2. Démontrer le théorème (6).

   (a) Si $x \in \mathrm{A}$, $f(x) \in f(\mathrm{A})$ *i.e.* $x \in f^{-1}(f(\mathrm{A}))$ par définition.
   (b) Soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$. Si $x \in f^{-1}(\mathrm{A})$ alors $f(x) \in \mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ donc $f(x) \in \mathrm{B}$ *i.e.* $x \in f^{-1}(\mathrm{B})$.

3. Démontrer le théorème (10)

Théorème 10 (Stabilité par intersection) :
Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application.

(a) Pour toute parties A et B de E, $f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \subset f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{B})$.
(b)

   (a) Si $x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ alors $f(x) \in f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{B})$. On en déduit $f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \subset f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{B})$.

4. L'inclusion réciproque est-elle vraie ? Si oui, le démontrer, sinon donner un contre-exemple.

   (a) On n'a pas l'inclusion réciproque en général.

   Il suffit pour cela de considérer la fonction cos de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et les ensembles $\mathrm{A} = \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;-\dfrac{\pi}{3}\right]$ et $\mathrm{B} = [0\,;\pi]$ pour lesquels $f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \varnothing$ et $f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{B}) = \left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$.

Ensembles

Ensembles

1. Compléter :

Définition 10 : Soient $f : E \longmapsto F$ une application entre deux ensembles E et F et B une partie de F.

On appelle image *réciproque* de B par f l'ensemble des antécédents des éléments de B :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \ / \ f(x) \in B\} \subset E.$$

$$\boxed{x \in f^{-1}(B) \iff x \in E \ \text{ et } \ f(x) \in B.}$$

$$\boxed{f \text{ est injective sur E} \iff \forall\, x, y \in E,\ f(x) = f(y) \implies x = y.+}$$

Théorème 5 (Stabilité par image directe) :
Soit $f : E \longmapsto F$ une application. Pour toutes parties A et B de F, on a :

(a) $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

(b) $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$.

2. Démontrer le théorème (5).

(a) Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Alors, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x) \in B$ par définition de $f^{-1}(B)$.

(b) Soit $A \subset B$. Si $y \in f(A)$ alors $\exists\, x \in A$ tel que $y = f(x)$.

Or, $x \in B$.

Donc, $y \in f(B)$ par définition de $f(B)$.

3. Démontrer le théorème (10)

Théorème 10 (Stabilité par intersection) :
Soit $f : E \longmapsto F$ une application.

(a)

(b) Pour toute parties A et B de F, $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

(a)

(b) $x \in f^{-1}(A \cap B) \implies f(x) \in A \cap B \implies f(x) \in A$ et $f(x) \in B \implies x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

4. L'inclusion réciproque est-elle vraie ? Si oui, le démontrer, sinon donner un contre-exemple.

   (a)
   (b) L'inclusion réciproque est vraie.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\mathrm{A}) \cap f^{-1}(\mathrm{B}) &\Longrightarrow x \in f^{-1}(\mathrm{A}) \text{ et } x \in f^{-1}(\mathrm{B}) \\ &\Longrightarrow f(x) \in \mathrm{A} \text{ et } f(x) \in \mathrm{B} \Longrightarrow f(x) \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \\ &\Longrightarrow x \in f^{-1}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}). \end{aligned}$$